Интегрирование корней (иррациональных функций). Примеры решений

Махсуд Тулқин ўғли Усмонов
maqsudu32@gmail.com
Ташкентский университет информационных технологий
Каршинский филиал

Аннотация: В данной статье проведены простейшие неопределенные интегралы от иррациональных функций, чуть более громоздкие (с разными корнями), и биномиальные интегралы.

Ключевые слова: Интегрирование корней, иррациональные функции, примеры решений, квадратный корень

Integration of roots (irrational functions). Examples of solutions

Mahsud Tulqin oglu Usmonov
maqsudu32@gmail.com
Tashkent University of Information Technologies
Karshi branch

Abstract: In this article, the simplest indefinite integrals of irrational functions, slightly more cumbersome (with different roots), and binomial integrals are carried out.

Keywords: Integration of roots, irrational functions, examples of solutions, square root

Пример 1

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$$

Основной приём решения иррациональных интегралов - это замена переменной, которая избавит от всех корней в подынтегральной функции.

В данном примере нужно провести замену $x = t^2$, то есть, вместо x под корнем у нас окажется t^2. Почему замена именно такая? Потому что $\sqrt{t^2} = t$, и в результате замены корень пропадёт.

Если бы в подынтегральной функции вместо квадратного корня у нас находился $\sqrt[3]{x}$, то мы бы провели замену $x=t^3$. Если бы там был $\sqrt[4]{x}$ - то $x=t^4$ и так далее.

Хорошо, $\sqrt{x}$ у нас превратится в $\sqrt{t^2}=t$. Что произойдет с многочленом $(x+3)$? Сложностей нет: если $x=t^2$, то $(x+3)=(t^2+3)$.

Осталось выяснить, во что превратится дифференциал dx. Делается это так:

Берем нашу замену $x=t^2$ и навешиваем дифференциалы на обе части:

$d(x)=d(t^2)$

$(x)'dx=(t^2)'dt$

$dx=2tdt$

Оформление решения должно выглядеть примерно так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}=(*)$$

Проведем замену: $x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{2tdt}{t(t^2+3)}\overset{(2)}{=}2\int\frac{dt}{t^2+3}\overset{(3)}{=}2\int\frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2}\overset{(4)}{=}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C\overset{(5)}{\underset{t=\sqrt{x}}{=}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\sqrt{\frac{x}{3}}+C,\ \text{где } C=const$$

(1) Проводим подстановку после замены.

(2) Выносим константу за пределы интеграла. Числитель и знаменатель сокращаем на t.

(3) Получившийся интеграл является табличным, готовим его для интегрирования, выделяя квадрат

(4) Интегрируем по таблице, используя формулу $\int\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$.

(5) Проводим обратную замену: если $x=t^2$, то $t=\sqrt{x}$.

Пример 3

Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3}$$

Предварительный анализ подынтегральной функции опять показывает, что лёгкого пути нет. А поэтому нужно избавляться от корня.

$$\int\frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3}=(*)$$

Проведем замену: $x+2=t^2$

За t^2 обозначаем ВСЁ выражение под корнем. Замена из предыдущих примеров $x = t^2$ здесь не годится (точнее, сделать-то её можно, но это не избавит нас от корня).

Навешиваем дифференциалы на обе части:

$d(x+2) = d(t^2)$

$(x+2)'dx = (t^2)'dt$

$dx = 2tdt$

С числителем разобрались. Что делать с $(x-3)$ в знаменателе?

Берем нашу замену $x+2=t^2$ и выражаем из неё: $x = t^2 - 2$

Если $x = t^2 - 2$, то $x - 3 = t^2 - 2 - 3 = t^2 - 5$

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{\sqrt{t^2} \cdot 2tdt}{t^2-5} \overset{(2)}{=} \int \frac{2t^2dt}{t^2-5} \overset{(3)}{=} \int \frac{2(t^2-5)+10}{t^2-5}dt \overset{(4)}{=} \int \left(2 + \frac{10}{t^2-5}\right)dt \overset{(5)}{=} 2\int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} \overset{(6)}{=}$$

$$= 2t + \frac{10}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C \overset{(7)}{=} 2\sqrt{x+2} + \sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right| + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводим подстановку в соответствии с выполненной заменой.

