Панжарадаги уч заррачали модель оператор учун Бирман-Швингер принципи

Гулҳаё Ҳусниддин қизи Умирқулова
Бухоро давлат университети

Аннотация: Локал бўлмаган потенциалга эга учта панжаравий заррачалар системасига мос модель оператор қаралади. Бу операторга мос келувчи Фаддеев тенгламаси ва унинг симметрик варианти қурилади. Модель операторга мос Бирман-Швингер принципи келтирилади ва унинг баъзи тадбиқлари баён қилинади.

Калит сўзлар: модель оператор, панжара, локал бўлмаган потенциал, Фаддеев тенгламаси, симметрик Фаддеев тенгламаси, Бирман-Швингер принципи.

Birman-Shwinger principle for the three-particle model operator on a lattice

Gulhayo Husniddin kizi Umirkulova
Bukhara State University

Abstract: We consider a model operator corresponding to the three lattice particle system with nonlocal potential. The Faddeev equation and its symmetric version are constructed. The Birman-Shwinger principle corresponding to this operator is given and some its applications are described.

Keywords: model operator, lattice, nonlocal potensial, Faddeev equation, symmetric Faddeev equation, Birman-Shwinger principle.

КИРИШ

Панжарадаги учта бир хил ва учта ҳар хил заррачалар системасига мос келувчи модель операторлар (гамильтонианлар ёки энергия операторлари) билан боғлиқ муаммолар қаттиқ жисмлар физикаси, статистик физика, квант майдон назарияси ва замонавий математик физиканинг яна кўплаб соҳаларида учраб туради. Бундай операторларнинг муҳим ва дискрет спектрини ўрганиш масаласи ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг кенг тадқиқ қилинадиган масалаларидан биридир. Эслатиб ўтиш жоизки, панжарадаги учта заррачали системага мос модель операторларнинг муҳим спектрининг жойлашув ўрнини ва тузилишини ҳамда уни ташкил қилувчи кесмалар сонини

(cc) BY

аниқлашда тадқиқ қилинадиган модель операторнинг хос функцияларига мос келувчи Фаддеев тенгламасини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга. Дискрет спектрнинг чекли ёки чексиз тўплам эканлигини аниқлашда эса Фаддеев тенгламасининг симметриклаштирилган вариантидн фойдаланиш қулай ҳисобланади. Дискрет спектр чексиз тўплам бўлган ҳолда унинг асимптотикасини аниқлашда симметриклаштирилган Фаддеев тенгламаси ёрдамида аниқланадиган Бирман-Швингер принципидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Шу сабабли мазкур мақолада дастлаб Фаддеев тенгламаси ва унинг симметриклаштирилган варианти қурилган. Сўнгра Бирман-Швингер принципи баён қилинган ва унинг баъзи тадбиқлари санаб ўтилган.

ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

Мазкур бўлимда биз ўқувчига қулайлик учун мақолада ишлатиладиган асосий тушунчалар билан боғлиқ таъриф, тасдиқ ва теоремаларни келтириб ўтамиз. Маълумотлар асосан J.I.Abdullayev, R.N.G‘anixo‘jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand-2009 номли қўлланмадан олинган.

Операторлар назариясида спектр тушунчаси энг муҳим тушунчалардан биридир. Чизиқли оператор спектрини ўрганиш математик физика учун муҳимдир. Масалан, квант механикасида система Гамильтониани – бу Гильберт фазосидаги ўз-ўзига қўшма оператордир, унинг спектрини ўрганиш система физик хусусиятларини ўрганиш учун муҳимдир. Спектр тушунчасини дастлаб чекли ўлчамли фазолардаги операторлар учун эслатамиз.

