О тригонометрических рядах Фурье

Хайруллаевич Авезов Алижон
Бухарский государственный университет

Аннотация: В статье изложены краткий обзор об истоки тригонометрических рядов Фурье и ее применения. Также, приведены несколько примеров с решениями.

Ключевые слова: ряд, тригонометрия, математический анализ, синус, косинус, принцип локализации, ортогональный базис.

Trigonometric Fourier series

Xayrullayevich Avezov Alijon
Bukhara State University

Abstract: The article provides a brief overview of the history of trigonometric Fourier series and its applications. Also, there are some examples with solutions.

Keywords: series, trigonometry, mathematical analysis, sinus, cosinus, principle of localization, orthogonal basis.

Практика показывает, что если на уроках коротко рассказать об истоки изучаемой темы, будет эффективнее ее освоение. В этой связи, в статье излагаются начальный период рядов Фурье и его практическое значение. Затем приводятся решения нескольких примеров. Отметим, что в большей части литературы содержится мало информации об истоки рядов Фурье и его применение.

В математическом анализе тригонометрический ряд - это ряд по косинусам и синусам кратных дуг, т.е. ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n\, sin\, nx. \ (1)$$

Начальный период теории таких рядов относят к середине XVIII века в связи с задачей о колебании струны, когда искомая функция искалась в виде суммы ряда (1). Вопрос о возможности такого представления вызвал у математиков острые споры (Бернулли Д. , Д'Аламбера Ж., Лагранжа Ж., Эйлера Л.), продолжавшиеся несколько десятилетий. Споры относились к содержанию понятия функции. В то время функции обычно связывались с их аналитическим заданием, что приводило к рассмотрению только аналитических или кусочно-аналитических функций. А здесь появилась необходимость представить в виде тригонометрических рядов функцию, графиком которой является достаточно произвольная кривая. Фактически в них возникли вопросы, связанные со многими принципиально важными идеями математического анализа.

Отметим, что в дальнейшем, как и в этот начальный период, теория тригонометрических рядов служила источником новых идей. Именно в связи с ними, например, возникли теория множеств и теория функций действительного переменного.

Существенную роль играли исследования тригонометрических рядов в построении интегралов Римана и Лебега. Теория функций действительного переменного возникла и затем развивалась в тесной связи с теорией тригонометрических рядов, как обобщения тригонометрических рядов появились интеграл Фурье, почти периодические функции, общие ортогональные ряды, абстрактный гармонический анализ. Исследования по тригонометрическим рядам были исходным пунктом при создании теории множеств. Тригонометрические ряды являются мощным средством представления и исследования функций.

В теории тригонометрических рядов можно условно выделить два раздела - теорию рядов Фурье, когда предполагается, что ряд (1) является рядом Фурье некоторой функции, и теорию общих тригонометрических рядов, где такое предположение не делается. Первое систематическое исследование общих тригонометрических рядов принадлежит Риману Б. (1853). Поэтому теорию общих тригонометрических рядов иногда называют римановской теорией тригонометрического ряда.

Если тригонометрические ряды сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю. Для тригонометрических рядов со стремящимися к нулю коэффициентами справедлив принцип локализации Римана, согласно которому поведение ряда (1) в точке x зависит только от поведения в произвольно малой окрестности этой точки функции, к которой сходится ряд, полученный двукратным почленным интегрированием ряда (1).

Известно, что ряды Фурье - это представление произвольно взятой функции с конкретным периодом в виде ряда. В общем виде данное решение называют разложением элемента по ортогональному базису. Разложение функций в ряд Фурье является довольно мощным инструментом при решении разнообразных задач, благодаря свойствам данного преобразования при интегрировании, дифференцировании, а также сдвиге выражения по аргументу и свертке.

Это преобразование довольно плотно вошло в нашу жизнь. Им пользуются не только математики, но и физики, химики, медики, астрономы, сейсмологи, океанографы и многие другие.

