

Сферик функцияларнинг амалий аҳамияти ҳақида

Алижон Хайруллаевич Авезов
Бухоро давлат университети

Аннотация: Маълумки сферик функцияларнинг амалий аҳамияти кенг бўлиб, улардан механик, физик, химик, биологик ва иқтисодиётда ўрганилаётган бир қатор жараёнларни ўрганишда кенг фойдаланилади. Мақолада сферик функцияларнинг амалда қўлланилиши бўйича мисоллар келтирилган. Ернинг ўзига тортиш потенциалининг биринчи зональ гармоник коэффициентлари тажрибалар натижаси бўйича олинган қийматлар асосида тегишли коэффициентлар орқали ҳисобланган қийматлар жадвал шаклида берилган. Сферик функциялар ёрдамида айрим нарсаларнинг компьютер графикасида кўриниши берилган.

Калит сўзлар: сферик функциялар, потенциал, оғирлик маркази, гравитацион доимий, меридиан, гидросфера, зональ гармониклар, 3D формат.

About the practical importance of spheric functions

Alijon Xayrullayevich Avezov
Bukhara State University

Abstract: As is known, the practical significance of spherical functions is wide, and they are widely used in the study of a number of processes studied in mechanical, physical, chemical, biological and economics. The article provides examples of the practical application of spheric functions. The first zonal harmonic coefficients of the gravitational potential of the earth are given in tabular form by the calculated values obtained by means of the corresponding coefficients on the basis of the values obtained as a result of experiments. Using spherical functions, the appearance of some objects in computer graphics is given.

Keywords: spherical functions, potential, center of gravity, gravitational constant, meridian, hydrosphere, zonal harmonics, 3D format.

Маълумки, уч ўлчовли объектларни геометрияси ҳақидаги маълумотларни кичрайтириш учун (бунда объектнинг маълум бир хусусиятлари йўқолади) Фурье алмаштиришининг уч ўлчовли аналоглари - сферик функциялар бўйича ёйиш қўлланилиши мумкин.

Сферик функциялар - Лаплас тенгламасининг ортогонал ечимлари оиласининг сферик координаталарда ёзилган бурчак қисмини ифодалайди. Улар сферик сиртлар билан чегараланган фазовий соҳаларда физик ҳодисаларни ўрганишда ва сферик симметрик хоссага эга физик масалаларни ҳал қилишда кенг қўлланилади. Сферик функциялар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси ва назарий физикада, хусусан, атомдаги электрон орбиталарни, ернинг ўзига тортиш потенциални, геоиднинг тортишиш майдонини, сайёраларнинг магнит майдонини ва реликт нурланиш интенсивлигини ҳисоблаш масалаларида катта аҳамиятга эга.

Авалло сферик функцияларнинг кўриниши ҳақида қисқача маълумот берамиз (бизнинг асосий мақсадимиз сферик функцияларнинг амалий аҳамияти ҳақида фикр юритишдан иборат). Сферик функциялар Лаплас операторининг сферик координаталар системасидаги хос функциялари ҳисобланади ва $Y_l^m(\theta, \varphi)$ каби белгиланади. Уч ўлчовли S^2 сферада ортонормалланган системани ташкил қилади:

$$\langle Y_l^m; Y_l^m \rangle = \iint |Y_l^m|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 1$$

$$\langle Y_l^m; Y_l^{m'} \rangle = \iint Y_l^{m'} * Y_l^m \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

бу ерда * – комплекс кўшмани билдиради, $\delta_{ll'}$ – Кронекер символи. Бу ерда

$$Y_l^m = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) \sin(|m|\varphi), & m < 0, \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos\theta), & m = 0, \\ (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi), & m > 0, \end{cases}$$

бу ерда $P_l^m(\cos\theta)$ – Лежандрнинг қўшилган кўпҳади.

Лежандрнинг манфий m га боғлиқ қўшилган кўпҳади қуйидагича киритилади:

$$P_l^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

Умумий ҳолда сферик функцияларда φ – комплекс экспонента ҳисобланади. Эйлер формуласидан (комплекс экспонентани тригонометрик функциялар билан боғлайди) фойдаланиб, ҳақиқий қийматли сферик функцияларни киритиш мумкин. Ҳақиқий қийматли функциялардан

фойдаланишнинг афзаллиги шундан иборатки, уни графикларда яққол намоёиш қилиш мумкин (википедия материали). Қуйидаги жадвалда l ва m параметрларнинг турли қийматларида сферик функцияларнинг кўриниши берилган:

l :	$P_l^m(\cos\theta) \cos(m\varphi)$	$P_l^{ m }(\cos\theta) \sin(m \varphi)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
m :	6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6

Сферик функцияларнинг l ва m ларнинг айрим қийматларида кўринишини келтирамиз:

$$\begin{aligned}
 l = 0, & \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \\
 l = 1 & \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}, \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; \end{cases} \\
 l = 2 & \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}, \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}, \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Энди сферик функцияларнинг амалий аҳамияти ҳақида физикага оид мисолни, яъни ернинг ўзига тортиш потенциали ҳақидаги масалани келтирамиз.