Фараз қилайлик, $A:C^n \to C^n$ чизиқли оператор берилган бўлсин. Агар бирор λ сони учун $Ax=\lambda x$ тенглама нолмас $x\in C^n$ ечимга эга бўлса, у ҳолда λ сони A операторнинг хос қиймати дейилади, унга мос келувчи нолмас x ечимга эса хос вектор дейилади. Чекли ўлчамли фазоларда чизиқли операторнинг хос қийматлари тўпламига унинг спектри дейилади. Бунда $A:C^n \to C^n$ чизиқли оператор чегараланган оператор бўлишини эслатиб ўтиш лозим. Агар A оператор чексиз ўлчамли X фазода берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) λ сон учун $Ax=\lambda x$ тенглама нолмас ечимга эга, яъни λ сон A оператор учун хос қиймат, бу ҳолда $A-\lambda I$ га тескари оператор мавжуд эмас;

2) λ сон учун C^n фазонинг ҳамма ерида аниқланган $(A-\lambda I)^{-1}$ оператор мавжуд ва демак, чегараланган;

(cc) BY

3) $(A-\lambda I)^{-1}$ оператор мавжуд, яъни $Ax=\lambda x$ тенглама фақат ноль ечимга эга, лекин $(A-\lambda I)^{-1}$ оператор X нинг ҳамма ерида аниқланмаган ёки $\overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} \neq X$.

Агар $\lambda \in C$ сон учун $A-\lambda I$ га тескари оператор мавжуд бўлиб, у X нинг ҳамма ерида аниқланган бўлса, λ сони A операторнинг регуляр нуқтаси дейилади ва барча регуляр нуқталар тўплами $\rho(A)$ орқали белгиланади.

A операторнинг регуляр бўлмаган барча нуқталари тўплами A операторнинг спектри дейилади ва у $\sigma(A)$ орқали белгиланади.

Барча хос қийматлар тўплами A операторнинг нуқтали спектри дейилади ва $\sigma_{pp}(A)$ билан белгиланади.

Агар λ хос қиймат бўлмаса ва $\overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} \neq X$, яъни $A-\lambda I$ операторнинг қийматлар соҳаси X нинг ҳамма ерида зич эмас. Бундай λ лар тўплами A операторнинг қолдиқ спектри дейилади ва $\sigma_{qol}(A)$ каби белгиланади.

Энди ўз-ўзига қўшма операторлар учун муҳим спектр таърифини келтирамиз.

Агар бирор $\lambda \in \sigma(A)$ сон учун нолга кучсиз яқинлашувчи $f_n \in H$ бирлик векторлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \| (A-\lambda I) f_n \| = 0$$

бўлса, у ҳолда λ сон $A=A^*$ операторнинг муҳим спектрига қарашли дейилади. A операторнинг муҳим спектри $\sigma_{ess}(A)$ каби белгиланади.

Операторнинг нуқтали ва қолдиқ спектрлари ўзаро кесишмайди. Нуқтали ва муҳим спектрлар ўзаро кесишиши мумкин. Хусусан, чексиз каррали хос қийматлар ҳам муҳим спектрга ҳам нуқтали спектрга тегишли бўлади.

Таъкидлаш жоизки, чизиқли чегараланган A операторнинг спектри маркази координаталар бошида ва радиуси $\|A\|$ га тенг ёпиқ доирада сақланади. Агар A ўз-ўзига қўшма оператор бўлса, бу ҳолда унинг спектри $[-\|A\|, \|A\|]$ кесмада ётади.

УЧ ЗАРРАЧАЛИ МОДЕЛЬ ОПЕРАТОР

T^1 - бир ўлчамли тор ва $T^2=T^1\times T^1$ - декарт кўпайтма бўлсин. $L_2^s(T^2)$ орқали T^2 да аниқланган квадрати билан интегралланувчи (умуман олганда комплекс қийматларни қабул қилувчи) симметрик функцияларнинг Ҳилберт фазосини белгилаймиз.

