

Икки жинсли популяция ва унинг математик модели хақида

Хайдар Раупович Расулов

xrasulov71@mail.ru

Мехринигор Хайдаровна Раупова

m.h.raupova@buxdu.uz

Феруза Юсуф қизи Яшиева

Бухоро давлат университети

Аннотация: Мақолада икки жинсли популяция ва унинг тавсифи, популяция жараёнларини ўрганишда қўлланиладиган дискрет вақтли квадратик стохастик операторлар ва уларнинг узлуксиз вақтли аналоги ҳақида маълумотлар келтирилган. Мисол сифатида қаралаётган икки жинсли популяциянинг динамикаси таҳлил қилинган.

Калит сўзлар: Икки жинсли популяция, квадратик стохастик оператор, генотип, фенотип, гетерозигота, гомозигота, уруғланиш.

About bisinous population and its mathematical model

Khaydar Raupovich Rasulov

xrasulov71@mail.ru

Mehrinigor Khaydarovna Raupova

m.h.raupova@buxdu.uz

Feruza Yusuf kizi Yashieva

Bukhara State University

Abstract: The paper provides information on the bisexual population and its description, discrete time quadratic stochastic operators used in the study of population processes, and their continuous time analogs. The dynamics of the bisexual population considered as an example is analyzed

Keywords: Bisexual population, quadratic stochastic operator, genotype, phenotype, heterozygote, homozygote, fertilization.

Энг аввало популяция тушунчаси ҳақида фикр юритамиз. Популяция (лот. *populus* - гуруҳ, уюшма, халқ) - эркин чатиша оладиган (ёки чатишиш имкониятига эга бўлган), аниқ яшаш ареалини эгаллаган ва маълум даражада замон ва маконда бир-бирига ўзаро таъсир кўрсатадиган организмлар гуруҳи.

Популяциядаги генетик ўзгаришлар турларнинг келиб чиқиши, янги ўсимлик навлари, ҳайвон зотларини яратиш ва бошқалар асосини ташкил қилади. «Популяция» терминини даниялик генетик В.Иогансен генетик жиҳатдан бир хил бўлмаган индивидлар гуруҳини соф линия (генетик жиҳатдан бир хил бўлган гуруҳ) дан фарқ қилиш учун таклиф этган (Википедия материаллари).

Табиатда популяциянинг турли хил типлари учрайди: ёпиқ; панмиктик; менделча ва мувозанатланган популяция. Фанда мавжуд бўлган идеал популяция тушунчаси табиатда учрамайди ва у фақат математик моделларда ҳисобга олинади. Чунки математик моделларни қуришда барча параметрларни ҳисобга олиш ўта мураккаб масалаларга олиб келади ва уни ўрганиш ишлари ҳам бир қатор қийинчиликлар туғдиради. Масалан, балиқлар популяцияни ўрганиш жараёнида уларнинг аралашиб кетишига географик (сув ҳавзаси, тоғ, ўрмон, чўл), биологик (жинсий аппаратнинг тузилишида кўйиқиш ва уя қуриш), экологик омиллар таъсир кўрсатишини инобатга олиш катта қийинчиликлар туғдиради. Буларнинг барчаси бу популяциянинг математик моделини қуриш учун муаммоли масаладир. Шунинг учун, математик моделларни тузишда бир қанча параметрларни инобатга олишда ва уларни ҳисоблашда турли фаразлар (шунингдек, идеаллаштиришлар) киритилади.

Математик моделлар оддий дифференциал тенгламалар системалари ва тенгсизликлар йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ечимлари ёрдамида у ёки бу омилнинг таъсир кучи ўзгаришини олдиндан айтиб бериш мумкин. Масалан популяция жараёни оддий дифференциал тенгламалар системалари орқали ифодаланган бўлса, бу каби тенгламаларни сифатий таҳлил қилиш орқали керакли натижаларни олиш мумкин.

Математик моделларда популяциянинг микдорий динамикаси унинг жинсий ва ёш тузилмаси, ташқи муҳит таъсири, эволюциянинг ҳар хил омиллари таъсирида ўтадиган генетик шакл ва одамзод фаолияти натижалари билан боғлаб ўрганилади. Жонсиз оламда динамик жараёнлар жуда кўп учратилади. Уларни моделлаштириш ҳам осон. Аммо тирик организмлар учун динамик моделлар яратиш нисбатан анча қийин. Шунинг учун динамик моделлар яратишдан аввал статик моделлар билан шуғулланилади, яъни бир қатор омиллар идеаллаштириб олинади, айримлари инобатга олинмайди. Статик моделларга ўсимлик баргларининг жойлашиш тартиби ёки моллюска чиғаноқларининг тузилишини спираль чизиқлар қонунияти ёрдамида тушунтиришга ҳаракат қилиш мисол бўлади.

