Ikki o’zgaruvchili xususiy integral tenglamalarni yechish

Fazilat Eshmurod qizi Egamberdiyeva
Termiz davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada integral tenglamalar, xususan ikki o’zgaruvchili xususiy tenglamalarni yechish o’rganiladi.

Kalit so’zlar: differensial tenglama; integral tenglama; Volter va Fredgolm tenglamalari; umumlashgan Abel tenglamasi; Grin funksiyasi.

Solving special integral equations with two variables

Fazilat Eshmurod qizi Egamberdiyeva
Termez State University

Abstract: In this article we study the solution of integral equations, in particular, special equations with two variables.

Keywords: differential equation; integral equation; Voltaire and Fredholm equations; generalized Abel equation; Green function.

Integral tenglamalar nazariyasi shu qadar rivojlanib, tenglamalarning turlari shu qadar ko’payib ketdiki, ularga umumiy ta’rif berishning iloji bo’lmay qoldi. Shunday bo’lsa ham, kitobxonda biror boshlang’ich taassurot qolsin uchun integral tenglamaning ilgarilari qabul qilingan ta’rifini eslatib o’tamiz. Ma’lumki, agar biror tenglamadagi noma’lum funksiya differensiallash ishorasi ostida bo’lsa, bunday tenglama *differensial tenglama* deb yuritiladi. Integral tenglamaning ta’rifi ham shunga o’xshaydi.

Agar tenglamadagi noma’lum funksiya shu funksiyaning argumenti bo’yicha olinadigan integral ishorasi ostida bo’lsa, bunday tenglama *integral tenglama* deb ataladi.

Agar integral tenglamada noma’lum funksiya darajasi birga teng bo’lsa, bunday tenglama *chiziqli integral tenglama* deyiladi.

Integral tenglamalarning turlari ko’p, ulardan ba’zilari quyidagilardir.

Fredgolm integral tenglamalari. Ushbu integral tenglama

Fredgolmning[1] *birinchi tur integral tenglamasi* deyiladi:

$$\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (1.1)$$

bunda $u(t)$ - noma'lum funksiya, $f(t)$ - ozod had va $K(x,t)$ tenglamaning yadrosi - ma'lum funksiyalar, integrallash chegaralari a va b berilgan haqiqiy o'zgarmas sonlardir.

Integral tenglamada ishtirok etadigan noma'lum funksiya ikki argumentli bo'lishi ham mumkin. U holda, masalan, ikkinchi tur tenglama quyidagicha yoziladi:

$$u(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x,y,t_1,t_2)u(t_1,t_2)dt_1dt_2, \qquad (1.5)$$

bu yerda $f(x,y)$ - ozod had, $P(a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d)$ sohada, yadro $K(x,y,t_1,t_2)$ esa $P(a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\ a\leq t_1\leq b,\ c\leq t_2\leq d)$ sohada berilgan deb hisoblanadi; a, b, c, d va λ lar berilgan o'zgarmas haqiqiy sonlardir. Ana shunday tenglamalarga misol sifatida quyidagi tenglamani ko'rsatish mumkin:

$$u(x,y) = 2xy - 3 + 5\int_0^1 \int_0^1 xyt_1t_2u(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Umuman, integral tenglamadagi noma'lum funksiya $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko'p argumentli bo'lishi ham mumkin, u holda Fredgolm tenglamasidagi integral n karrali bo'ladi.

Volter integral tenglamalari. Ushbu

$$\lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad (1.6)$$

Agar I intervalda $f(x)\equiv 0$ bo'lsa, (1.7) dan ushbu

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (1.8)$$

bir jinsli tenglama kelib chiqadi. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, Volter tenglamalarida integralning chegaralaridan biri o'zgaruvchi bo'lib, Fredgolm tenglamalarida ikkala chegarasi ham o'zgarmas sonlar bo'ladi.