$L_2^s(T^2)$ Ҳилберт фазосида

$$H_{\mu,\lambda} := H_0 - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3 \quad (1)$$

кўринишда аниқланган операторни қараймиз. Бу ерда H_0 - қўзғалмас оператори бўлиб, $u(\cdot,\cdot)$ функцияга кўпайтириш операторидир, яъни

$$(H_0 f)(x,y) = u(x,y) f(x,y);$$

V_α операторлари эса қуйидагича таъсир қилувчи операторлар:

$$(V_1 f)(x,y) = v(y)\int_{T^1} v(t) f(x,t)dt;$$

$$(V_2 f)(x,y) = v(x)\int_{T^1} v(t) f(t,y)dt;$$

$$(V_3 f)(x,y) = \int_{T^1} f(t, x+y-t)dt.$$

Бу ерда $\mu, \lambda -$ таъсирлашиш параметрлари деб аталувчи мусбат сонлар, $v(\cdot)$ $-T^1$ да аниқланувчи ҳақиқий қийматли узлуксиз функция ва $u(\cdot,\cdot)$ $-T^2$да аниқланган ҳақиқий қийматли симметрик узлуксиз функция.

(1) формула билан аниқланган $H_{\mu,\lambda}$ оператор юқорида келтирилган фаразларда чизиқли, чегараланган ва ўз- ўзига қўшма оператор бўлади. Бу тасдиқ функционал анализдаги мос таърифлар ёрдамида текширилади.

МУҲИМ СПЕКТР

$H_{\mu,\lambda}$ операторнинг муҳим спектрини аниқлаш мақсадида $L_2(T)$ Ҳилберт фазосида

$$h_\mu^{(1)}(k) := h_0^{(1)}(k) - \mu v_1,$$

$$h_\lambda^{(2)}(k) := h_0^{(2)}(k) - \lambda v_2,$$

формулалар ёрдамида таъсир қилувчи $h_\mu^{(1)}(k)$, $h_\lambda^{(2)}(k)$, $k \in T$ Фридрихс моделлари оилаларини қараймиз. Охирги формулада

$$\left(h_0^{(1)}(k) f\right)(x) = u(k,x) f(x),$$

$$\left(h_0^{(2)}(k) f\right)(x) = u(x, x-k) f(x),$$

$$(v_1 f)(x) = v(x)\int_T v(t) f(t)dt, \ (v_2 f)(x) = \int_T f(t)dt.$$

Фридрихс моделлари оиласининг баъзи спектрал хоссалари [1-9] ишларда ўрганилган.

$h_0^{(\alpha)}(k), \alpha = 1,2$ қўзғалмас операторнинг v_α, $\alpha = 1,2$ қўзғалиш оператори бир ўлчамли чизиқли, чегараланган ва ўз- ўзига қўшма оператор бўлади.

Шу сабабли, чекли ўлчамли қўзғалишларда муҳим спектрнинг қўзғалмаслиги ҳақидаги Вейл теоремасига кўра $h_\mu^{(1)}(k)$ операторнинг муҳим спектри $h_0^{(1)}(k)$ операторнинг спектри билан, худди шунингдек $h_\lambda^{(2)}(k)$

операторнинг муҳим спектри $h_0^{(2)}(k)$ операторнинг спектри билан устма – уст тушади.

Ҳар бир $\alpha = 1{,}2$ сони учун $h_0^{(\alpha)}(k)$ узлуксиз функцияга кўпайтириш операторининг аниқланишига кўра $\sigma\left(h_0^{(\alpha)}(k)\right) = \sigma_{ess}\left(h_0^{(\alpha)}(k)\right) = [m_\alpha(k); M_\alpha(k)].$ Бу ерда $m_\alpha(k)$ ва $M_\alpha(k)$ сонлари қуйидагича аниқланган:

$$m_1(k) := \min_{x\in T} u(k,x),\ \ M_1(k) := \max_{x\in T} u(k,x),$$

$$m_2(k) := \min_{x\in T} u(x,k-x),\ \ M_2(k) := \max_{x\in T} u(x,k-x).$$

Бундан эса ўз навбатида

$$\sigma_{ess}\left(h_\mu^{(1)}(k)\right) = [m_1(k); M_1(k)]$$

ва

$$\sigma_{ess}\left(h_\lambda^{(2)}(k)\right) = [m_2(k); M_2(k)]$$

эканлиги келиб чиқади.