Динамик моделлар шахснинг ўсишига оид бўлиб, уларни бельгиялик олим Адольф Кетлс тузган. Умуман олганда модель воқеликни аниқ акс эттириш ва унинг келиб чиқиш қонуниятларини сақлаб қолиши керак. Модель тузганда индивидларнинг туғилиш ва тирик қолиш механизмларини популяциядаги ички

алоқаларга боғлаш, популяция кўрсаткичларини эса биотик ва абиотик муҳит орқали аниқлаш керак. Бундан ташқари, индивидларнинг генетик хусусиятлари ҳам муҳим роль ўйнайди. Индивидлар генотиби насллар сонига, кўпайиш жараёнига катта таъсир кўрсатади.

Популяция ўзгарувчан бўлгани учун олимларни фақат унинг сони ва зичлигининг маълум ўзгариши эмас, балки қандай омиллар таъсирида ўзгариши, яъни динамикаси ҳам қизиқтиради. Популяциянинг динамик тавсифи (ўсиш ва ўсиш тезлиги) ни туғилиш, маҳсулдорлик, нобуд бўлиш, ҳаётчанлик, эмиграция ва иммиграция кабилар белгилайди. Ҳақиқий популяцияларда кўпайиш ва ўлим даражаси турли гуруҳларда турлича бўлади. Масалан, ҳашаротлар тухум қўяди ва душманлари личинкаларни ўлдириб юборади, бундан ташқари, уларга атроф-муҳитдаги метаболит маҳсулотлар, каннибализм ва захарланишлар, ёш босқичлари ва уларнинг интенсивлиги таъсир кўрсатади.

Шунингдек, популяциянинг ҳар бир гуруҳи ўзига хос кўпайиш кўрсаткичларига эга бўлади. Тирик мавжудотларнинг ривожланиши ҳар хил жараёнларда турли йўллар билан намоён бўлади. Бунда туғилиш, ўсиш, индивидуаллик, индивидларнинг ўлими, ташқи муҳит ва шу кабилар таъсир қилади. Бу омилларни ҳисобга олмай туриб тўғри модель тузиш мумкин эмас. Математик моделлаш биологик ва экологик ҳодисаларни аниқ шарҳлаш ва келажак тадқиқотлар режасини тузишда қудратли омил сифатида катта аҳамиятга эга.

Биологияда популяция эволюциясининг математик модели квадратик стохастик операторлар орқали ифодаланади. Квадратик стохастик операторлар назариясида оддий ва ностандарт масалалар ҳамда ечилмаган масалаларнинг кўплиги математик нуктаи-назардан катта қизиқиш уйғотади. Квадратик стохастик оператор тушунчаси биринчи марта С.Н.Бернштейннинг «Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности» асарида қўлланилган. Ю.И.Любичнинг «Математические структуры в популяционной генетике» (Киев, 1983 йил) асарида эса икки жинсли популяциянинг математик моделини (биологик жараёнлар ёртилган ҳолда) тузишнинг схемаси келтирилган.

Организмлардаги наслдорликнинг фундаментал бирлиги «ген» деб аталувчи дискрет воситалардир. Бу фундаменталликни илк бор Грегор Мендель кузатган. Мендель ўз тажрибаларида кузатган ирсият ва ўзгарувчанлик статистикасини тушунтириб бериш мақсадида классик генетиканинг асосий тушунчаси бўлган генга «ирсий омиллар» деб ном беради. Ҳозирги кунда ген бу ипсимон нуклеин кислотанинг (ДНК ёки РНК) маълум бир қисми бўлиб, ирсий материалнинг элементар бирлиги ҳисобланади.

Организмнинг ҳар бир ҳужайра ядроси ўзида ката миқдорда генлар сақлайди (инсон 10^7 миқдорда). Бу генлар йиғиндиси ҳужайранинг генотиби дейилади. Организмнинг барча ҳужайралар генотиби (жинсий ҳужайралар (гаметалар) ва айрим махсус ҳужайралар генотиби бундан мустасно) организм ривожланадиган уруғланган тухум ҳужайра - зиготанинг генотиби билан бир хил бўлади. Бу бир хиллик ҳужайралар бўлиниши - митоз жараёнининг механизмини таъминлайди. Яъни, митоз жараёнида ҳар бир ген икки марта кўпайиб, ҳосил бўлган геннинг икки нусхаси қиз ҳужайраларга тенг тақсимланади.

Ҳужайрада генлар хромосомаларда жойлашган. Битта хромосомада жойлашган генлар бирикув гуруҳларини ҳосил қилади ва наслдан - наслга боғланган ҳолда ўтади. Бу гуруҳлар тўплами ва миқдори ҳар бир тур организм учун ўзига хосдир. Айрим жинсли организмларда эркак ва урғочи организмларнинг бир-биридан фарқ қилувчи хромосомалари жинсий хромосомалар дейилади. Бундай хромосомалар гетерохромосомалар дейилади ва лотинча X ва Y ҳарфлари билан белгиланади. Кўпчилик турларда урғочи организмда бир хил — XX жинсий хромосомалар, эркак организмда эса ҳар хил — XY хромосомалар кузатилади. Қолган ҳамма хромосомалар *аутосомалар* дейилади (улар эркак ва урғочи организмларда бир хил бўлади).

