Криволинейные интегралы. Понятие и примеры решений

Махсуд Тулқин ўғли Усмонов
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: В данной статье рассматривается криволинейные интегралы, понятие и примеры решений криволинейных интегралов.

Ключевые слова: Криволинейные интегралы, понятие и примеры решений, интегральная сумма, площадь ступенчатой фигуры.

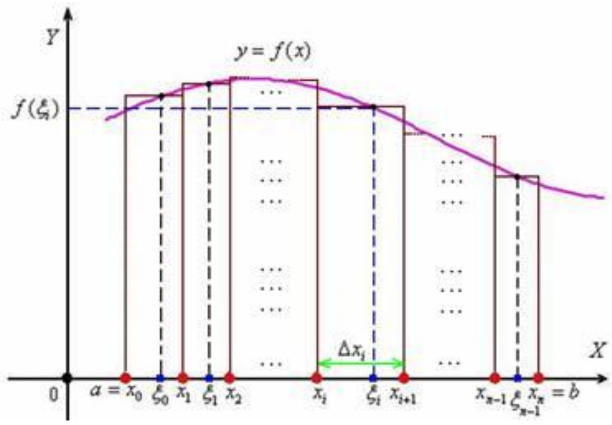
Curvilinear integrals. Concept and examples of solutions

Mahsud Tulgin oglu Usmonov
maqsudu32@gmail.com
Tashkent University of Information Technologies
Karshi branch

Abstract: This article discusses curvilinear integrals, the concept and examples of solutions of curvilinear integrals.

Keywords: Curvilinear integrals, concept and examples of solutions, integral sum, area of a step figure.

Давайте посмотрим на криволинейную трапецию и вспомним классическую схему интегрального исчисления:



- отрезок $[a; b]$ дробится на части;

- составляется интегральная сумма, которая равна площади ступенчатой фигуры;

- и, наконец, количество отрезков разбиения устремляется к бесконечности - в результате чего эта фигура превращается в криволинейную трапецию площади $S=\int_a^b f(x)dx$.

Аналогично выводятся формулы объема тела вращения, длины дуги кривой и др.

Более того, наводящие ужас кратные интегралы «устроены» принципиально так же - по существу, они отличается только областью интегрирования: у двойных интегралов - это не отрезок, а плоская фигура, у тройных - пространственное тело.

Криволинейный интеграл первого рода

имеет вид $\int_L f(x;y)dl$ и по модулю* равен площади $S_П$ данного фрагмента.

* Если график $z=f(x;y)$ целиком или бОльшей частью расположен ниже плоскости XOY, то площадь получится со знаком «минус».

Согласно общему принципу интегрирования, произведение бесконечно малого кусочка dl кривой L на соответствующую высоту $f(x;y)$ равно бесконечно малому элементу площади данной поверхности: $f(x;y)dl=dS$. А криволинейный интеграл как раз и объединяет эти элементы dS вдоль всей кривой: $\int_L f(x;y)dl=\int_L dS=S_П$.

Важно: во многих источниках информации дифференциал дуги кривой dl обозначают через ds, что, на мой взгляд, не слишком удачный выбор.

Если на плоскости XOY вместо кривой начертить отрезок прямой, то получится не что иное, как плоская криволинейная трапеция, параллельная оси OZ. Соответствующий интеграл хоть и каламбурно, но с полным правом можно назвать «прямолинейным».

В частности, если подынтегральная функция задаёт плоскость $z=f(x;y)=1$, то криволинейный интеграл равен площади «ленты» единичной высоты, а также и длине самой линии интегрирования: $\int_L f(x;y)dl=\int_L dl=|L|$.

Как вычислить криволинейный интеграл 1-го рода?

Пусть точки $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ являются концами линии L, а сама она задана функцией одной переменной $y(x)$. Тогда криволинейный интеграл первого рода можно свести к обычному определённому интегралу по следующей формуле:

$$\int_L f(x;y)dl=\int_{x1}^{x2} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\cdot|dx|$$

Знак модуля обусловлен природой рассматриваемого интеграла: поскольку дифференциал dl не может быть отрицательным (это же элемент длины), то при переходе к определённому интегралу нужно соблюсти статус-кво. В случае «арабского» интегрирования справа налево (когда $x_1 > x_2$) значения x убывают и поэтому $dx < 0$ - в результате чего появляется побочный минус, подлежащий немедленной ликвидации. Общую формулу можно расписать подробно:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{x1}^{x2} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$, если $x_1 < x_2$ (стандартный случай) или:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{x1}^{x2} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2} \cdot (-dx) = -\int_{x1}^{x2} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$, если $x_1 > x_2$.