Ҳар бир фиксирланган $\mu, \lambda > 0$ сонлари ва $k \in T$ учун $C \setminus [m_\alpha(k); M_\alpha(k)]$ соҳада аналитик бўлган

$$\Delta_\mu^{(1)}(k;z) := 1 - \mu \int_T \frac{v^2(t)}{u(k,t)-z} dt;$$

$$\Delta_\lambda^{(2)}(k;z) := 1 - \lambda \int_T \frac{dt}{u(t,k-t)-z};$$

функцияларни киритамиз.

Одатда охирги тенгликлар ёрдамида аниқланган $\Delta_\mu^{(1)}(k;\cdot)$ ва $\Delta_\lambda^{(2)}(k;\cdot)$ функцияларга мос равишда $h_\mu^{(1)}(k)$ ва $h_\lambda^{(2)}(k)$ операторларга мос Фредгольм детерминантлари дейилади ҳамда $h_\mu^{(1)}(k)$, $h_\lambda^{(2)}(k)$ операторларнинг яккаланган чекли каррали хос қийматлари тўпламлари, яъни дискрет спектрлари учун

$$\sigma_{disc}\left(h_\mu^{(1)}(k)\right) = \left\{z \in C \setminus [m_1(k); M_1(k)] : \Delta_\mu^{(1)}(k;z) = 0\right\},$$

$$\sigma_{disc}\left(h_\lambda^{(2)}(k)\right) = \left\{z \in C \setminus [m_2(k); M_2(k)] : \Delta_\lambda^{(2)}(k;z) = 0\right\}$$

тенгликлар ўринли бўлиши келиб чиқади.

$H_{\mu,\lambda}$ операторнинг муҳим спектри $h_\mu^{(1)}(k)$ ва $h_\lambda^{(2)}(k)$ операторларнинг спектри орқали қуйидаги теоремада келтирилган тенгликлар ёрдамида тавсифланади.

1-теорема. (1) формула ёрдамида аниқланган $H_{\mu,\lambda}$ операторнинг муҳим спектри учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sigma_{ess}\left(H_{\mu,\lambda}\right) = \bigcup_{k\in T} \sigma_{disc}\left(h_\mu^{(1)}(k)\right) \cup \bigcup_{k\in T} \sigma_{disc}\left(h_\lambda^{(2)}(k)\right) \cup [m; M],$$

бу ерда

$$m := \min_{k,x\in T} u(k,x),\ \ M := \max_{k,x\in T} u(k,x).$$

$H_{\mu,\lambda}$ оператор муҳим спектрининг айнан бу шаклда аниқланиши унинг навбатдаги хоссаларини, масалан муҳим спектрни ташкил қилувчи кесмалар сонини аниқлашда муҳим аҳамият касб этади.

ФАДДЕЕВ ТЕНГЛАМАСИ

Аввало қуйидаги Ҳильберт фазосини киритамиз

$$L_2^{(2)}(T^1) := \{g=(g_1,g_2) : g_\alpha \in L_2(T^1),\ \alpha=1,2\}.$$

Ҳар бир фиксирланган $z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун $L_2^{(2)}(T^1)$ фазода таъсир қилувчи $T_{\mu,\gamma}(z)$ 2-тартибли блок-операторли матрицани қараймиз:

$$T_{\mu,\gamma}(z) := \begin{pmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Бу ерда $T_{ij}(z) : L_2(T^1)\to L_2(T^1),\ i,j=1,2$ –матрицавий элементлар интеграл операторлар бўлиб, қуйидаги тенгликлар орқали аниқланади:

$$(T_{11}(z)\varphi_1)(x) = \frac{\mu v(x)}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{u(x,t)-z};$$

$$(T_{12}(z)\varphi_2)(x) = \frac{\gamma}{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v(t-x)\varphi_2(t)dt}{u(t,t-x)-z};$$

$$(T_{21}(z)\varphi_1)(x) = \frac{2\mu}{\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)}\int_{T^1}\frac{v(x-t)\varphi_1(t)dt}{u(t,x-t)-z}.$$

Ҳар бир фиксирланган $z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун $T_{\mu,\gamma}(z)$ операторнинг барча матрицавий элементлари Ҳильберт-Шмидт оператори бўлади (ядроси x,t ларнинг функцияси сифатида узлуксиз функция бўлганлиги боис), шу сабабли у компакт оператордир.