Геннинг хромосомадаги жойлашган ўрни *локус* деб аталади. Схематик тарзда хромосомани тўғри чизиқ сифатида тасаввур қилсак, локуслар шу чизиқни кетма - кет жойлашган сегментларидир. Гомолог хромосомаларнинг бир хил локусда жойлашган генлар аллель генлар деб аталади. Аллель генлар тўсатдан бир бирига ўтиб қолиши мумкин. Бу ҳолат *мутация* деб аталади. Мутация ўз навбатидан янги аллелларни ҳосил қилиши мумкин.

Тегишли локусларни аниқлаш орқали, аллель генлар бир хил локусга тегишли ёки бу локуснинг аллеллари деб айта оламиз. Бундай ҳолда локус хромосомага эмас бирикув гуруҳига тегишли бўлади. Битта бирикув гуруҳига тегишли бўлган икки локус *бириккан* деб аталади. Локус бирикув гуруҳига қараб аутосомага ёки X ёки Y хромосомага бириккан дейилади. X ва Y хромосомага бириккан локуслар жинсий хромосомага бириккан бўлади ва улар XY бирикув гуруҳи деб аталиб, бу ҳолатда X ва Y хромосомалар гомологик хромосомалар дейилади.

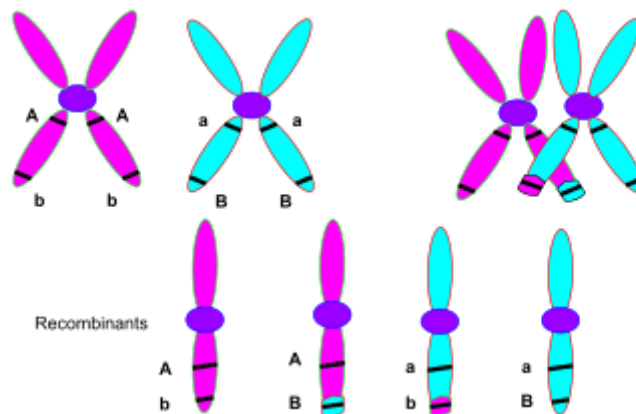
Ҳар бир локус камида иккита аллель ген сақлайди. Бунда улар диаллел деб аталади, уч ва ундан ортиқ ген бўлса полиаллел деб аталади. N та гомологик хромосомалар тўплами N — плоид деб аталади (бу йерда N — плоиднинг тартиби). $N = 1$ бўлганда гаплоид тўплам, $N = 2$ бўлганда диплоид тўплам, $N = 3$ бўлганда триплоид тўплам ва ҳоказо номланади. $N > 2$ бўлса полиплоид тўплам деб ҳам аташ мумкин.

Ҳар бир ҳужайра ўзида аутосома ва жинсий хромосомада жойлашган камида битта бирикув гуруҳини сақлайди. Яъни аутосомаларда N_1, \dots, N_r , жинсий хромосомаларда N_x, N_y кўринишида белгилаб олсак, $N_1 = 1, \dots, N_r = 1, N_x + N_y = 1$ бўлса гаплоид ҳужайра, $N_1 = 2, \dots, N_r = 2, N_x + N_y = 2$ бўлса диплоид ҳужайра дейилади. Диплоид ҳужайраларда иккита X хромосома яъни $N_x = 2, N_y = 0$ ҳолда ёки битта X ва битта Y хромосома $N_x = 1, N_y = 1$ бўлади, аммо бир вақтнинг ўзида иккита Y хромосома комбинанцияси $N_x = 0, N_y = 2$ бўлмайди. Гаплоид ҳужайрада эса ё X ё Y хромосома бўлади. Оддийроқ қилиб айтганда гаметалар гаплоид тўпламли, зигота эса диплоид тўпламли бўлади. Диплоид тўпламли зиготада гомологик хромосомаларга тегишли бўлган лакусларга бир хил генлар жўйлашган бўлса, бундай зигота *гомозигота*, ҳар хил генлар жойлашган бўлса *гетерозигота* дейилади.

Тўлиқ генотип билан ишлаш қийинчиликлар туғдиради, шунинг учун унинг маълум бир қисмидан-локусидан фойдаланилади. Масалан, Менделда битта диаллел аутосома инобатга олинган, аллеллар A, a гаплоид гаметалар A ва a генотипларга эга бўлса, зигота AA ёки aa кўринишида бўлади. Бунда AA ёки aa -гомозигота, Aa – гетерозиготадир.

Жинсий усул билан кўпаювчи ҳар қандай организм «она» ва «ота» дан ҳосил бўлади. Унинг генотипининг шаклланишида ота-она генотипининг ролини ўрганамиз. Бу жараёни ўрганиш учун мейоз ва уруғланиш ҳодисаларини тушунишимиз керак. Бунда ҳужайра ядроси - икки хил даражада биринчи ҳолатда зигота, иккинчи ҳолатда эса гамета кўринишида бўлади.