В частности, при $f(x;y) = 1$ получается хорошо знакомая формула длины дуги кривой $\int_L dl = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = |L| \quad (x_1 < x_2)$. Вот так-то оно бывает - оказывается, криволинейные интегралы мы уже решали! И теперь вам совсем не нужно решимости:)

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_L ydl$ от точки $A(0;\, 0)$ до точки $B(1;\, \sqrt{2})$, если кривая L задана уравнением $y^2 = 2x$

Решение: перед нами каноническое уравнение параболы, и коль скоро в условии дана точка $B(1;\, \sqrt{2})$, то речь идёт о её верхней ветке: $y(x) = \sqrt{2x}$.

Желающие могут выполнить чертёж. Кстати, вне зависимости от его простоты, иногда это бывает обязательным требованием условия.

В данной задаче имеет место наиболее распространённый случай $x_1 < x_2$, а значит, нужно использовать формулу $\int_L f(x;y)dl = \int_{x1}^{x2} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$.

Сначала удобно найти производную и упростить корень:

$$y'(x) = (\sqrt{2x})' = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{2}{4x}} = \sqrt{1+\frac{1}{2x}}$$

Так как $f(x;y) = y$ и $y(x) = \sqrt{2x}$, то $f(x;y(x)) = \sqrt{2x}$ - грубо говоря, на данном шаге мы избавляемся от y.

Предварительная подготовка завершена, пользуемся формулой:

$$\int_L ydl = \int_0^1 \sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \int_0^1 \sqrt{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}dx = \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = (*)$$

Здесь можно провести замену переменной, но гораздо сподручнее подвести подкоренное выражение под знак дифференциала и обойтись без перехода к новым пределам интегрирования:

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}) = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

Ответ: $\int_L ydl = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$

Если вычислить тот же самый интеграл от точки $B(1;\sqrt{2})$ до точки $A(0;0)$, то результат не изменится. В этом случае x будет убывать от 1 до 0, следовательно, дифференциал dx станет отрицательным и при переходе к определённому интегралу потребуется добавить знак «минус»:

$$\int_L ydl = -\int_1^0 \sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \ldots = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

Таким образом, криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления интегрирования: $\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl$

В этой связи типовая задача, как правило, формулируется «нейтрально»: вычислить интеграл $\int_L ydl$ вдоль дуги параболы $y^2 = 2x$, расположенной между точками $A(0;0), B(1;\sqrt{2})$. Иными словами, совершенно не важно, какая из точек является началом, а какая - концом кривой.

Следует отметить, что криволинейный интеграл можно вычислить и другим способом. Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода справедлива «зеркальная» формула (тривиальный вариант $y_1 < y_2$):

$\int_L f(x;y)dl = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y);y)\cdot\sqrt{1+(x'(y))^2}dy$, где $x(y)$ - обратная функция, выражающая линию L. В нашей задаче:

$$y^2 = 2x \quad\Rightarrow\quad x(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$x'_y(y) = \left(\frac{y^2}{2}\right)'_y = \frac{2y}{2} = y$$

При переходе от $f(x;y)$ к $f(x(y);y)$ мы должны избавиться от всех x, однако функция $f(x;y) = y$ от них не зависит, а значит, делать ничего не нужно.

И, учитывая, что для у координат точек $A(0;0), B(1;\sqrt{2})$ справедливо неравенство $y_1 < y_2$, доводим решение до того же самого результата:

$$\int_L ydl = \int_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}d(1+y^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+2)^3} - \sqrt{(1+0)^3}\right) = \frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

В чём состоит геометрический смысл разобранной задачи? На плоскости XOY между точками $A(0;0))$ и $B(1;\sqrt{2})$ находится кусок параболы $y=\sqrt{2x}$, через который проходит «одноимённый» параболический цилиндр $y=\sqrt{2x}$, «высекающий» из плоскости $f(x;y)=y$ пространственную «ниточку». Криволинейный интеграл $\int_L ydl$ численно равен площади $S_П = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$ фрагмента параболического цилиндра, который расположен между куском параболы и этой «ниткой».