Ернинг оғирлик марказини координата боши сифатида белгилаб, $Oxuz$ координаталар системасини танлайлик. Oxu текислиги экваториал текислик, Oz ўқи эса шимолий кутбга йўналган ер айланиш ўқи билан устма-уст тушсин. Oz ўқини Гринвич меридиани билан кесишади деб ҳисоблаймиз.

Ердан ташқарида бўлган ихтиёрий P нуқтани радиус-вектори, кенглиги ва узунлигини r, φ ва λ деб белгиласак,

$$x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

ернинг ўзига тортиш потенциали

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^m(\sin \varphi) [A_{n,m} \cos(m\lambda) + B_{n,m} \sin(m\lambda)] \right\}$$

билан ифодаланеди. Бунда f - гравитацион доимий, M ва r_0 – ернинг массаси ва ўрта экваториал радиуси, $fM = 3,9860 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$, $r_0 = 6378,155 \text{ км}$, P_n ва P_n^m – Лежандр кўпҳади ва кўшилган функцияси, $J_n, A_{n,m}$ ва $B_{n,m}$ ўлчовсиз катталиқлар ернинг шакли ва унинг ичида (ернинг ичида зичлик турлича, шунинг учун ернинг структуравий модели гидросфера билан ўралган қаттиқ қатламдан, қобикни ичида ёпишқоқ суюқлик, суюқликни марказида қаттиқ сфероид (ички ядро) дан иборат) массани тақсимланишига боғлиқ.

Агар $P_n^m(x)$ кўшилган функциядан нормаллашган $P_n(x)$ кўпҳадга ўтсак

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x),$$

адабиётларда тез-тез учрайдиган

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) \right\} + \frac{fM}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) [A_{n,m}^* \cos(m\lambda) + B_{n,m}^* \sin(m\lambda)] \right\},$$

формулага келамиз, бунда

$$A_{n,m}^* = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \frac{A_{n,m}}{\sqrt{1+2n}}, \quad B_{n,m}^* = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \frac{B_{n,m}}{\sqrt{1+2n}}.$$

Агар $A_{n,m}^*$ ва $B_{n,m}^*$ ларни $J_{n,m}$ ва $\lambda_{n,m}$ ларга $A_{n,m}^* = J_{n,m} \cos(m\lambda_{n,m})$, $B_{n,m}^* = J_{n,m} \sin(m\lambda_{n,m})$ ўзгартирсак, ернинг ўзига тортиш потенциални бошқа ифодасини оламиз:

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{n,m} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) \cos[m(\lambda - \lambda_{n,m})] \right\}.$$

Формулалардаги J_n га пропорционал бўлган қўшилувчилар зональ гармониклар дейилади. Ернинг ўзига тортиш потенциалнинг биринчи зональ гармоник коэффициентлари тажрибалар натижаси асосида

$$J_2 = -1082,63 \cdot 10^{-6}, J_3 = 2,54 \cdot 10^{-6}, J_4 = 1,59 \cdot 10^{-6}$$

$$J_5 = 0,23 \cdot 10^{-6}, J_6 = -0,50 \cdot 10^{-6}, J_7 = 0,36 \cdot 10^{-6}$$

$$J_8 = 0,12 \cdot 10^{-6}, J_9 = 0,10 \cdot 10^{-6}.$$

$n \neq m$ бўлганда $A_{n,m}^*$ ва $B_{n,m}^*$ ларга пропорционал тессериаль гармоник коэффициентлар ҳамда $n = m$ бўлгандаги секториал гармониклар куйидаги жадвалга келтирилган:

n	2	3	3	3	4	4	4	4
m	2	1	2	3	1	2	3	4
$A_{n,m}^* \cdot 10^8$	241,290	196,980	89,204	68,630	-52,989	33,024	98,943	-7,969
$B_{n,m}^* \cdot 10^8$	-136,41	26,015	-63,468	143,04	-48,765	70,633	-15,467	33,928