1. *Мейоз* - ота-она зиготадан гаметаларнинг ҳосил бўлиш жараёни. Бу жараёнда гомологик хромосомалар иккига бўлиниб, қиз ҳужайраларига ўтади. Бунда ҳосил бўлган гаметалар гаплоид бўлади. Бу ерда ўзгарувчанлик юзага келиши учун кўп имкониятга эга бўлиш мумкин (инсонда 2^{23} та). Бу ҳолат яна кроссинговер жараёни туфайли яна бир неча бор ортади.



1-расм. Оддий кроссенговер схемаси

Кроссенговерда гомологик хромосомалар иккига бўлинишдан олдин бир хил жойдан бўлиниб, мос қисмлар билан алмашилиб, ўз ҳолатига қайтишади.

Юқоридаги 1- расмга оддий кроссенговернинг схемаси берилган. Бир мейоз жараёнидан кроссенговер ҳодисасини бир неча мартаба қўриш мумкин.

2. *Уруғланиш*. Бу жараёнда эркалик жинсий хужайра (уруғ хужайра, сперматозоид, спермий) нинг урғочи (тухум) хужайра билан қўшилиб, зигота ҳосил қилиши. Зиготадан янги организм ривожлана бошлайди.

Энди генотипнинг фенотипга таъсирини кўриб чиқамиз.

Фенотип - организмнинг ҳамма хусусиятлари ва белгилари йиғиндиси ҳисобланади. Яъни жинси, ранги, бўй узунлиги, тана тузилиши ва ҳоказо. Шу тартибда ҳар бир организм маълум бир белгилари билан ўзининг қайси турга киришини намоён қилади.

Генотипнинг муҳит билан ўзаро таъсири натижасида юзага чиқадиган фенотипи генетиканинг фундаментал асоси бўлган *ген бошқарувини* тушунтириб беради. Ген бошқаруви бу генларнинг ўзаро таъсири асосида фенотипнинг шаклланишидир.

Биламизки, белгилар барча генотип орқали аниқланмайди, балки маълум бир қисми етарли. Масалан юқорида айтилганидек, урғочи ва эркалик организмлар кариотипини ситогенетик анализ қилиб уларнинг фақат бир жуфти фарқ қилиши аниқланган. Бундай хромосомалар *гетерохромосомалар* дейилади ва латинча *X* ва *Y* ҳарфлари билан белгиланади. Кўпчилик турларда урғочи организмда бир хил *XX* жинсий хромосомалар, эркалик организмда эса ҳар хил - *X**Y* хромосомалар кузатилади. Қолган ҳамма хромосомалар *аутосомалар* дейилади (улар эркалик ва урғочи организмларда бир хил бўлади). Урғочи жинс кариотипида жинсий хромосомалар бир хил бўлади, улар бир хил гаметаларни ҳосил қилгани учун *гомогаметали* дейилади. Эркаликнинг жинсий хромосомалари ҳар хил бўлиб, икки хил гаметаларни ҳосил қилганлиги учун *гетерогаметали* дейилади. Демак, она организм ўзининг *XX* хромосомаларининг бирини ҳар бир фарзандига беради, эркалик организм эса *X**Y* хромосомаларини *X* - қизга, *Y* - ўғилга беради. Бундай ҳолда боланинг жинси фақат эркалик организмга боғлиқлигини кўришимиз мумкин.

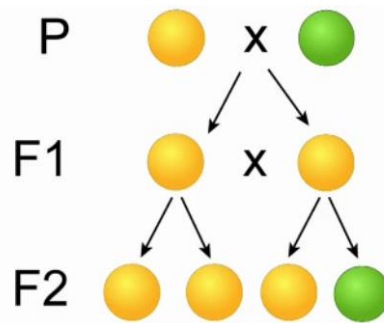
Мендель нўхатлар устида тажрибалар олиб борган. Нўхат ўсимлиги ўз-ўзидан чангланади, жуда кўп алтернатив белгиларга эга (масалан, донининг шакли, силлиқ ёки ғадир-будур, ранги сариқ яшил ва бошқалар). Нўхатларни кўп марта ўз-ўзидан чатиштириш натижасида Мендель соф линияларни келтириб чиқарди. Уларнинг ўзаро дурагайлаб кейинги авлодларда белгилар ирсиятланишини таҳлил қилди.

Ирсият қонуниятларини ўрганишни Мендель монодурагай чатиштиришдан, яъни фақат бир жуфт белгиси билан фарқ қилувчи ота-оналарни дурагайлашдан бошлади. Сариқ ва яшил нўхатларни чатиштирганда, биринчи авлод дурагайлари ҳаммаси бир хил, яъни сариқ рангда бўлади. Бу

тажрибадан биринчи авлод дурагайлариининг бир хиллиги қонуни келиб чиқади. Биринчи авлодда юзага чиққан белги доминант (лотинча «доминанс» - «устинлик қилиш») маъносини беради, намоён бўлмаган белги эса рецессив (лотинча ресессус - чекиниш) деб аталади. Бир жуфт белги генлари бир хил ҳарф билан доминант белги гени катта, рецессив белги гени эса кичик ҳарф билан белгиланади. Бу тажрибадаги сариқ белгини юзага чиқарувчи ген *A* ҳарфи билан, яшил ранг гени *a* ҳарфи билан белгиланади. Натижада, фенотипи жиҳатидан 4*A* (100%) сариқ, генотипи жиҳатидан 4*Aa* (100%) гетерозиготали авлод келиб чиқади.