Мазкур мақоланинг навбатдаги натижаси қуйидаги теоремадан иборат бўлиб, у $H_{\mu,\gamma}$ ва $T_{\mu,\gamma}(z)$ операторларнинг хос қийматлари ўртасидаги боғланишни ифодалайди.

2-теорема. $z\in C\setminus\sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони $H_{\mu,\gamma}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун 1 сони $T_{\mu,\gamma}(z)$ операторнинг хос қиймати бўлиши зарур ва етарлидир.

Бундан ташқари, z ва 1 хос сонларининг карраликлари устма-уст тушади.

Одатда

$$\varphi = T_{\mu,\gamma}(z)\varphi$$

операторли тенгламага $H_{\mu,\gamma}$ модель оператор хос функцияларига мос Фаддеев тенгламасининг аналоги дейилади. 2-теоремани исботлашда чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари ва Функционал анализ курси усулларидан фойдаланилади. Вейл мезони, 2-теорема ва Фредгольм теоремаси ёрдамида 1-теоремани исботлаш мумкин.

СИММЕТРИКЛАШТИРИЛГАН ФАДДЕЕВ ТЕНГЛАМАСИ

Кўп ҳолларда Фаддеев тенгламасидан фойдаланиш керакли самарани беравермайди. Шу нуқтаи назардан унинг симметриклаштирилган вариантини киритиш ва асосий хоссаларини тадқиқ қилиш мақсадга мувофиқдир. Ҳар бир фиксирланган $z < \min \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун $L_2^{(2)}(T^1)$ Ҳильберт фазосида

$$\hat{T}_{\mu,\gamma}(z) := \begin{pmatrix} \hat{T}_{11}(z) & \hat{T}_{12}(z) \\ \hat{T}_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}$$

каби аниқланган иккинчи тартибли операторли матрицани қараймиз, бу ерда $\hat{T}_{11}(z)$, $\hat{T}_{12}(z)$, $\hat{T}_{12}(z)$ матрицавий элементлар $L_2^{(2)}(T^1)$ Ҳильберт фазосида қуйидагича аниқланган интеграл операторлардир:

$$(\hat{T}_{11}(z)\psi_1)(x) = \frac{\mu v(x)}{\sqrt{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}} \int_{T^1} \frac{v(t)\psi_1(t)}{(u(x,t)-z)\sqrt{\Delta_\mu^{(1)}(t;z)}} dt;$$

$$(\hat{T}_{12}(z)\psi_2)(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta_\mu^{(1)}(x;z)}} \int_{T^1} \frac{v(t-x)\psi_2(t)}{(u(t,t-x)-z)\sqrt{\Delta_\gamma^{(2)}(t;z)}} dt;$$

$$(\hat{T}_{21}(z)\psi_1)(x) = \frac{2\mu}{\sqrt{\Delta_\gamma^{(2)}(x;z)}} \int_{T^1} \frac{v(x-t)\psi_1(t)}{(u(t,x-t)-z)\sqrt{\Delta_\mu^{(1)}(t;z)}} dt \, .$$

Юқоридаги каби ҳар бир фиксирланган $z < \min \sigma_{ess}(H_{\mu,\lambda})$ сони учун $\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)$ операторнинг барча $\hat{T}_{11}(z)$, $\hat{T}_{12}(z)$, $\hat{T}_{12}(z)$ матрицавий элементлари Ҳильберт-Шмидт оператори бўлади (ядроси x,t ларнинг функцияси сифатида узлуксиз функция бўлганлиги боис), шу сабабли у компакт оператордир.

$H_{\mu,\gamma}$ ва $\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)$ операторларнинг хос қийматлари орасидаги муносабатни ифодаловчи қуйидаги теоремани келтирамиз.

3-теорема. $z < \min \sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$ сони $H_{\mu,\gamma}$ операторнинг хос қиймати бўлиши учун $\lambda = 1$ сони $\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)$ оператор учун хос қиймат бўлиши зарур ва етарлидир. Бундан ташқари, z ва 1 хос қийматларининг карралиги устма-уст тушади.