Криволинейный интеграл может получиться отрицательным - это означает, что фрагмент полностью или большей частью лежит ниже плоскости XOY .

Пример 2

Вычислить площадь фрагмента цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$ во 2-м и 6-м октантах $(x<0, y>0)$, который высечен плоскостью $z=0$ и гиперболическим параболоидом $z=xy$.

Ситуацию крайне важно представить геометрически - надеюсь, на данный момент все знают, как выглядит круговой цилиндр $x^2+y^2=1$; картинку же последней поверхности можно найти в начале урока об экстремумах функций двух и трёх переменных (3-й чертёж). Также будет полезно изобразить на плоскости XOY кривую интегрирования.

Довольно часто линия L бывает задана параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t)$, и в этом случае нужно использовать следующую формулу:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x_t'(t))^2+(y_t'(t))^2}dt$$

- если значение параметра возрастает $(t_1 \le t \le t_2)$. И для убывающего параметра $(t_1 > t_2)$:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x_t'(t))^2+(y_t'(t))^2}\cdot(-dt) = -\int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x_t'(t))^2+(y_t'(t))^2}dt$$

В частности, при $f(x;y)=1$ получается опять же знакомая формула длины параметрически заданной кривой:

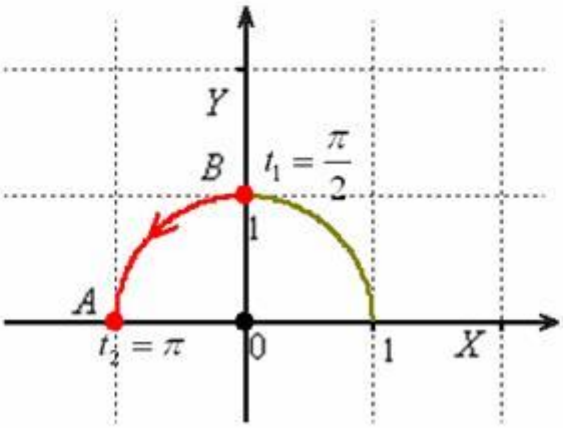
$$\int_L f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t'(t))^2 + (y_t'(t))^2}\,dt = |L| \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

Пример 3

Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xydl$ по дуге окружности $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ при изменении параметра $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

Параметрические уравнения эллипса и окружности я разбирал в тематической статье о площади и объёме, и поэтому если вам не понятен их смысл (или вообще смысл параметрического задания функции), то милости прошу по ссылке.

Решение: указанным пределам изменения параметра соответствует левая верхняя дуга единичной окружности:



По условию, значение параметра возрастает, поэтому:

$$\int_L f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x_t'(t))^2 + (y_t'(t))^2}\,dt$$

Нет, конечно, можно интегрировать и от π до $\frac{\pi}{2}$ с добавочным минусом, но зачем?

Как и в предыдущих примерах, сначала удобно найти производные и причесать корень:

$$x_t'(t) = (\cos t)_t' = -\sin t, \quad y_t'(t) = (\sin t)_t' = \cos t$$

$$\sqrt{(x_t'(t))^2 + (y_t'(t))^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

Итак:

$$\int_L xydl = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \cdot \sin t \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2tdt = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos \pi) = -\frac{1}{4}(1-(-1)) = -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $\int\limits_{L} xydl = -\frac{1}{2}$

Два последних примера похожи, как близкие родственники, однако между ними есть существенное различие: в Примере 2 требовалось найти площадь, и поэтому было принципиально важно проанализировать положение поверхности $z = xy$ относительно плоскости XOY. В третьем же примере нужно было вычислить интеграл формально. Как видите, различие здесь точно такое же, как и между вычислением площади с помощью определённого интеграла и «просто» вычислением определённого интеграла.