Биринчи авлод дурагайлари ўзаро чапиштирилганда иккинчи авлодда ҳам доминант, ҳам рецессив белгиларнинг намоён бўлганлигини кўрамиз, яъни белгилар ажралиши кузатилади. Бу тажрибадан Менделнинг иккинчи қонуни келиб чиқади: бир жуфт бир-бирини инкор қилувчи белгилар билан фарқ қилувчи организмлар ўзаро чапиштирилганда кейинги авлодда белгилар фенотип бўйича 3 : 1, генотипи бўйича 1 : 2 : 1 нисбатда ажралади. Бу қонун ажралиш қонуни деб аталади .

Шундай қилиб гетерозиготали организмларда фақат доминант белгилар юзага чиқади. Аллель генлар бир-бирлари билан қўшилиб кетмайдилар. Бу хусусиятга асосланиб Мендель «гаметалар софлиги» номли гипотезасини яратди ва кейинчалик бу гипотеза ситологик жиҳатдан асосланди ва генетика қонунига айланди (2-расм).



2-расм. Менделнинг биринчи ва иккинчи қонунинг схемаси

Кўпинча генлар иккитадан кўпроқ аллелларга эга бўлиши мумкин. Бу ҳолат кўп аллеллик деб аталади. Кўп аллелликка бошқа мисол қилиб қон гуруҳлари аллелларини келтириш мумкин. Одамдаги *O, A, B, AB* қон гуруҳларини I^O, I^A, I^B аллелларнинг ўзаро таъсири белгилайди. Яъни, *A* ва *BO* га нисбатан доминант ҳисобланади, *A* билан *B* бир-бирига таъсир етмайди. Шунинг учун 4 хил фенотип юзага келади: $O = \{I^O I^O\}, A = \{I^A I^A, I^A I^O\}, B = \{I^B I^B, I^B I^O\}$ ва $AB = \{I^A I^B\}$. Агар ота-она *O* қон гуруҳига эга бўлса, уларнинг фарзандлари фақат шу қон гуруҳига эга бўлади. Агар ота *A* қон гуруҳига эга бўлса, она қандай қон гуруҳига эга бўлишидан қатъий назар фарзанд *O* ёки *B*

қон гуруҳига эга бўлмайди. Шунга асосан юридик жиҳатдан оталик ҳуқуқини текшириш мумкин.

Одам қонигаги резус омил – Rh ўндан ортиқ аллел генларни сақловчи аутосома локусида жойлашган. Шундан саккизтаси фенотипда аниқ намоён бўлади. Европаликларнинг 85%(ҳинду ва осиеликларнинг 99%) резусга эга, шунинг учун улар резус-мусбатдир (Rh^+). Резуси бўлмаган қолган 15% (африкаликларнинг 7%) кишилар резус-манфий (Rh^-) ҳисобланади. Статистик бу ҳисоблар шуни кўрсатадики резус омилнинг 8 вариантдан фақат иккитаси фенотипда намоён бўляпти, демак бу локусда яна бошқа генлар ҳам мавжуд. Бир локус орқали аниқланадиган белгилар оддий белгилар, бир нечта локус орқали аниқланадиган генлар мураккаб белгилар дейилади.

Генларнинг статистик таъсирларини организмларнинг умумий жамоаларида кўришимиз (бир турга кирувчи) мумкин. Бундай жамоаларни популяция деб атаймиз. Биологияда очиқ ва ёпиқ популяциялар фарқланади. Очиқ популяцияда миграция қилиш имкони мавжуд, яъни бу популяцияга бошқа популяция вакиллари (шу тур популяцияси) кириши ёки чиқиши мумкин. Ёпиқ популяцияда миграция мумкин эмас, бу ерда янги организм фақат мутация асосида пайдо бўлиши мумкин.

Айни даврда бизга миграция қилиш ёки қилолмаслик муҳим эмас, балки мигрантларнинг кириш ёки чиқиш баланси яъни очиқ популяцияларда ёпиқлик эффекти муҳимдир. Биз эффектив ёпиқ популяцияларни ўрганамиз. Популяция яшаб турган жой ареал, яшаш муҳити (озуқа, об-ҳаво, ареалнинг характеристикаси ва ҳоказо) эса экологик ниша дейилади.