Ряды Фурье являются одним из методов (наряду с анализом и другими) преобразования Фурье. Данный процесс происходит каждый раз, когда человек слышит какой-либо звук. Наше ухо в автоматическом режиме производит преобразование звуковой волны. Колебательные движения элементарных частиц в упругой среде раскладываются в ряды (по спектру) последовательных значений уровня громкости для тонов разной высоты. Далее мозг превращает эти данные в привычные для нас звуки. Все это происходит помимо нашего желания или сознания, само по себе, а вот для того чтобы понять эти процессы, понадобится несколько лет изучать высшую математику.

Ряды Фурье относятся к числительному способу разложения любых колебательных процессов от океанских приливов и световых волн до циклов солнечной (и других астрономических объектов) активности. Используя эти математические приемы, можно разбирать функции, представляя любые колебательные процессы в качестве ряда синусоидальных составляющих, которые переходят от минимума к максимуму и обратно.

Ряды Фурье является функцией, описывающей фазу и амплитуду синусоид, соответствующих определенной частоте. Данный процесс можно использовать для решения весьма сложных уравнений, которые описывают динамические процессы, возникающие под действием тепловой, световой или электрической энергии.

Как сказано выше, основателем этой теории является французский математик Жан Батист Жозеф Фурье. Его именем впоследствии и было названо данное преобразование. Изначально ученый применил свой метод для изучения и объяснения механизмов теплопроводности - распространения тепла в твердых телах. Фурье предположил, что изначальное нерегулярное распределение тепловой волны можно разложить на простейшие синусоиды, каждая из которых будет иметь свой температурный минимум и максимум, а также свою фазу. При этом каждая такая компонента будет измеряться от минимума к максимуму и обратно.

Математическая функция, которая описывает верхние и нижние части кривой, а также фазу каждой из гармоник, назвали преобразованием Фурье от выражения распределения температуры. Автор теории свел общую функцию распределения, которая трудно поддается математическому описанию, к весьма удобному в обращении ряду периодических функций косинуса и синуса, в сумме дающих исходное распределение.

Современники Фурье, ведущие математики начала девятнадцатого века - не приняли данную теорию. Основным возражением послужило утверждение Фурье о том, что разрывную функцию, описывающую прямую линию или разрывающуюся кривую, можно представить в виде суммы синусоидальных выражений, которые являются непрерывными. В качестве примера можно рассмотреть «ступеньку» Хэвисайда: ее значение равно нулю слева от разрыва и единице справа. Данная функция описывает зависимость электрического тока от временной переменной при замыкании цепи. Современники теории на тот момент никогда не сталкивались с подобной ситуацией, когда разрывное выражение описывалось бы комбинацией непрерывных, обычных функций, таких как экспонента, синусоида, линейная или квадратичная рис.1.

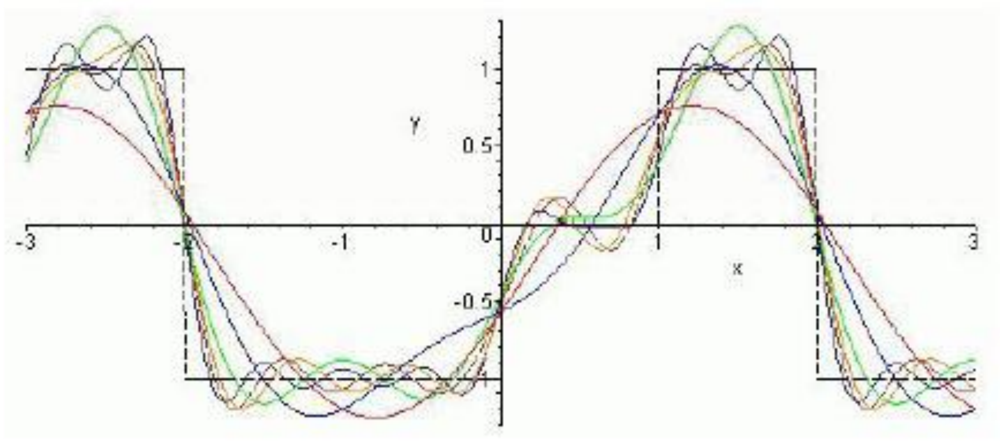

Рис.1

В начале девятнадцатого века подобное утверждение казалось абсурдным. Но, несмотря на все сомнения, многие математики расширили сферу изучения данного феномена, выведя его за пределы исследований теплопроводности. Однако большинство ученых продолжали заниматься вопросом: «Может ли сумма синусоидального ряда сходиться к точному значению разрывной функции?»