Геопотенциал қаралаётган $Oxuz$ координаталар системасида Oz ернинг айланиш ўқи билан устма-уст тушадиган қилиб танланганлигидан

$$A_{n,m}^* = B_{n,m}^* = 0.$$

Геопотенциалнинг ифодасидаги биринчи қўшилувчи шарнинг зичликнинг сферик тақсимланиши потенциали бўлиб, қолган барча қўшилувчилар ернинг сферик структурадан фарқини характерлайди. Асосий гармоника бўлган зональ гармоника эса ернинг кутбларда сиқилишини ифодалайди. Тоқ тартибли зональ гармониклар ернинг экватор текислигига нисбатан асимметриясини, тессериаль ва секториал гармониклар эса ернинг жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан динамик симметрикликдан фарқини аниқлаб беради.

Шу ўринда сферик функцияларни яна амалий аҳамиятга эга бўлган бир хоссасини келтираемиз. φ га боғлиқ бўлмаган сферик функция - $P_n(\cos \theta)$ функцияни оламиз ва $P_n^2(\cos \theta)$ функциядан бирлик сфера бўйича интегрални ҳисоблаймиз:

$$\iint_S P_n^2(\cos \theta) d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n^2(\cos \theta) \sin \theta \cdot d\theta d\varphi =$$

$$2\pi \int_0^\pi P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{4\pi}{2n + 1}.$$

бунда $d\sigma = \sin \theta \cdot d\theta d\varphi$, $\cos \theta = x$ алмаштиришлар бажарилди ва

$$I_0 = \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}$$

дан фойдаланилди.

Худди шу каби бошқа функцияларга нисбатан

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin^2 m\varphi \cdot \sin \theta \, d\theta d\varphi = \pi \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик ва

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

формуладан фойдаланиб қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

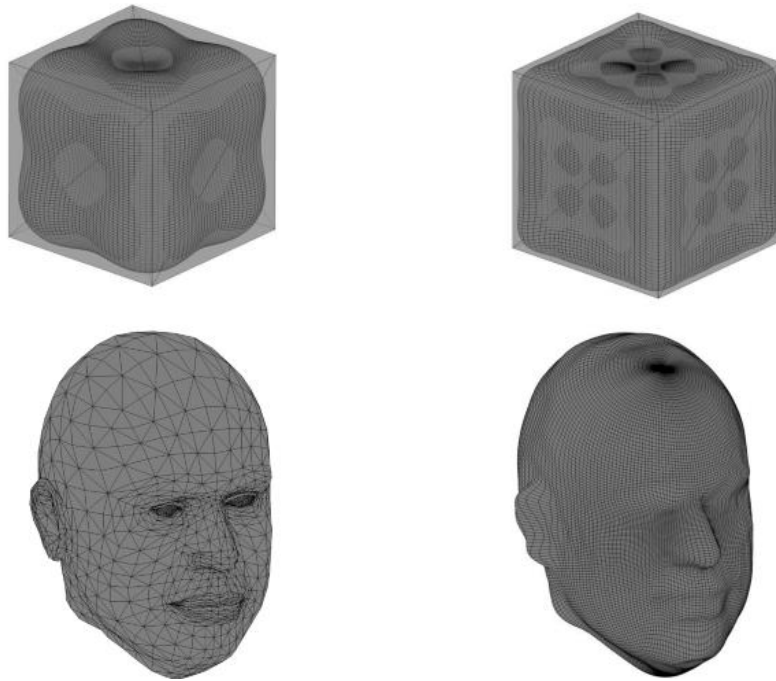
$$\left\{ \begin{aligned} \iint_s [P_n(\cos \theta)]^2 d\sigma &= \frac{4\pi}{2n+1}, \\ \iint_s [P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi]^2 d\sigma &= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \iint_s [P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi]^2 d\sigma &= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \end{aligned} \right.$$

Бу формулалардан сфера сиртида берилган ихтиёрий функцияни сферик функциялар бўйича ёйиш масалаларида фойдаланилади.

Айтиш жоизки, сферик функциялар аппарати электротехника ва уч ўлчовли фазода геофизик майдонларнинг потенциални ҳисоблашда кўп йиллардан буён қўлланиб келинаётган бўлсада, компьютерларда 3D графикларни компакт кўринишда тасвирлаш ишларида қўллаш ишлари янги йўналишдир. Бунга сабаб кўплаб уч ўлчовли объектлар айланма жисмлар бўлмай, аксиаль симметрик хоссага эмас. Шунга қарамай, «юлдузга ўхшаш» жисмлар талабига жавоб берувчи объектларга нисбатан сферик функцияларни қўллаш бўйича усуллар ишлаб чиқилган [1].