Популяцияни фақат макон эмас балки вақт ҳам чегаралайди. Демак, ҳар бир популяция маълум бир муддатда мавжуд бўлади. Бунга сабаб жуфтлашиш орқали кечадиган репродукциядир. Жуфтлашиш эркин ёки маълум бир чегаралар асосида киради. Масалан, инсонлар орасида ота-оналар ва фарзанд ўртасидаги ёки туғишган опа укалар орасидаги никоҳ мумкин эмас.

Бутун популяция макон ва замонда дискрет авлодлардан $F_0, F_1, F_2 \dots$ иборат деб ҳисоблаш мумкин. F_{t+1} – зотлар тўплами, F_t – уларнинг ота-онаси, F_0 эса фиксирланган. Бундай ҳолда бу популяция ёпилмайди. Умуман олганда F_{t+1} нинг ота-онаси F_i, F_j ($i, j \leq t$) авлодидандир.

Ҳар бир популяция F_t – авлоди S_t миқдор бирлиги билан ифодаланади. Агар бу бирлик катта бўлса, популяция тарифи статистик кўриниш олади. Биз $S_t = \infty$ кўринишида популяцияни ўрганамиз. Бу ҳолда популяцияни тушунтириш учун ҳар бир тур организмнинг авлодлар ҳолатидан фойдаланамиз.

Популяциянинг турларга бўлиниши дифференциация деб аталади. Бунга оддий мисол сифатида жинсий дефференциацияни келтириш мумкин. Ҳар

қандай бошқа дифференциация икки жинсли популяцияда жинсий дефференциация мос келиши керак, яъни барча бир типли организмлар битта жинсга таъалуқлидир. Шундай экан урғочи ва эркак типлар ҳақида гапирсак бўлади. Жинсга боғлиқ бўлмаган икки жинсли популяциялар аутосом популяциялар дейилади. Баъзи ҳолларда тур белгилари аутосомалар орқали бошқарилади. Бундай ҳолда жинсий дефференциация популяцияни икки бир хил қисмга ажратади. Яъни икки жинс учун генотип, тур белгиси ва ген бошқарувлари бир хил бўлади.

Эволюция назарияси генотип дифференциация муҳим рол ўйнайди. Генотип дифференциация - бу популяция генотипини локуслар ёки локуслар системаси орқали бўлиниши тушунилади. Генотип дифференциациядан ташқари фенотип дифференциация ҳам мавжуд, аммо у наслдан - наслга ўтмайди.

Популяция эволюцияси (ёки динамика) кўпайиш ва табиий танланиш натижасида уни ҳолатининг авлоддан - авлодга ўзгаришидан иборат. Табиий танланиш - организмлар эволюциясининг асосий ҳаракатлантирувчи омилдир, яъни яшаш учун курашнинг натижаси бўлиб, фойдали индивидуал ўзгаришларга эга бўлган организмларнинг яшаб, найел колдириши, фойдасиз ўзгаришларга эга бўлган организмларнинг еса қирилиб кетиши, яъни мослашган формаларнинг яшаб қолиши ва мослашмаган формаларнинг нобуд бўлишидан иборат биологик жараён. Агар келтирилганларнинг барча омиллари инобатга олинса, бир мунча қийин математик модель тузилади.

Шу назариядан фойдаланиб, умумий эволюция тенгламаси қуйидагича куриб олинади. Фараз қиламиз, қаралаётган популяция икки жинсли бўлсин. $\mathcal{F} = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ – аёл типи тўплами, $\mathcal{W} = \{M, \dots, M_\nu\}$ эркаклар типи тўплами. $n + \nu$ популяциянинг ўлчами. Популяциянинг ҳолати деб \mathcal{F} ва \mathcal{W} тўпламлардаги эҳтимолликлар тақсимооти $x = (x_1, \dots, x_n)$ ва $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ жуфтлигига айтилади:

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1; y_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\nu} y_k = 1.$$

Δ^{n-1} – $(n - 1)$ ўлчамли $\Delta^{\nu-1}$ – $(\nu - 1)$ ўлчамли симплексларнинг декарт кўпайтмаси $S = \Delta^{n-1} \times \Delta^{\nu-1}$ популяциянинг ҳолатлар фазоси ҳисобланади.

F авлоддаги ихтиёрий $z = (x, y)$ ҳолатда F' чатишув ва табиий танланиш натижасида бир қийматли $z' = (x', y')$ ҳолат аниқланса, бу популяциянинг дифференциацияси ирсий дейилади.

$$z' = Vz \quad (z \in S)$$

тенглама билан аниқланадиган $V: S \rightarrow S$ акслантириш эволюцион оператор дейилади, тенглама эса популяциянинг эволюция тенгламаси деб аталади. Бу акслантириш координаталарда қуйидаги тенгламалар системасига айланади:

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_v) \quad (1 \leq i \leq n, \\ y'_k &= g_k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_v) \quad (1 \leq k \leq v. \end{aligned}$$

Энди ўзбек олимлари томонидан киритилган икки жинсли популяцияни ифодаловчи квадратик стохастик операторни [1] ҳақида маълумотлар келтирамиз. Эркин популяциянинг квадратик стохастик операторлари қуйидаги маънога эга: фараз қиламиз, эркин популяция m та элементдан иборат бўлсин. У ҳолда

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}, \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

тўплам $(m - 1)$ – ўлчамли симплекс дейилади.