(cc) BY

Эслатма. Агар $z<\min\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$ бўлса, у ҳолда барча $x\in T$ лар учун $\Delta_{\mu}^{(1)}(x;z)>0$ ва $\Delta_{\gamma}^{(2)}(x;z)>0$ бўлади.

Эслатма. Одатда $\psi=\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)\psi$ операторли тенгламага $H_{\mu,\gamma}$ модель оператор хос функцияларига мос симметриклаштирилган Фаддеев тенгламасининг аналоги дейилади.

Фаддеев тенгламаси $H_{\mu,\gamma}$ модель оператор муҳим спектрининг жойлашув ўрни ҳақидаги натижани исботлашда кенг тадбиқга эга. Симметриклаштирилган Фаддеев тенгламаси эса $H_{\mu,\gamma}$ модель оператор дискрет спектрининг чекли ёки чексиз бўлиш шартларини аниқлашда муҳим роль ўйнайди.

БИРМАН-ШВИНГЕР ПРИНЦИПИ

Бирман-Швингер прицирини баён қилишда зарур бўладиган баъзи белгилашларни келтириб ўтамиз. λ сони ва чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма A оператор учун $n(\lambda,A)$ сонини қуйидагича аниқланади:

$$n(\lambda,A):=\sup\{\dim F:(Au,u)>\lambda,\ u\in F,\ \|u\|=1\}.$$

Агар $\lambda>\min\sigma_{ess}(A)$ бўлса, у ҳолда $n(\lambda,A)$ сони чексиз бўлади. Агар $n(\lambda,A)$ сони чекли бўлса, у ҳолда бу сон A операторнинг λ сонидан катта хос қийматлари сонига тенг бўлади. Бунда хос қиймат карралиги билан қўшиб ҳисобланади. $N(\lambda)$ орқали A операторнинг λ сонидан кичик хос қийматлари сонини белгилаймиз. У ҳолда таърифга кўра

$$N(\lambda)=n(-\lambda,-H_{\mu,\gamma}),\ -\lambda>-\min\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$$

тенглик ўринлидир.

Қуйидаги теорема $H_{\mu,\gamma}$ га мос Бирман-Швингер принципини ифодалайди.

4-теорема. $z<\min\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$ сони учун $\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)$ оператор компакт ва z бўйича узлуксиз бўлиб,

$$N(\lambda)=n(1,\hat{T}_{\mu,\gamma}(z))$$

тенглик ўринлидир.

$H_{\mu,\gamma}$ оператор муҳим спектридан чапда жойлашган хос қийматлар сонининг чекли эканлигини исботлашда 4-теоремада келтирилган Бирман-

Швингер принципи ҳамда λ_1,λ_2 ҳақиқий сонлари ва A_1,A_2 компакт операторлар йиғиндиси учун ўринли бўлган Вейл тенгсизлиги деб аталувчи

$$n(\lambda_1+\lambda_2,A_1+A_2)\le n(\lambda_1,A_1)+n(\lambda_2,A_2)$$

қўлланилади.

$H_{\mu,\gamma}$ оператор муҳим спектридан чапда жойлашган хос қийматлар сонининг чексиз эканлигини исботлашда ва хос қийматлар сони учун асимптотик формула олишда $\hat{T}_{\mu,\gamma}(z)$ операторнинг сингуляр қисми ажратилиб, тадқиқ қилинади.

[1-13] мақолаларда панжарадаги учта заррачалар системасига мос турли хил модель операторларнинг муҳим ва дискрет спектрлари Фридрихс моделлари оиласининг спектрал хоссаларидан фойдаланиб ўрганилган. [14-30] ишларда эса умумлашган Фридрихс моделлари оиласи тадқиқ қилинган ҳамда худди Фридрихс моделлари оиласи каби умумлашган Фридрихс моделлари оиласи ҳам кўпи билан учта заррачалар системасига мос операторли матрицаларнинг спектрал хоссаларини ўрганишда муҳим ҳисобланади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. *European science.* 51:2, Part II, pp. 19-22.