Сиқиш алгоритмлари ва тезлаштириш алгоритмларини визуализация қилишда 3D объектларни сферик гармониклар бўйича спектридан фойдаланиш телевидения ва компьютерлар графикасида янги йўналиш ҳисобланади. Глобал ёритиш тенгламасини ечишда объектларнинг геометрик ва светотехник хусусиятларини ифодалашда сферик гармоникларнинг қўшимча потенциал имкониятларидан фойдаланиш мумкин.

Биз қуйида n ва m ларнинг қийматлари саккизга (чапдаги расм) ва ўн олтига (ўнгдаги расм) тенг бўлганда сферик функциялар 3D форматда кубни ва шунингдек, инсон бошини (тўр моделини, мос равишда чапдаги ва ўнгдаги расмлар) қандай аниқликда тасвирлаган расмларини келтираемиз:



Ушбу келтирилганлардан кўриниб турибдики, сферик функцияларни ўрганиш жуда ҳам долзарб ҳисобланади. Уларни хоссаларини ўргатишда бир қатор илғор педагогик технологиялардан [2-6] фойдаланиш мақсадга мувофиқ ҳисобланади. Бундан ташқари, ўрганилаётган мавзунинг математиканинг бошқа соҳаси билан интеграцияси [7-30] ҳақида маълумотлар бериш муҳим аҳамият касб этади.

Ўрганилган мавзунинг чуқурроқ ўзлаштириш мақсадида мустақил бажариш учун қуйидаги топшириқлар ва назорат саволларини ўрганиш тавсия қилинади:

1. Сферик функцияларнинг амалий татбиғига оид масалалар (мавзуда келтирилганлардан ташқари) келтиринг;

2. Сферик функцияларни тўлиқлиги ҳақидаги теоремадан келиб чиқадиган қуйидаги натижаларни исботланг:

Натижа - 1. Сферик функциялар системаси ёпиқ.

Натижа - 2. Сферик функциялар системаси Штурм-Лиувилл масаласининг барча хос функцияларини тўлиқ қоплайди.

Ҳар бир $\lambda = n(n + 1)$ хос сонга $2n + 1$ та чизиқли боғлиқ бўлмаган хос функциялар мос келади, яъни ҳар бир хос сон $2n + 1$ каррали бузилади;

3. Сферик функциянинг таърифини айтинг;

4. Сферик функцияларнинг ошкор кўринишини ёзинг;

5. $P_n(x)$ ва $P_n^m(x)$ (Лежандр кўпхадлари) функциялар ҳамда уларнинг хоссаларини айтиб беринг;

6. Сферик функцияларнинг ортогоналлик хоссаси келтиринг;

7. Агар $n \neq 0$ бўлса

$$P_{2n}(0) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ бўлишини исботланг;}$$

8. $\forall x \in [-1,1], \forall n \in N$ лар учун

$$|P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n(1-x^2)}}$$

бўлишини исботланг;

9. Жуфт n ларда $P_n(x)$ кўпхадда x нинг фақат жуфт, тоқ n ларда $P_n(x)$ кўпхадда x нинг фақат тоқ даражалари катнашишини кўрсатинг;

10. $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}P_n(x)$ ва $\frac{d^n}{dx^n}P_n(x)$ ни ҳисобланг.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Jyh-Ming Lien, Nancy M. Amato. Approximate convex decomposition //Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry, SCG '04, New York, USA, 2004, pp 457–458.

2. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.

3. Avezov A.X., Hakimova S.H., Namroyeva Y.A. Analitik geometriya va chiziqli algebra bobini takrorlashda grafik organayzer metodlari // Scientific Progress. – 2021. – Т. 2. – №. 6. – С. 1680-1688.

4. Расулов Т.Х., Расулов Х.Р. Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // Scientific progress, 2:1 (2021), p.559-567.

5. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.586-595.

6. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

8. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазади портретларини чизиш йўллари ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

9. Avezov A.X., Amrullayeva A.N., Namozova M.M. “Aqliy hujum” va “Keys study” metodlari yordamida “funksiya hosilasi” mavzusini o‘qitish // Scientific Progress. – 2021. – Т. 2. – №. 6. – С. 1689-1697.

10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.