S^{m-1} симплексни ўз-ўзига акслантирувчи квадратик стохастик оператор $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$,

$$V: x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, k = 1, \dots, m$$

кўринишга эга бўлади, бунда, $p_{ij,k}$ – ирсийлик коэффициенти ва

$$p_{ij,k} \geq 0, \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} = 1, i, j, k = 1, \dots, m.$$

Ушбу квадратик стохастик оператор $x^{(0)} \in S^{m-1}$ учун $\{x^{(n)}\}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$, траектория $x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Ифода орқали топилади.

Квадратик стохастик операторлар бўйича олиб борилган изланишлар масаладан келиб чиқиб, $p_{ij,k} = 0$, агар $k \notin \{i, j\}$ шarti остида ўрганилган.

Ушбу мақолада [1] даги илмий ишда киритилган икки жинсли популяцияни ифодаловчи дискрет вақтли квадратик стохастик операторларнинг узлуксиз вақтли аналогини ўрганамиз.

Фараз қиламиз, G авлодни ҳолати (x, y) – бўлсин. Унинг кейинги ҳолати қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$W := \begin{cases} x'_j = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}^{(f)} x_i y_k, 1 \leq j \leq n, \\ y'_l = \sum_{i,k=1}^{n,v} p_{ik,j}^{(m)} x_i y_k, 1 \leq l \leq v. \end{cases} \quad (1)$$

Таъриф: (1) эволюцион оператор икки жинсли вольтерра типдаги квадратик стохастик оператор дейилади, агарда

$$p_{ik,j}^{(f)} = 0,$$

$$j \in \{i, k\} \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq v$$

ва

$$p_{ik,l}^{(m)} = 0, l \in \{i, k\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq v.$$

[1] да 16 та четки икки жинсли вольтерра типдаги квадратик стохастик операторлар мавжудлиги кўрсатилган.

Фараз қиламиз, $n = v = 2$ бўлсин. У ҳолда (1) нинг биринчи четки узлуксиз вақтли аналогининг умумлашган ҳоли қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a + c)x_2y_1, \\ \dot{x}_2 = x_2y_2 - x_2, \\ \dot{y}_1 = x_1 + (b + d)x_2y_1 - y_1, \\ \dot{y}_2 = x_2y_2 - y_2, \end{cases} \quad (2)$$

бунда $a, b \geq 0$ ва $a + b = 1$, $c, d \geq 0$ ва $c + d = 1$, $a + c \neq 0$, $b + d \neq 0$.

[2-4] илмий ишларда (2) оддий дифференциал тенгламалар системасининг турли кўринишлари ўрганилган.

(2) автоном оддий дифференциал тенгламалар системаси a, c, b, d ларнинг маълум бир қийматларида ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартларини қаноатлантиради. Шу сабабли бу системанинг ечимларини излаш ва таҳлил қилиш мумкин.

Мақолада (2) нинг қўзғалмас нуқталари топилган ва уларнинг тури аниқланган. a, b, c, d ларнинг турли қийматлари (2) системанинг сонли ечимлари топилган. Олинган натижалар таҳлил қилинган.

Популяция ва турли физик жараёнлар чизиқли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар системалари ҳамда чизиқли бўлмаган хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламалар [5-17] учун турли чэгаравий масалаларни ўрганишга келтирилади. [18-19] мақолаларда биологик жараёнларни ифодаловчи турли математик моделлар таҳлил қилинган ва биология билан боғлиқлиги кўрсатиб ўтилган. [20-30] илмий изланишларда фойдаланилган айрим математик усуллар ушбу мақолада ҳам қўлланилган бўлиб, уни ўрганиш ва моҳиятини тушуниш ўқувчилардан (талабалардан) математик масалаларни мустақил равишда муҳокама қилиш имкониятини берадиган билим, кўникма ва малакаларга эга бўлишни талаб қилади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Розиков У.А., Жамиллов У.У. Вольтерровские КСО двуполой популяции // *Украинский математический журнал*, 63:17 (2011), с.985-998.
2. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.23-26.

3. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.665-672.

4. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «*The XXI Century Skills for Professional Activity*» *International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 у., p.145-146.

5. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // *Наука, техника и образование*, 72:8 (2020) с.29-32.

6. Расулов Т.Х., Расулов Х.Р. Ўзгариши чэгараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.559-567.

7. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // *Вестник науки и образования*, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

8. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // *Ученый XXI века, международный научный журнал*, 53:6-1 (2019), с.16-18 .

9. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.19-22. 10. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.42-48.

11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.27-30.

12. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // *XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019*, с. 197-199.

13. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // *Science and Education, scientific journal*, 2:9 (2021), p.7-20.

14. Расулов Х.Р., Джўракулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.455-462.

15. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «*Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения*» *Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ* (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

16. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.448-454.
17. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «*The XXI Century Skills for Professional Activity*» *International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
18. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // *Проблемы педагогики*, № 53:2 (2021), с. 7-10.
19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // *Scientific progress*, 2:2 (2021), p.870-879.
20. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). A Model in the Theory of Perturbations of the Essential Spectrum of Multiparticle Operators. *Math. Notes*. 73:4, pp. 521-528.
21. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), С. 368-390.
22. Dilmurodov E.B., Rasulov T.H. (2020). Essential spectrum of a 2x2 operator matrix and the Faddeev equation. *European science*, 51:2, Part II, pp. 7-10.
23. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. *European science*. 51:2, pp. 15-18.
24. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. *European science*. 51:2, Part II, pp. 19-22.
25. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). Efimov's Effect in a Model of Perturbation Theory of the Essential Spectrum. *Functional Analysis and its Appl.* 37:1, p. 69-71.
26. Rasulov T.H. (2010). Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 163:1, pp. 429-437.
27. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. *Молодой учёный*. № 9, С. 17-20.
28. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 10:5, pp. 511-519.
29. Расулов Т.Х. (2016). О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами. *ТМФ*, 186:2, С. 293-310.
30. Расулов Т.Х. (2011). О числе собственных значений одного матричного оператора. *Сибирский математический журнал*, 52:2, С. 400-415.

References

1. Rozikov U.A., Zhamilov U.U. Volterra CSR of a bisexual population // Ukrainian Mathematical Journal, 63:17 (2011), pp. 985-998.
2. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On some Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp.23-26.
3. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the dynamics of a bisexual population // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.665-672.
4. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On one quadratic stochastic operator with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P. 145-146.
5. Rasulov Kh.R., Rashidov A.Sh. Organization of a practical lesson based on innovative technologies in mathematics lessons // Science, technology and education, 72: 8 (2020) pp. 29-32.
6. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.559-567.
7. Rasulov Kh.R., Rashidov A.Sh. On the existence of a generalized solution to a boundary value problem for a nonlinear equation of mixed type // Bulletin of Science and Education, 97: 19-1 (2020), pp. 6-9.
8. Rasulov Kh.R. et al. On the solvability of the Cauchy problem for a degenerate quasilinear hyperbolic equation // Scientist of the XXI century, international scientific journal, 53: 6-1 (2019), pp.16-18.
9. Rasulov Kh.R., Dzhurakulova F.M. About one dynamic system with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) p.19-22.
10. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 42-48.
11. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. On the analysis of some non-Volterra dynamical systems with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp. 27-30.
12. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.
13. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Ways to solve some equations, inequalities and systems of equations involving the module // Science and Education, scientific journal, 2: 9 (2021), r.7-20.
14. Rasulov X.R., Djo'rakulova F.M. On numerical solutions of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.455-462.

15. Rasulov Kh.R. On one boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference Collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18 - 22, 2019), pp.65-66.

16. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 448-454.

17. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. About one dynamic system with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P.115-116.

18. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. The role of mathematics in biological sciences // Problems of pedagogy, no. 53: 2 (2021), p. 7-10.

19. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. Mathematical models and laws in biology // Scientific progress, 2: 2 (2021), pp. 870-879.

20. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). A Model in the Theory of Perturbations of the Essential Spectrum of Multiparticle Operators. Math. Notes. 73: 4, pp. 521-528.

21. Rasulov T.Kh., Dilmurodov E.B. (2020). Infinity of the number of eigenvalues of operator (2×2) -matrices. Asymptotics of the discrete spectrum. TMF. 3 (205), pp. 368-390.

22. Dilmurodov E.B., Rasulov T.H. (2020). Essential spectrum of a 2×2 operator matrix and the Faddeev equation. European science, 51: 2, Part II, pp. 7-10.

23. Bahronov B.I., Rasulov T.H. (2020). Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation. European science. 51: 2, pp. 15-18.

24. Umirkulova G.H., Rasulov T.H. (2020). Characteristic property of the Faddeev equation for three-particle model operator on a one-dimensional lattice. European science. 51: 2, Part II, pp. 19-22.

25. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. (2003). Efimov's Effect in a Model of Perturbation Theory of the Essential Spectrum. Functional Analysis and its Appl. 37: 1, p. 69-71.

26. Rasulov T.H. (2010). Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice. Theoretical and Mathematical Physics. 163: 1, pp. 429-437.

27. Rasulov T.Kh., Bakhronov B.I. (2015). On the spectrum of the tensor sum of Friedrichs models. Young scientist. No. 9, pp. 17-20.

28. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3×3 operator matrices. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 10: 5, pp. 511-519.

29. Rasulov T.Kh. (2016). On the branches of the essential spectrum of the lattice model of a spin-boson with at most two photons. TMF, 186: 2, C. 293-310.

30. Rasulov T.Kh. (2011). On the number of eigenvalues of one matrix operator. Siberian Mathematical Journal, 52: 2, pp. 400-415.