Анализ Фурье неприменим к выражениям, содержащим бесконечное количество разрывов на определенном интервале. В общем и целом, ряды Фурье, если изначальная функция представлена результатом реального физического измерения, всегда сходятся. Вопросы сходимости данного процесса для конкретных классов функций привели к появлению новых разделов в математике, например теории обобщенных функций. Она связана с такими именами, как Шварц, Микусинский Дж. и Темпл Дж.. Благодаря этой работе ряды Фурье стали применимы для решения уравнений и задач, в которых фигурируют интуитивные понятия: точечный заряд, точечная масса, магнитные диполи, а также сосредоточенная нагрузка на балке.

Ряды Фурье, в соответствии с принципами интерференции, начинаются с разложения сложных форм на более простые. Например, изменение теплового потока объясняется его прохождением сквозь различные препятствия из теплоизолирующего материала неправильной формы или изменением поверхности земли - землетрясением, изменением орбиты небесного тела - влиянием планет. Как правило, подобные уравнения, описывающие простые классические системы, элементарно решаются для каждой отдельной волны. Фурье показал, что простые решения также можно суммировать для получения решения более сложных задач. Выражаясь языком математики, ряды Фурье - это методика представления выражения суммой гармоник - косинусоид и синусоид. Поэтому данный анализ известен также под именем «гармонический анализ».

С развитием компьютеров преобразования Фурье поднялись на качественно новый уровень. Данная методика прочно закрепилась практически во всех сферах науки и техники. В качестве примера можно привести цифровой аудио и видеосигнал. Его реализация стала возможной только благодаря теории, разработанной французским математиком в начале девятнадцатого века. Так, ряд Фурье в комплексной форме позволил совершить прорыв в изучении космического пространства. Кроме того, это повлияло на изучение физики полупроводниковых материалов и плазмы, микроволновой акустики, океанографии, радиолокации, сейсмологии.

Также, дополнительно можно сказать, что преобразования Фурье знаменит на весь мир, что практическая польза его рядов буквально неисчислима. Их удобно применять там, где есть какие-либо колебания или волны: акустика, астрономия, радиотехника и т.д. Самый простой пример его использования: механизм работы фотоаппарата или видеокамеры. Если объяснять вкратце, эти устройства записывают не просто картинки, а коэффициенты рядов Фурье. И работает это везде - при просмотре картинок в интернете, фильма или прослушивании музыки. Именно благодаря рядам Фурье мы сейчас можем прочитать эту статью со своего мобильного телефона. Без преобразования Фурье нам не хватило бы никакой пропускной способности Интернет-соединений, чтобы просто посмотреть видео на YouTube даже в стандартном качестве.

В математике ряд Фурье является способом представления произвольных сложных функций суммой более простых. В общих случаях количество таких выражений может быть бесконечным. При этом, чем больше их число учитывается при расчете, тем точнее получается конечный результат. Чаще всего в качестве простейших используют тригонометрические функции косинуса или синуса. В таком случае ряды Фурье называют тригонометрическими, а решение таких выражений - разложением гармоники. Этот метод играет важную роль в математике. Прежде всего, тригонометрический ряд дает средства для изображения, а также изучения функций, он является основным аппаратом теории. Позволяет решать ряд задач математической физики. Способствовала развитию математического анализа, вызвала к жизни целый ряд весьма важных разделов математической науки (теорию интегралов, теорию периодических функций).

В настоящее время уже давно является осмысленным тот факт, что теория рядов Фурье существенно зависит от понятия интеграла. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла (Коши, Римана, Лебега, Данжуа), все более и более будем расширять класс тригонометрических рядов Фурье.