(2) Причесываем числитель. Константу здесь я предпочел не выносить за знак интеграла

(3) Раскладываем числитель в сумму. Еще раз настоятельно рекомендую ознакомиться с первым параграфом урока Интегрирование некоторых дробей. Канители с разложением числителя в сумму в иррациональных интегралах будет предостаточно, очень важно отработать это прием.

(4) Почленно делим числитель на знаменатель.

(5) Используем свойства линейности неопределенного интеграла. Во втором интеграле выделяем квадрат $(\sqrt{5})^2$ для последующего интегрирования по таблице.

(6) Интегрируем по таблице. Первый интеграл совсем простой, во втором используем табличную формулу высокого логарифма $\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C$.

(7) Проводим обратную замену. Если мы проводили замену $x+2=t^2$, то, обратно: $t = \sqrt{x+2}$

Пример 5

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$$

Когда даны разные корни удобно придерживаться следующей схемы решения. Сначала выписываем на черновике подынтегральную функцию, при этом все корни представляем в виде $x^{\frac{a}{b}}$: $\dfrac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$. Нас будут интересовать знаменатели степеней:

$$\frac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$$

Записываем эти знаменатели: 2, 3, 3.

Теперь нужно найти наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 3 - такое число, чтобы оно делилось и на 2 и на 3 (в данном случае), кроме того, это число должно быть как можно меньше.

Очевидно, что наименьшим общим кратным является число 6. Оно делится и на 2 и на 3, кроме того, меньше шестерки ничего не придумать.

Как многие уже догадались, замена в рассматриваемом интеграле будет следующей: $x=t^6$

Оформляем решение:

$$\int\frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}=(*)$$

Проведем замену: $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{(t^6+\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{(t^6)^2})\cdot 6t^5dt}{t^6(1+\sqrt[3]{t^6})}\overset{(2)}{=}6\int\frac{(t^6+t^3+t^4)dt}{t(1+t^2)}\overset{(3)}{=}6\int\frac{(t^5+t^3+t^2)dt}{t^2+1}\overset{(4)}{=}$$

$$=6\int\frac{t^3(t^2+1)+(t^2+1)-1}{t^2+1}dt\overset{(5)}{=}6\int\left(t^3+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\overset{(6)}{=}$$

$$=\frac{6}{4}t^4+6t-6arctgt+C\overset{(7)}{=}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Производим подстановку.

(2) Избавляемся от корней. Выносим константу за знак интеграла. Сокращаем числитель и знаменатель на t^5.

(3) Сокращаем числитель и знаменатель еще на t.

(4) Раскладываем числитель в сумму (как это сделать, уже неоднократно упоминалось).

(5) Почленно делим числитель на знаменатель.

(6) Интегрируем по таблице. При этом константу я снова «прилепил» к каждому из трех слагаемых (можно этого и не делать, момент несущественный).

(7) Проводим обратную замену. Если $x=t^6$, то, обратно: $t=\sqrt[6]{x}$. В ходе обратной замены некоторые корни лучше сразу сократить (обычно это делается

устно). В рассмотренном примере сокращение корней встретилось в первом слагаемом: $t^4 = \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$

Интегрирование биномиальных интегралов

Так называемый биномиальный интеграл имеет следующий вид: $\int x^m (a + bx^n)^p dx$. Такой интеграл берётся в трёх случаях.

1) Случай первый. Самый лёгкий.

Если степень p - целое число.

Например: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2}$

Представим интеграл в стандартном виде (это лучше делать на черновике):

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2} = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Мы видим, что степень $p = -2$ - целая, а, значит, действительно имеет место первый случай.