11. Аvezов А.Х. Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов // Вестник науки и образования. – 2020. – №. 17-2 (95), С. 6-9.
12. Avezov A.X., Raxmatova N. Eüler integrallarining tadbirlari // Scientific progress, 2:1 (2021), с.1397-1406.
13. Аvezов А.Х. On The Application of the Finite Element Method in Dynamic and Static Problems of the Mechanics of A Deformable Body // International Journal WWJMRD, 5:6, (2019); p.10-14.
14. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
15. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.27-30.
16. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
17. Расулов Х.Р., Джўракулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.455-462.
18. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция, сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.
19. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
20. Аvezов А.Х. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными // Западно-Сибирский научный центр. Сборник материалов Международной научно-практической конференции, 27 февраля 2019г., г.Кемерово, с.9-11.
21. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
22. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
23. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) с.23-26.
24. Avezov A.X., Fayzullaeva N.V., Aminova Sh.U. Avtonom differensial tenglamalarning qo'zg'almas nuqtalari tasnifi haqida // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.101-113.

25. Avezov A.X. Matematika fanini o'qitishda tafakkur uslublari va shakllari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.739-748.

26. АВЕЗОВ А.Х. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.749-758.

27. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o'qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.

28. Avezov A.X. Ta'limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.

29. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

30. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.78-88.

References

1. Jyh-Ming Lien, Nancy M. Amato. Approximate convex decomposition // Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry, SCG '04, New York, USA, 2004, pp 457–458.

2. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Ways to solve some equations, inequalities and systems of equations involving the module // Science and Education, scientific journal, 2: 9 (2021), r.7-20.

3. Avezov A.X., Hakimova S.H., Hamroyeva Y.A. Graphical organizer methods in the analysis of analytical geometry and linear algebra // Scientific Progress. - 2021. - Т. 2. - №. 6. - S. 1680-1688.

4. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.559-567.

5. Rasulov X.R., Sobirov S.J. On the use of interactive methods in solving some rational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.586-595.

6. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Application of interactive methods in solving some irrational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.596-607.

7. Rasulov X.R., Raupova M.X., Yashieva F.Yu. On the bisexual population and its mathematical model // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.81-96.

8. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.
9. Avezov A.X., Amrullayeva A.N., Namozova M.M. Teaching the topic "Derivatives of functions" using the methods of "brainstorming" and "case study" // Scientific Progress. - 2021. - T. 2. - №. 6. - S. 1689-1697.
10. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the dynamics of a bisexual population // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.665-672.
11. Avezov A.Kh. Some numerical results of the study of three-dimensional turbulent jets of reacting gases // Bulletin of Science and Education. - 2020. - No. 17-2 (95), pp. 6-9.
12. Avezov A.Kh., Rakhmatova N. Applications of Euler integrals // Scientific progress, 2: 1 (2021), p.1397-1406.
13. Avezov A.X. On The Application of the Finite Element Method in Dynamic and Static Problems of the Mechanics of A Deformable Body // International Journal WWJMRD, 5: 6, (2019); p.10-14.
14. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 42-48.
15. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. On the analysis of some non-Volterra dynamical systems with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp. 27-30.
16. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.
17. Rasulov X.R., Djo'rakulova F.M. On numerical solutions of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.455-462.
18. Rasulov Kh.R. On a boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference, collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18-22, 2019), pp.65-66.
19. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. On the analysis of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), p.448-454.
20. Avezov A.Kh. Inequalities and systems of inequalities with two variables // West Siberian Scientific Center. Collection of materials of the International Scientific and Practical Conference, February 27, 2019, Kemerovo, pp. 9-11.
21. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. The role of mathematics in biological sciences // Problems of pedagogy, no. 53: 2 (2021), p. 7-10.

22. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. Mathematical models and laws in biology // Scientific progress, 2: 2 (2021), pp. 870-879.
23. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On some Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) p.23-26.
24. Avezov A.X., Fayzullaeva N.V., Aminova Sh.U. On the classification of fixed points of autonomous differential equations // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), r.101-113.
25. Avezov A.X. Methods and forms of thinking in teaching mathematics // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.739-748.
26. Avezov A.X. Principles of development of information technologies in mathematics lessons in secondary schools // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.749-758.
27. Avezov A.X. Possibilities of using stratification technology in teaching higher mathematics // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.
28. Avezov A.X. Improving the effectiveness of the use of innovative technologies at different stages of education // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.
29. Rasulov Kh.R. On some symbols of mathematical analysis // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp. 66-77.
30. Rasulov Kh.R. On the concept of asymptotic expansion and some of its applications // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp. 78-88.