Для такого математического приема, как разложение функций в тригонометрический ряд Фурье, придется брать интегралы. В общем виде тригонометрический ряд Фурье записывают в виде бесконечной суммы:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \, sin\, nx,$$

где

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, (2)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ (3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) si\,n\,nx\,dx, n=1,2,\dots .(4)$$

Если каким-то образом сможем посчитать бесконечное количество a_n и b_n (они и называются коэффициентами разложения Фурье), то полученный ряд в результате будет на 100% совпадать с исходной функцией $f(x)$ на отрезке от $-\pi$ до π. Такой отрезок обусловлен свойствами интегрирования синуса и косинуса. Чем больше, для которого мы рассчитаем коэффициенты разложения функции в ряд, тем точнее будет это разложение.

Например, рассмотрим функцию $y=5x$ и разложим ее в тригонометрический ряд Фурье. Тогда по $(2-4)$ находим

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 5x\,dx=0\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 5x \cos x \, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin \; nxdx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 5x \, sin \, 2x \, dx = (-1)^{n+1} \frac{10}{n} \text{ , } n = 1, 2, \dots .$$

В случае с такой функцией мы можем сразу сказать, что все $a_n = 0, n = 0,1,2, \dots$, а коэффициенты b_n придется вычислять. Если возьмем первые четыре члена разложения в ряд Фурье для функции $y = 5x$, получим:

$$5x \approx 10sinx - 5sin2x + \frac{10}{3} sin3x - \frac{5}{2} sin4x.$$

График получившейся функции будет выглядеть следующим образом рис.1:

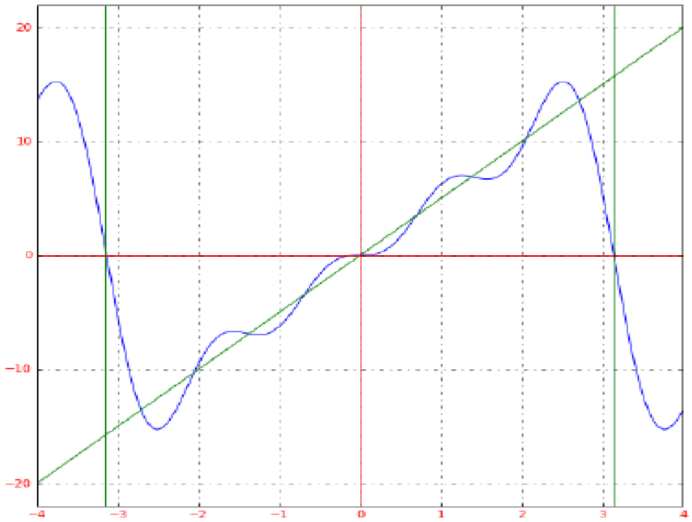

Рис.1

Получившееся разложение в ряд Фурье приближается к нашей исходной функции. Если мы возьмем большее количество членов ряда, например, $n = 15$, то увидим уже следующее рис.2:

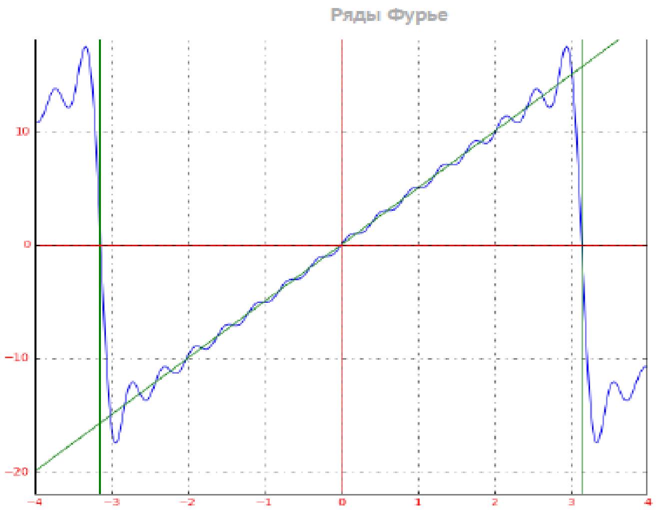

Рис. 2

Чем больше членов разложения в ряд, тем выше точность.

Пример 2. Разложить в ряд по синусам функцию $y = x^2$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

Продолжим эту функцию нечетным образом на $[-\pi, 0]$ и затем периодически с периодом 2π на всю действительную ось. Тогда ряд Фурье этой функции $\varphi(x)$ будет состоять только из синусов:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^{n+1} - 1].$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

График этого ряда изображен на рис. 3.