Смотрим на знаменатели дробей:

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Записываем знаменатели: 2, 5. Находим наименьшее общее кратное этих чисел. Очевидно, это 10: оно делится и на 2 и на 5, кроме того - десятка самая маленькая в этом смысле.

После замены $x = t^{10}$ все корни гарантировано пропадут. Повторюсь, примеров для первого случая не будет, так как они очень похожи на недавно разобранные интегралы.

2) Случай второй

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

Если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то необходимо провести замену $a + bx^n = t^N$, где N - знаменатель дроби p.

Спокойствие, только спокойствие, сейчас во всём разберемся.

Пример 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$$

Представим интеграл в стандартном виде $\int x^m (a + bx^n)^p dx$:

$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = \int x^{-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$. Вообще говоря, формально правильнее было записать $\int x^{-1}(-1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, но перестановка слагаемых в скобках не играет никакой роли.

Выписываем степени:

$m=-1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$

Сразу проверяем, не относится ли наш интеграл к первому случаю?

$p=\frac{1}{2}$ - целое? Нет.

Проверяем второй случай:

$\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$ - целое, значит у нас второй случай

Согласно правилу для второго случая, необходимо провести замену $a+bx^n=t^N$, где N - знаменатель дроби p. В рассматриваемом примере $p=\frac{1}{2}$, и знаменатель этой дроби равен «двойке». Таким образом, чтобы гарантировано избавиться от корня, нужно провести замену $x^2-1=t^2$.

Оформляем решение:

$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = (*)$

Проведем замену $x^2-1=t^2$.

После этой подстановки с корнем у нас будет всё гуд: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{t^2} = t$

Теперь нужно выяснить, во что превратится оставшаяся часть подынтегрального выражения $\frac{dx}{x}$

Берем нашу замену $x^2-1=t^2$ и навешиваем дифференциалы на обе части:

$d(x^2-1) = d(t^2)$

$(x^2-1)'dx = (t^2)'dt$

$2xdx = 2tdt$

$xdx = tdt$

Но вот, незадача, у нас xdx, а нам нужно выразить $\frac{dx}{x}$.

Умножаем обе части на $\frac{1}{x^2}$:

$xdx \cdot \frac{1}{x^2} = tdt \cdot \frac{1}{x^2}$

Таким образом: $\frac{dx}{x}=\frac{tdt}{x^2}$. Уже лучше, но хотелось бы выразить $\frac{dx}{x}$ только через t, а в правой части $\frac{tdt}{x^2}$ - «икс» в квадрате внизу. Что делать? Вспоминаем нашу замену $x^2-1=t^2$ и выражаем из неё нужный нам $x^2=t^2+1$.

Окончательно: $\frac{dx}{x}=\frac{tdt}{x^2}=\frac{tdt}{t^2+1}$.

Собственно, всё готово, продолжаем решение:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{t\cdot tdt}{t^2+1}\overset{(2)}{=}\int\frac{t^2dt}{t^2+1}\overset{(3)}{=}\int\frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1}\overset{(4)}{=}\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\overset{(5)}{=}$$

$$=t-arctgt+C\overset{(6)}{=}\sqrt{x^2-1}-arctg\sqrt{x^2-1}+C,\ \text{где } C=const$$

(1) Проводим подстановку согласно замене.

(2) Записываем компактно числитель.

(3) Раскладываем знаменатель в сумму.

(4) Почленно делим числитель на знаменатель.

(5) Интегрируем по таблице.

(6) Проводим обратную замену: если $x^2-1=t^2$, то $t=\sqrt{x^2-1}$

Пример 9

Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$$

Представим интеграл в стандартном виде $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}=\int x^{-2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Выписываем степени и коэффициенты:

$m=-2$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, $a=4$, $b=1$

1) Не относится ли наш интеграл к первому случаю?

$p=\frac{1}{2}$ - целое? Нет.

2) Проверяем второй случай:

$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$ - целое? Нет.

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ - целое! Значит, у нас третий случай.