Agar, ushbu

$$K^*(x,t) = \begin{cases} K(x,t), & a \leq t \leq x \\ 0, & t > x \end{cases}$$

belgilashni kiritsak, (1.4) va (1.5) tenglamalar yadrosi bo'lgan Fredgolmning birinchi va ikkinchi tur integral tenglamalarini tashkil etadi. Shunday qilib, Volter tenglamalari Fredgolm integral tenglamalarining xususiy holi bo'lar ekan. Shunday bo'lsada, ko'p hollarda Volter tenglamalarini alohida o'rganish maqsadga muvofiqdir.

Masalan, quyidagi tenglamalar Volter tenglamalaridir:

1. $u(x) = 1 + \int_0^x (t - x)u(t)dt.$

2. $u(x) = 6x + 29 + \int_0^x (6x - 6t + 5)u(t)dt.$

3. $u(x) = \int_0^x (t - x)u(t)dt.$

4. $u(x) = -2\cos x + x + 2\int_0^x (t - x)u(t)dt.$

1. Volter tenglamasiga misol sifatida *umumlashgan Abel tenglamasini* keltirish mumkin:

Eslatib o'tish joizki, agarda $K(x,t) \neq 0$ va $f(x)$ lar uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda (1.6) ko'rinishdagi birinchi tur Volter tenglamasi (1.7) ko'rinishdagi ikkinchi tur Volter tenglamasiga keltiriladi. Haqiqatdan, (1.6) ni x bo'yicha differensiallasak, ushbu

$$K(x,x)u(x) + \int_a^x K'_x(x,t)u(t)dt = f'(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan esa

$$u(x) + \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt = f_1(x) \qquad (a \leq x \leq b),$$

bunda

$$K_1(x,t) = \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)}, \qquad f_1(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

Volter tenglamalaridagi noma'lum funksiyalar ko'p argumentli, jumladan, ikki argumentli bo'lishi ham mumkin. U holda Volterning ikkinchi tur tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$u(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^x \int_c^y K(x,y,t_1,t_2)u(t_1,t_2)dt_1, dt_2, \qquad (1.10)$$

bundagi $f(x,y)$ ozod had $\Delta(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$ sohada va $K(x,y,t_1,t_2)$ yadro $P(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ a \leq t_1 \leq x,\ c \leq t_2 \leq y)$ sohada aniqlangan deb hisoblanadi. Masalan, quyidagilar shunday tenglamalardir:

1. $u(x,y) = xy + \lambda \int_0^x \int_0^y u(t_1,t_2)dt_1dt_2.$

2. $u(x,y) = 1 + \lambda \int_0^x \int_0^y xt_1u(t_1,t_2)dt_1dt_2.$

3. $u(x,y) = xy + \lambda \int_0 \int_0^x (t_1t_2 - xy)u(t_1,t_2)dt_1dt_2.$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ловитт У.В. Линейые интегральные уравнения. ГТТИ,1933.

2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1959.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. - М.: Наука, 1965.

4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. - ИЛ. 1960.

5. Демидович Б.П., Марон А.И. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1970.

6. Березин И.С., Житков Н.П. Методы вычислений.- М.: Физматгиз, 1966 (1-том, 3-изд.), 1962 (2-том, 2-изд.).

7. Мақсудов Ш.Т. Чизиқли интеграл тенгламалар элементлари. Т.: Ўқитувчи, 1980.

8. Демидович Б.П., Марон А.И., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1968.

9. Давыдов Е.Г. Математический пакет Scientific WorkPlace 3.0 в курсе высшей математики. Технология работы и практика решения задач: Учебное пособие/ МАДИ (ГТУ).- М., 2002.-105 с.

10. Давыдов Е.Г. Интегрированная система Scientific WorkPlace 4.0: Технология работы и практика решения задач. - М.: Финансы и статистика. 2003. - 208 с.

11. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, Matlab 7, Maple 9 (Самоучитель). - М.: НТ Пресс, 2006. - 496 с.

12. Давыдов Е.Г. Пакет Scientific WorkPlace: Особенности использования // Exponenta Pro. Математика в приложениях. - 2003. - N 4. - С. 9-13.