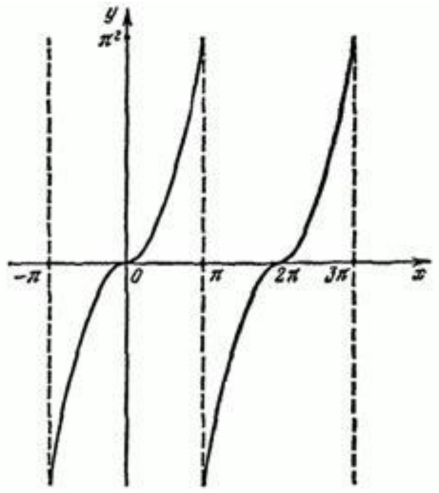

Рис.3

Пример 3. Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, -\pi < x \leq 0, \\ 1, \ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Заданная функция непериодическая. Для вычисления коэффициентов Фурье используем формулы $(2-4)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_0^\pi dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{3}{\pi}\pi^2 + \pi\right) = \frac{2-3\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + \int_0^\pi \cos nx dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{3\cos\pi n}{n^2} - \frac{3\pi \sin\pi n}{n} + \frac{\sin\pi n}{n}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{3}{\pi n^2}, n = 2k, \\ 0, n = 2k-1, k \in N; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} \sin nxdx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{3\sin \pi n}{n^2} - \frac{3\pi\cos \pi n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos \pi n}{n}\right) =$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{\pi n}, n = 2k, \\ \frac{3+\pi}{\pi n}, n = 2k-1, k \in N. \end{cases}$$

После некоторых вычислений получим

$$f(x) = \frac{2-3\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3(1+(-1)^n)}{2\pi n}\cos nx + \frac{6+(-1)^{n+1}\pi + \pi}{2\pi(-1)^{n+1}n}\right)\sin nx\,.$$

Пример 4. Найти разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 3x, -\pi < x \leq 0; \\ 1-x,\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Из $(2-4)$ получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi}(1-x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3}{\pi}\pi^2 + \pi + \frac{1}{\pi}\pi^2\right) = 1 - \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}(1-x)\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{3\cos \pi n}{n} - \frac{3\pi\sin \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{\cos \pi n}{n} + \frac{\sin \pi n}{n} - \right.$$

$$\left.\frac{\pi\sin \pi n}{n}\right) = \frac{4}{\pi n^2} - \frac{4\cos \pi n}{\pi n^2} =$$

$$\frac{4(1-\cos \pi n)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ \frac{8}{\pi n^2}, n = 2k-1, k \in N. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(3\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}(1-x)\sin nxdx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{3\sin \pi n}{n^2} - \frac{3\pi\cos \pi n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos \pi n}{n} - \frac{\sin \pi n}{n^2} + \frac{\pi\cos \pi n}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin \pi n}{n^2} - \frac{2\pi\cos \pi n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\cos \pi n}{n}\right) = \frac{1\,(2\pi-1)\cos \pi n}{\pi n} =$$

$$\begin{cases} \frac{(2\pi-1)}{\pi n}, n = 2k, \\ \frac{2}{n}, n = 2k-1, k \in N. \end{cases}$$

Составляем формулы коэффициентов Фурье и записываем разложение функции в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{1-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(1-(-1)^k)}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n-2\pi}{\pi(-1)^n}\right)\sin nx\,.$$

Пример 5. Найти разложение функции в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, -\pi < x \le 0; \\ 2,\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение: находим коэффициенты тригонометрического ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x-2)dx + 2\int_{0}^{\pi}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\pi^2 - 2\pi + \pi\right) = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x-2)cos\,nxdx + 2\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\,sin\,\pi n}{n} - \frac{\cos\pi n}{n^2} + \frac{1}{k^2}\right) = \begin{cases} 0, n = 2k,; \\ \frac{2}{\pi n^2}, n = 2k-1, n \in N. \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(x-2)sinnxdx + 2\int_{0}^{\pi}sin\,nxdx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n} - \frac{4\,cos\,\pi n}{n} - \frac{\pi\cos\pi n}{n} + \frac{sin\,\pi n}{n^2}\right) =$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{n}, n = 2k, \\ \frac{\pi+8}{\pi n}, n = 2k-1, n \in N. \end{cases}$$

Подставляя полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим следующее разложение функции

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx - \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi+4-4(-1)^n}{\pi(-1)^n}sin\,nx\right).$$

Заметим, что практический опыт показывает, что во время уроков рассказ краткой информации об истоки изучаемой темы и о научных трудах по практическому применению математики [1-14], приводит к повышению интереса студентов к науке и расширению мировоззрений.