И, разумеется, криволинейные интегралы обладают всеми типичными свойствами «клана интегралов», в частности, для них справедливо свойство линейности:

$$\int\limits_{L} Cf(x;y)dl = C\int\limits_{L} f(x;y)dl, \quad \text{где } C = const;$$

$$\int\limits_{L} (f(x;y) + g(x;y))dl = \int\limits_{L} f(x;y)dl + \int\limits_{L} g(x;y)dl,$$

а также свойство аддитивности: если на линии AB выбрать промежуточную точку C, то интеграл можно разделить на две части:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl$$

Или вот такой - более практически важный пример, …сейчас что-нибудь придумаю, чтобы легко было нарисовать в уме,… предположим, нам нужно вычислить криволинейный интеграл по ломаной OAB:

$\int\limits_{OAB} f(x;y)dl$, где $O(0;\,0),\ A(1;\,1),\ B(0;\,2)$.

Да без проблем - представим его в виде суммы двух интегралов по отрезкам $OA,\ AB$:

$\int\limits_{OAB} f(x;y)dl = \int\limits_{OA} f(x;y)dl + \int\limits_{AB} f(x;y)dl$ - и вперёд с песнями.

И на всякий пожарный формула для кривой, заданной уравнением $r(\varphi)$ в полярных координатах:

$$\int\limits_{L} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi \quad (\alpha \le \varphi \le \beta)$$

Кроме того, у криволинейного интеграла 1-го рода существуют физические приложения, в частности, с помощью него можно вычислить массу плоской дуги $\int\limits_{L} f(x;y)dl = m$, если $f(x;y)$ - функция её плотности.

Если в интеграле $\int_L f(x;y)dl$ мы объединяли бесконечно малые кусочки dl самой кривой, то сейчас интегрирование пойдёт по проекциям dx этих кусочков на ось абсцисс:

$$\int_L f(x;y)dx,$$

или, как вариант - по их проекциям dy на ось ординат:

$$\int_L f(x;y)dy,$$

и если L не параллельна координатным осям, то:

$$\int_L f(x;y)dx = \int_L f(x;y)dy.$$

В большинстве задач приходится иметь дело с так называемой общей формой криволинейного интеграла от двух функций:

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

С практической точки зрения будут важнЫ те же свойства линейности и аддитивности, а также тот факт, что:

криволинейный интеграл 2-го рода зависит от направления интегрирования, причём:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

И в самом деле - здесь же интегрирование осуществляется не по длинам dl (которые беспрекословно положительны), а по их безразмерным проекциям, которые могут быть и отрицательными.

С чисто формальной точки зрения криволинейный интеграл 2-го рода «опознаётся» по наличию в подынтегральном выражении дифференциалов dx, dy (намного реже - какого-то одного), и алгоритм его решения гораздо бесхитростнее, нежели «разборки» со «старшим братом»:

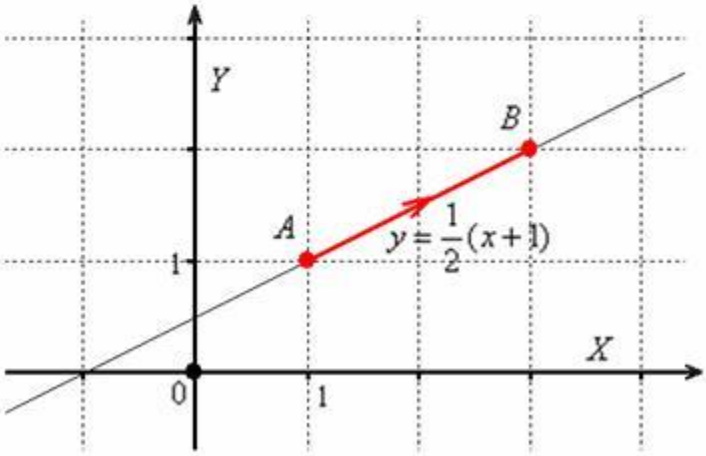
Пример 4

Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{y-1}{x}dx + \frac{x+1}{y}dy$, где L - отрезок прямой от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;2)$. Выполнить чертёж.