2. Умиркулова Г.Х. (2020). Оценки для граней существенного спектра модельного оператора трех частиц на решетке. *ВНО*. 16-2 (94), С. 14-17.

3. Умиркулова Г.Х. (2021). Панжарадаги уч заррачали модель операторга мос канал операторлар ва уларнинг спектрлари. *Scientific progress* 2 (3), С. 51-57

4. Умиркулова Г.Х. (2021). Существенный и дискретные спектры семейства моделей Фридрихса. *Наука и образование сегодня*. 60:1, С. 17-20.

5. Umirqulova G.H. (2021). Uch zarrachali model operatorning xos funksiyalari uchun Faddeev tenglamasi. *Scientific progress*. 2:1, 1413-1420 b.

6. Умиркулова Г.Х. (2021). Местоположение собственных значений двух семейств моделей Фридрихса. *НТО*, 77:2, часть 2, С. 56-60.

7. Umirqulova G.H. (2021). Uch zarrachali model operator xos funksiyalari uchun simmetrik Faddeyev tenglamasi. Scientific progress. 2 (3), С. 406-413.

8. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. *European science.* 51:2, pp. 15-18.

9. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. *Молодой учёный*. № 9, С. 17-20.

10. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. (2020). Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. *Academy*. 55:4, pp. 8-13.

11. Rasulov T.H. (2014). Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian. *Contem. Analysis and Appl. Mathematics*. 2:2, pp. 179-198.

12. Umirqulova G.H. (2021). Qutb kordinatalar sistemasi yordamida Fridrixs modelining xos sonlarini o'rganish. *Science and Education,* 2 (7), 7-17 b.

13. Rasulov T.H. (2010). Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 163:1, pp. 429-437.

14. Дилмуродов Э.Б. (2018). Спектр и квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11, С. 1-3.

15. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, С. 105-106.

16. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, pp. 42-46

17. Dilmurodov E.B. (2020). Discrete Eigenvalues of a 2x2 Operator Matrix. *ArXiv preprin*t arXiv:2011.09650.

18. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. (2021). Ikki kanalli molekulyar-rezonans modeli xos qiymatlarining soni va joylashuv o'rni. *Scientific progress.* 2 (1), 61-69 b.

19. Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2020). Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. *Communications in Mathematical Analysis*, 11:1, pp. 17-37.

20. Muminov M.I., Rasulov T.H. (2014). Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2x2 operator matrix. *Eurasian Mathematical Journal*. 5:2, pp. 60-77.

21. Rasulov T.H. (2010). Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space. *Appl. Math. Inf. Sci.* 4:3, pp. 395-412.

22. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 10:5, pp. 511-519.

23. Расулов Т.Х. (2011). О числе собственных значений одного матричного оператора. *Сибирский математический журнал*, 52:2, С. 400-415.

24. Дилмуродов Э.Б. (2016). Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, С. 7-9.

25. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2019). Analysis of the spectrum of a 2× 2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 11 (2), pp. 138-144.

26. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), С. 368-390.

27. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). Efimov's Effect in a Model of Perturbation Theory of the Essential Spectrum. *Functional Analysis and its Appl.* 37:1, pp. 69-71.

(cc) BY

28. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). A Model in the Theory of Perturbations of the Essential Spectrum of Multiparticle Operators. *Math. Notes.* 73:4, pp. 521-528.

29. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. (2007). On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. *Journal of Statistical Physics,* 127:2, pp. 191-220.

30. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. (2007). The Efimov Effect for a Model Operator Associated with the Hamiltonian of non Conserved Number of Particles. *Methods of Functional Analysis and Topology,* 13:1, pp. 1-16.

References

1. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. European science. 51: 2, Part II, pp. 19-22.

2. Umirkulova G.Kh. (2020). Estimates for the edges of the essential spectrum of the model operator of three particles on a lattice. VNO. 16-2 (94), pp. 14-17.

