Вычисление предела функции с помощью ряда

Махсуд Тулқин ўғли Усмонов
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: Данная статья посвящёна приложению степенных рядов. В некоторых пределах для устранения неопределённости оказывается эффективной замена функции(й) степенными рядами. Очевидно, что предельное значение x должно обязательно лежать в интервале сходимости ряда, и теоретически это может быть любое число данного интервала. Но практически оно, как правило, равно нулю, что избавляет нас от проблем с «хвостом» ряда.

Ключевые слова: предел функции, ряд, вычисление предела

Calculating the Limit of a Function Using a Series

Mahsud Tulgin oglu Usmonov
maqsudu32@gmail.com
Tashkent University of Information Technologies
Karshi branch

Abstract: This article is devoted to the application of power series. Within certain limits, to eliminate the uncertainty, it turns out to be effective to replace the function (s) by power series. Obviously, the limiting value of x must necessarily lie in the range of convergence of the series, and theoretically it can be any number of this range. But in practice, it is usually equal to zero, which saves us from problems with the "tail" of the row.

Keywords: function limit, series, limit calculation

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\underset{\to 0}{\frac{x^2}{3!}}+\underset{\to 0}{\frac{x^4}{5!}}-\underset{\to 0}{\frac{x^6}{7!}}+\underset{\to 0}{\ldots}\right)=1$$

Обратите внимание на одну важную особенность: многие приложения степенных рядов посвящены приближённым вычислениям, однако в данном случае мы имеем дело с точным методом - поскольку меняем функцию на весь ряд.

Аналогичным способом можно доказать некоторые другие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{x^2}{3}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{x^3}{4}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}\right)=1$$

Задание: используя таблицу разложений, проверьте, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$. Задание, в общем-то, устное.

Очевидно, что предельное значение x должно обязательно лежать в интервале сходимости ряда, и теоретически это может быть любое число данного интервала. Но практически оно, как правило, равно нулю, что избавляет нас от проблем с «хвостом» ряда.

Пример 1

Вычислить предел с помощью разложения функции в ряд

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$$

Это предел из Примера 4 статьи Замечательный пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем разложение $\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\ldots$ - много членов записывать не нужно, обычно хватает трёх-четырёх. В данном случае $\alpha=4x$:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{4!}-\ldots\right)}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{4^2x^2}{2!}-\frac{4^4x^4}{4!}+\ldots}{5x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4^2x^2}{2!}-\frac{4^4x^4}{4!}+\ldots}{x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{4^2x}{2!}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{4^4x^3}{4!}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}\right)=\frac{1}{5}\cdot 0=0$$

Не забываем проставлять троеточия и указывать, что остаток ряда стремится к нулю!

Пример 3

Вычислить предел с помощью степенных рядов

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$

Вполне возможно, кому-то такое решение придётся больше по вкусу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем разложение $e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots$ для $\alpha=x$ и $\alpha=-x$, и чтобы не запутаться, сразу упростим числитель:

$$e^x-e^{-x}-2x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2x=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\ldots-2x=2x+\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots-2x=\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots$$

Со знаменателем всё проще:

$$x-\sin x = x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

Таким образом:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\left(\frac{2}{3!}+\frac{2x^2}{5!}+\ldots\right)}{x^3\cdot\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\underbrace{\frac{2x^2}{5!}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}}{\frac{1}{3!}-\underbrace{\frac{x^2}{5!}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}}=\frac{2}{3!}\cdot 3!=2$$

Пример 4

Пользуясь известными разложениями функций в ряд Маклорена, вычислить следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-\sin x}{x^3}$$

Разложение тангенса в ряд Маклорена

$$tg\alpha=\alpha+\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2\alpha^5}{15}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)\alpha^{2n-1}}{(2n)!}$$

, где B_{2n} - так называемые числа Бернулли. Данный ряд сходится при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Пример 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x-tg3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Да, конечно, здесь можно воспользоваться тригонометрической формулой $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, избавиться от трёхэтажности дроби и разобраться с двумя синусами и косинусом. Но к чему такие трудности? - если есть прямое разложение $tg\alpha=\alpha+\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2\alpha^5}{15}+\ldots$ для $\alpha=3x$:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\ldots\right)}{x-\left(3x+\frac{(3x)^3}{3}+\frac{2(3x)^5}{15}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2x+\frac{(2x)^3}{3!}-\frac{(2x)^5}{5!}+\ldots}{x-3x-\frac{(3x)^3}{3}-\frac{2(3x)^5}{15}-\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\frac{2^3x^3}{3!}-\frac{2^5x^5}{5!}+\ldots}{-2x-\frac{3^3x^3}{3}-\frac{2\cdot 3^5x^5}{15}-\ldots}\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-1+\frac{2^3x^2}{3!}-\frac{2^5x^4}{5!}+\ldots\right)}{x\left(-2-\frac{3^3x^2}{3}-\frac{2\cdot 3^5x^4}{15}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\underbrace{\frac{2^3x^2}{3!}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2^5x^4}{5!}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}}{-2-\underbrace{\frac{3^3x^2}{3}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2\cdot 3^5x^4}{15}}_{\to 0}-\underbrace{\ldots}_{\to 0}}=\frac{1}{2}$$

Пример 6

Вычислить предел с помощью степенного ряда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=(*)$$

И при такой формулировке задания правила хорошего тона предписывают разложить экспоненту в ряд как можно скорее - ещё в знаменателе. Далее алгоритм работает стандартно: приводим выражение к общему знаменателю, после чего что-нибудь должно сократиться:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}{x\cdot\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\ldots}{x^2\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}-\underbrace{\frac{x}{3!}}_{\to 0}-\underbrace{\ldots}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{x}{2!}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{x^2}{3!}}_{\to 0}+\underbrace{\ldots}_{\to 0}}=-\frac{1}{2}$$

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // *Большая советская энциклопедия* : [в 30 т.] / гл. ред. *А. М. Прохоров*. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.
2. Андронов И. К., А. П. Киселев., «Математика в школе», 1941, № 2
3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4
4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.
5. Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1
6. Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3

References

1. Kiselev, Andrey Petrovich // Great Soviet Encyclopedia: [in 30 volumes] / Ch. ed. A.M. Prokhorov. - 3rd ed. - M.: Soviet Encyclopedia, 1969-1978.
2. Andronov IK, AP Kiselev., "Mathematics at school", 1941, no. 2
3. Margulis A. Ya., Andrey Petrovich Kiselev, "Mathematics at school", 1948, no. 4
4. Depman I. Ya., History of arithmetic, M., 1959.
5. Morgulis A. Ya., Trostnikov V. Legislator of school mathematics // Science and life. 1968. No. 1

6. Pylnev-Rogachev, Luneva MI Servant of the "queen of sciences" // Koltsovsky square. 2002. No. 3