Решение: на первом шаге нам нужно найти уравнение прямой, которая содержит отрезок AB. Составим его по двум точкам:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{2-1}$$
$$x-1=2y-2$$
$$2y=x+1$$
$$y=\frac{1}{2}(x+1)$$

Несмотря на то, что линия интегрирования весьма простА, по условию требуется выполнить чертёж:



Обязательно указываем направление интегрирования - здесь оно имеет принципиальное значение. Также обратите внимание на область определения подынтегральных функций - в данном примере $x \neq 0, y \neq 0$, и поэтому линия интегрирования не должна пересекать координатные оси! Иногда авторы задачников и методичек недоглядывают за этим моментом, в результате чего получается невразумительное решение, где ответ, например, может оказаться бесконечным. Нет, конечно, мы вправе рассмотреть и несобственный криволинейный интеграл, но обычно задумка совсем не такая.

Способ первый, традиционный, где осуществляется переход к интегрированию по переменной x. Пределы интегрирования, как нетрудно догадаться, соответствуют «иксовым» координатам точек $A(1;1), B(3;2)$, при этом не имеет значения, какой из них больше, а какой меньше; НО, принципиально важен порядок - интегрировать нужно строго по заданному направлению: от 1 до 3.

Берём уравнение линии $y=\frac{1}{2}(x+1)$ и находим дифференциал:

$$dy=d\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]=\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)'dx=\frac{dx}{2}$$

Подставим $y=\frac{1}{2}(x+1)$ и $dy=\frac{dx}{2}$ в подынтегральное выражение - всё настолько прозрачно, что я даже формулу записывать не буду:

$$\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\int_1^3\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-1}{x}dx+\frac{x+1}{\frac{1}{2}(x+1)}\cdot\frac{dx}{2}\right)=\int_1^3\left(\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x}dx+dx\right)=\int_1^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}+1\right)dx=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left(3-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(3x-\ln|x|)\Big|_1^3=\frac{1}{2}(9-\ln 3-(3-\ln 1))=\frac{6-\ln 3}{2}$$

Ответ: $\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\frac{6-\ln 3}{2}$

Если проинтегрировать наоборот - от точки $B(3;2)$ до точки $A(1;1)$, то получится то же самое, только с другим знаком: $\int_{BA}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\int_3^1\ldots=-\left(\frac{6-\ln 3}{2}\right)$ - в силу известного свойства определённого интеграла.

Способ второй состоит в переходе к интегрированию по переменной y. Для этого из уравнения $y=\frac{1}{2}(x+1)$ выразим обратную функцию:

$2y=x+1$

$x=2y-1$

и найдём дифференциал $dx=d(2y-1)=(2y-1)'dy=2dy$.

Перейдём к определённому интегралу от 1 до 2 («игрековые» координаты точек A и B), подставив при этом в подынтегральное выражение $x=2y-1$ и $dx=2dy$:

$$\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\int_1^2\left(\frac{y-1}{2y-1}\cdot 2dy+\frac{2y-1+1}{y}dy\right)=\int_1^2\left(\frac{2y-2}{2y-1}dy+2dy\right)=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{2y-1-1}{2y-1}+2\right)dy=\int_1^2\left(1-\frac{1}{2y-1}+2\right)dy=\int_1^2\left(3-\frac{1}{2y-1}\right)dy=3\int_1^2 dy-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(2y-1)}{2y-1}=$$

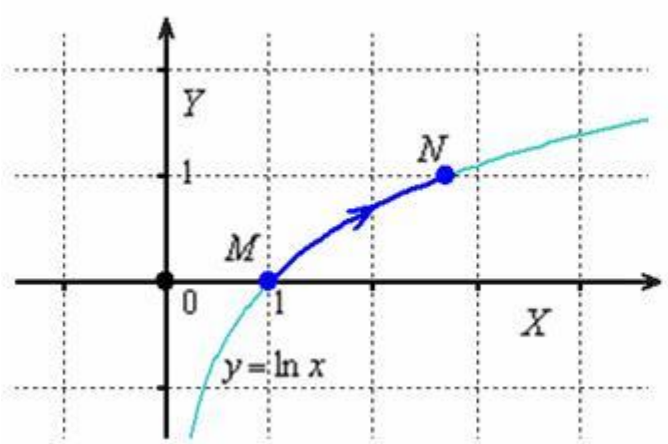
$$=3(y)\Big|_1^2-\frac{1}{2}(\ln|2y-1|)\Big|_1^2=3(2-1)-\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=3-\frac{\ln 3}{2}=\frac{6-\ln 3}{2}$$

Ответ: $\int_{AB}\frac{y-1}{x}dx+\frac{x+1}{y}dy=\frac{6-\ln 3}{2}$

Пример 6

Вычислить криволинейный интеграл $\int_L\frac{y^2}{x}dx+x^2dy$, где L - дуга кривой $y=\ln x$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(e;1)$.