3. Umirkulova G.X. (2021). The three-particle model in the grid corresponds to the operator channel operators and their spectra. Scientific progress 2 (3), C. 51-57

4. Umirkulova G.Kh. (2021). Essential and discrete spectra of the family of Friedrichs models. Science and education today. 60: 1, pp. 17-20.

5. Umirqulova G.H. (2021). The Faddeev equation for the inherent functions of a three-particle model operator. Scientific progress. 2: 1, 1413-1420 b.

6. Umirkulova G.Kh. (2021). Location of eigenvalues of two families of Friedrichs models. NTO, 77: 2, part 2, pp. 56-60.

7. Umirqulova G.H. (2021). The three-particle model is a symmetric Faddeev equation for operator-specific functions. Scientific progress. 2 (3), C. 406-413.

8. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. European science. 51: 2, pp. 15-18.

9. Rasulov T.Kh., Bakhronov B.I. (2015). On the spectrum of the tensor sum of Friedrichs models. Young scientist. No. 9, pp. 17-20.

10. Kurbonov G.G., Rasulov T.H. (2020). Essential and discrete spectrum of the three-particle model operator having tensor sum form. Academy. 55: 4, pp. 8-13.

11. Rasulov T.H. (2014). Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian. Contem. Analysis and Appl. Mathematics. 2: 2, pp. 179-198.

12. Umirqulova G.H. (2021). Study the unique numbers of the Friedrichs model using the polar coordinate system. Science and Education, 2 (7), 7-17 p.

13. Rasulov T.H. (2010). Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics. 163: 1, pp. 429-437.

14. Dilmurodov E.B. (2018). Spectrum and quadratic numerical range of the generalized Friedrichs model. Young Scientist, 11, pp. 1-3.

15. Dilmurodov E.B. (2017). Numerical image of the multidimensional generalized Friedrichs model. Young Scientist, 15, pp. 105-106.

16. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. Scientific reports of Bukhara State University, 1, pp. 42-46

17. Dilmurodov E.B. (2020). Discrete Eigenvalues of a 2x2 Operator Matrix. ArXiv preprint arXiv: 2011.09650.

18. Tosheva N.A., Ismoilova D.E. (2021). Number and location of the characteristic values of the two-channel molecular resonance model. Scientific progress. 2 (1), 61-69 b.

19. Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2020). Analysis of the discrete spectrum of the family of 3x3 operator matrices. Communications in Mathematical Analysis, 11: 1, pp. 17-37.

20. Muminov M.I., Rasulov T.H. (2014). Infiniteness of the number of eigenvalues embedded in the essential spectrum of a 2x2 operator matrix. Eurasian Mathematical Journal. 5: 2, pp. 60-77.

21. Rasulov T.H. (2010). Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space. Appl. Math. Inf. Sci. 4: 3, pp. 395-412.

22. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 10: 5, pp. 511-519.

23. Rasulov T.Kh. (2011). On the number of eigenvalues of one matrix operator. Siberian Mathematical Journal, 52: 2, pp. 400-415.

24. Dilmurodov E.B. (2016). Quadratic numeric image of one 2x2 operator matrix. Young Scientist, 8, pp. 7-9.

25. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2019). Analysis of the spectrum of a 2 × 2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 11 (2), pp. 138-144.

26. Rasulov T.Kh., Dilmurodov E.B. (2020). Infinity of the number of eigenvalues of operator (2x2) -matrices. Asymptotics of the discrete spectrum. TMF. 3 (205), pp. 368-390.

27. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). Efimov's Effect in a Model of Perturbation Theory of the Essential Spectrum. Functional Analysis and its Appl. 37: 1, pp. 69-71.

28. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). A Model in the Theory of Perturbations of the Essential Spectrum of Multiparticle Operators. Math. Notes. 73: 4, pp. 521-528.

(cc) BY

29. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. (2007). On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. Journal of Statistical Physics, 127: 2, pp. 191-220.

30. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. (2007). The Efimov Effect for a Model Operator Associated with the Hamiltonian of non Conserved Number of Particles. Methods of Functional Analysis and Topology, 13: 1, pp. 1-16.

(cc) BY