В настоящее время, для повышения эффективности преподавании математики, преподавателями применяются разные интерактивные методы [15-27], которые требуют от учащихся большой работы над собой. В результате чего, были замечены положительные сдвиги в освоении математики. Так, некоторые студенты совместно с руководителями опубликовали научные статьи [28-30].

Использованная литература

1. Avezov A.X., Hakimova S.H., Hamroyeva Y.A. Analitik geometriya va chiziqli algebra bobini takrorlashda grafik organayzer metodlari // Scientific Progress. – 2021. – Т. 2. – №. 6. – С. 1680-1688.

2. Avezov A.X., Amrullayeva A.N., Namozova M.M. “Aqliy hujum” va “Keys study” metodlari yordamida “funksiya hosilasi” mavzusini o ‘qitish // Scientific Progress. – 2021. – Т. 2. – №. 6. – С. 1689-1697.

3. Avezov A.X. On The Application of the Finite Element Method in Dynamic and Static Problems of the Mechanics of A Deformable Body // International Journal WWJMRD, 5:6, (2019); p.10-14.

4. Авезов А.Х. Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов // Вестник науки и образования. – 2020. – №. 17-2 (95), С. 6-9.

5. Avezov, A.Kh., Akhmedov, M.S., Saidzhonova, M.S., Ata-Kurbanova, F.B. Numerical simulation of three-dimensional turbulent reacting gas jets arising nozzle rectangular based «K-ε» turbulence models //Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology. – 2015. – №. 2. – С. 7.

6. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

7. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

8. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.78-88.

9. Avezov A.X., Raxmatova N. Eyler integrallarining tadbiqlari // Scientific progress, 2:1 (2021), c.1397-1406.

10. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

11. Авезов А.Х. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными // Западно-Сибирский научный центр. Сборник материалов Международной научно-практической конференции, 27 февраля 2019г., г.Кемерово, с.9-11.

12. Авезов А.Х., Жумаев Т.Х., Темиров С.А. Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, вытекающих из сопла прямоугольной формы, на основе Ке-модели турбулентности //Молодой ученый. – 2015. – №. 10. – С. 1-6.

13. Avezov A.X., Fayzullaeva N.V., Aminova Sh.У. Avtonom differensial tenglamalarning qo’zg’almas nuqtalari tasnifi haqida // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.101-113.

14. Kurbonov G.G., Istamova D.S., The Role of Information Technology in Teaching Geometry in Secondary Schools. Scientific progress. 2:4(2021), Pp. 817-822.

15. Avezov A.X. Matematika fanini o’qitishda tafakkur uslublari va shakllari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.739-748.

16. Авезов А.Х. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.749-758.

17. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o‘qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.

18. Avezov A.X. Ta’limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.

19. Курбонов Г.Г. Информационные технологии в преподавании аналитической геометрии. Проблемы педагогики. 2021. №2(53). стр. 11-14.

20. Avezov A.X., Amrullayeva A. N., Namozova M.M. «Aqliy hujum» va «keys study» metodlari yordamida «funksiya hosilasi» mavzusini o‘qitish // Scientific progress, 2:6 (2021), c.1689-1697.

21. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики. Наука, техника и образование 2020. № 8 (72). c.29-32.

22. Авезов А.Х. Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов // Вестник науки и образования, 17:95-2, (2020), с. 6-9.

23. Ахмедов О.С. Преимущества историко-генетического метода при обучении математики // Scientific progress. 2:4 (2021). P. 523-530.

24. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

25. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

26. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

27. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные

уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

28. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

29. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

30. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

References

1. Avezov A.X., Hakimova S.H., Hamroyeva Y.A. Graphical organizer methods in the analysis of analytical geometry and linear algebra // Scientific Progress. - 2021. - T. 2. - №. 6. - S. 1680-1688.