Согласно правилу для третьего случая, необходимо провести замену $b+\frac{a}{x^n}=t^N$, где N - знаменатель дроби p. В рассматриваемом примере $p=\frac{1}{2}$, и знаменатель этой дроби равен опять же «двойке». Коэффициенты (будьте внимательны) $a=4$, $b=1$

Таким образом, чтобы гарантировано избавиться от корня, нужно провести замену $1+\frac{4}{x^2}=t^2$.

Оформляем решение:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}=(*)$$

Проведем замену: $1+\frac{4}{x^2}=t^2$.

Разбираемся с корнем. Это труднее, чем в предыдущих случаях.

Сначала из нашей замены $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ нужно выразить x^2:

$$\frac{4}{x^2}=t^2-1\Rightarrow x^2=\frac{4}{t^2-1}$$

Теперь подставляем $x^2=\frac{4}{t^2-1}$ под корень:

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\frac{4}{t^2-1}+4}=\sqrt{\frac{4+4t^2-4}{t^2-1}}=\sqrt{\frac{4t^2}{t^2-1}}=\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$$

На втором этапе выясняем, во что превратится оставшаяся часть подынтегрального выражения $\frac{dx}{x^2}$. Берем нашу замену $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ и навешиваем дифференциалы на обе части:

$$d\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=d\,(t^2)$$

$$(1+4x^{-2})'dx=2tdt$$

$$(0+4\cdot(-2)x^{-3})dx=2tdt$$

$$-\frac{8dx}{x^3}=2tdt$$

$$\frac{4dx}{x^3}=-tdt$$

$$\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{4}tdt$$

$$\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{4}txdt$$

Берем ранее найденное выражение $x^2 = \frac{4}{t^2-1}$ и выражаем $x = \sqrt{\frac{4}{t^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{t^2-1}}$

Окончательно:

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{4}txdt = -\frac{1}{4}t \cdot \frac{2}{\sqrt{t^2-1}} \cdot dt = -\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}$$

В итоге мы выразили через «тэ» и $\sqrt{x^2+4}$ и $\frac{dx}{x^2}$, всё готово для продолжения решения:

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \left(-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}\right) \overset{(2)}{=} -\int \frac{t^2dt}{t^2-1} \overset{(3)}{=} -\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1} = -\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= -\int dt - \int \frac{dt}{t^2-1} = -t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \overset{(4)}{=} -\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-1}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+1}\right| + C \overset{(5)}{=}$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{\sqrt{4+x^2}+x}\right| + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводим подстановку согласно замене.

(2) Упрощаем выражение.

(3) Меняем знак в знаменателе и выносим минус за пределы интеграла (можно было не делать, но так удобнее).

(4) Проводим обратную замену. В третьем случае биномиального интеграла это тоже труднее. Если изначальная замена $1+\frac{4}{x^2} = t^2$, то $t^2 = \frac{x^2+4}{x^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

(5) Избавляемся от четырехэтажности в логарифме.

Использованная литература

1. Киселёв, Андрей Петрович // *Большая советская энциклопедия* : [в 30 т.] / гл. ред. *А. М. Прохоров*. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.

2. Андронов И. К., А. П. Киселев. [Некролог], «Математика в школе», 1941, № 2

3. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4

4. Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

5. Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1

6. Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3

References

1. Kiselev, Andrey Petrovich // Great Soviet Encyclopedia: [in 30 volumes] / Ch. ed. A.M. Prokhorov. - 3rd ed. - M.: Soviet Encyclopedia, 1969-1978.

2. Andronov I.K., A.P. Kiselev. [Obituary], "Mathematics in School", 1941, no. 2

3. Margulis A. Ya., Andrey Petrovich Kiselev, "Mathematics at school", 1948, no. 4

4. Depman I. Ya., History of arithmetic, M., 1959.

5. Morgulis A. Ya., Trostnikov V. Legislator of school mathematics // Science and life. 1968. No. 1

6. Pylnev-Rogachev, Luneva MI Servant of the "queen of sciences" // Koltsovsky square. 2002. No. 3