Решение: для удобства выполним чертёж, не забывая подметить, что линия интегрирования не может пересекать ось ординат (т.к. $x\neq 0$), впрочем, она здесь заведомо не может - ибо логарифм:



Интеграл можно разделить на две части:

$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + \int\limits_L x^2dy$ - и с каждым из них разделаться по отдельности:

1) Вычислим $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx$. Так как $y = \ln x$, то $dy = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$, x изменяется от 1 до e:

$$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx = \int\limits_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int\limits_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}(\ln^3 x)\Big|_1^e = \frac{1}{3}(\ln^3 e - \ln^3 1) = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

Результат, кстати, не помешает проверить интегрированием по у:

$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^y$

$dx = d(e^y) = (e^y)'_y dy = e^y dy;$

y изменяется от 0 до 1 (см. чертёж):

$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{e^y} \cdot e^y dy = \int\limits_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}(y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$, что и требовалось проверить.

Со второй частью всё проще:

2) $\int\limits_L x^2dy = \int\limits_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \int\limits_1^e xdx = \frac{1}{2}(x^2)\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}$

Контроль по у: $\int\limits_L x^2dy = \int\limits_0^1 (e^y)^2dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2y}d(2y) = \frac{1}{2}(e^{2y})\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$

Осталось просуммировать полученные значения:

$$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \frac{1}{3} + \frac{e^2-1}{2} = \frac{2+3e^2-3}{6} = \frac{3e^2-1}{6}$$

Ответ: $\int\limits_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy = \frac{3e^2-1}{6}$

Разделение интеграла особенно удобно в тех случаях, когда подынтегральное выражение сильно «наворочено».

Пример 8

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx$ по кривой $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Решение: чертежа здесь, благо, чертить не требуется, да он и не нужен - условие таково, что снимай данные, да решай.

- в подынтегральном выражении нужно всё выразить через параметр.

При этом во многих случаях, и в этом в частности, «начинку» удобно обработать отдельно. Сначала разбираемся с дифференциалами:

$$dx = d(\sqrt{\cos t}) = (\sqrt{\cos t})'dt = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}} \cdot (\cos t)'dt = -\frac{\sin tdt}{2\sqrt{\cos t}}$$

$$dy = d(\sqrt{\sin t}) = (\sqrt{\sin t})'dt = \frac{1}{2\sqrt{\sin t}} \cdot (\sin t)'dt = \frac{\cos tdt}{2\sqrt{\sin t}}$$

Теперь без спешки и ВНИМАТЕЛЬНО подставляем их вместе с прародителями $x = \sqrt{\cos t}, y = \sqrt{\sin t}$ в подынтегральное выражение, после чего аккуратно проводим упрощения:

$$x^2ydy - y^2xdx = \left(\sqrt{\cos t}\right)^2 \cdot \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos tdt}{2\sqrt{\sin t}} - \left(\sqrt{\sin t}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos t} \cdot \left(-\frac{\sin tdt}{2\sqrt{\cos t}}\right) =$$

$$= \cos t \cdot \frac{\cos tdt}{2} + \sin t \cdot \frac{\sin tdt}{2} = \frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{2}dt$$

И что приятно, тут не нужно думать над пределами изменения параметра:

$$\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\int\limits_L x^2ydy - y^2xdx = \frac{\pi}{4}$

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // *Большая советская энциклопедия* : [в 30 т.] / гл. ред. *А. М. Прохоров*. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.

2. Андронов И. К., А. П. Киселев., «Математика в школе», 1941, № 2

3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4

4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

References

1. Kiselev, Andrey Petrovich // Great Soviet Encyclopedia: [in 30 volumes] / Ch. ed. A.M. Prokhorov. - 3rd ed. - M.: Soviet Encyclopedia, 1969-1978.

2. Andronov IK, AP Kiselev., "Mathematics at school", 1941, no. 2

3. Margulis A. Ya., Andrey Petrovich Kiselev, "Mathematics at school", 1948, no. 4

4. Depman I. Ya., History of arithmetic, M., 1959.