2. Avezov A.X., Amrullayeva A.N., Namozova M.M. Teaching the topic "Derivatives of functions" using the methods of "brainstorming" and "case study" // Scientific Progress. - 2021. - T. 2. - №. 6. - S. 1689-1697.

3. Avezov A.X. On The Application of the Finite Element Method in Dynamic and Static Problems of the Mechanics of A Deformable Body // International Journal WWJMRD, 5: 6, (2019); p.10-14.

4. Avezov A.Kh. Some numerical results of the study of three-dimensional turbulent jets of reacting gases // Bulletin of Science and Education. - 2020. - No. 17-2 (95), pp. 6-9.

5. Avezov, A.Kh., Akhmedov, M.S., Saidzhonova, M.S., Ata-Kurbanova, F.B. Numerical simulation of three-dimensional turbulent reacting gas jets arising nozzle rectangular based «K-e» turbulence models // Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology. - 2015. - №. 2. - S. 7.

6. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. The role of mathematics in biological sciences // Problems of pedagogy, no. 53: 2 (2021), p. 7-10.

7. Rasulov Kh.R. On some symbols of mathematical analysis // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp. 66-77.

8. Rasulov Kh.R. On the concept of asymptotic expansion and some of its applications // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp. 78-88.

9. Avezov A.Kh., Rakhmatova N. Applications of Euler integrals // Scientific progress, 2: 1 (2021), p.1397-1406.

10. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. Mathematical models and laws in biology // Scientific progress, 2: 2 (2021), pp. 870-879.

11. Avezov A.Kh. Inequalities and systems of inequalities with two variables // West Siberian Scientific Center. Collection of materials of the International Scientific and Practical Conference, February 27, 2019, Kemerovo, pp. 9-11.

12. Avezov A.Kh., Zhumaev T.Kh., Temirov S.A. Numerical modeling of three-dimensional turbulent jets of reacting gases flowing out of a rectangular nozzle based on the Ke-model of turbulence // Young Scientist. - 2015. - No. 10. - S. 1-6.

13. Avezov A.X., Fayzullaeva N.V., Aminova Sh.U. On the classification of fixed points of autonomous differential equations // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), r.101-113.

14. Kurbonov G.G., Istamova D.S., The Role of Information Technology in Teaching Geometry in Secondary Schools. Scientific progress. 2: 4 (2021), Pp. 817-822.

15. Avezov A.X. Methods and forms of thinking in teaching mathematics // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.739-748.

16. Avezov A.X. Principles of development of information technologies in mathematics lessons in secondary schools // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.749-758.

17. Avezov A.X. Possibilities of using stratification technology in teaching higher mathematics // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.

18. Avezov A.X. Improving the effectiveness of the use of innovative technologies at different stages of education // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.

19. Kurbonov G.G. Information technology in teaching analytical geometry. Problems of pedagogy. 2021. No. 2 (53). pp. 11-14.

20. Avezov A.X., Amrullayeva A. N., Namozova M.M. Teaching the topic of “product of function” using the methods of “mental attack” and “case study” // Scientific progress, 2: 6 (2021), p.1689-1697.

21. Rasulov Kh.R., Rashidov A.Sh. Organization of a practical lesson based on innovative technologies in mathematics lessons. Science, technology and education 2020. No. 8 (72). pp. 29-32.

22. Avezov A.Kh. Some numerical results of the study of three-dimensional turbulent jets of reacting gases // Bulletin of Science and Education, 17: 95-2, (2020), p. 6-9.

23. O.S. Akhmedov. The advantages of the historical-genetic method in teaching mathematics // Scientific progress. 2: 4 (2021). R. 523-530.

24. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and

Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.

25. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

26. Rasulov X.R., Raupova M.X. Yashieva F.Yu. On the bisexual population and its mathematical model // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.81-96.

27. Rasulov Kh.R. On a boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference Collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18-22, 2019), pp.65-66.

28. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

29. Rasulov X.R., Sobirov S.J. On the use of interactive methods in solving some rational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

30. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.