Taqqoslama va uning tatbiqi

Nasriddin Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Murodjon Ro'ziyev
SamDU O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada algebra kursining sonlar nazariyasi bo‘limiga oid taqqoslama tushunchasi va uning xossalari berilgan bo‘lib, taqqoslamaga oid “Eyler”, “Firmaning kichik teoremasi” va “Qoldiqlar haqidagi Xitoy teorema”lari berilgan. Maqolaning asosiy maqsad va vazifalaridan biri o‘rta maktab, akademik litseylardagi olimpiadaga qiziquvchi o‘quvchilar va abituriyentlarga ba’zi sonlar nazariyasi bo’limidan murakkab masalalarni sodda, qulay va bir necha usullar bilan yechishni o‘rgatishdan iborat.

Kalit so‘zlar: Taqqoslama, modul, Eyler funksiyasi, Firmaning kichik teoremasi, kanonik yoyilma, tasdiq, o‘zaro tub, chiziqli taqqoslama, Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi, ekvivalent, daraja xossalari.

Comparison and its application

Nasriddin Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Murodjon Roziyev
SamSU Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Abstract: This article gives the concept of a comparator and its properties related to the number theory section of the algebra course, as well as the “Small Euler Theorem”, “Small firm theorem” and “Chinese remainder theorem” related to the comparator. One of the main goals and objectives of the article is to teach students and applicants interested in the Olympiad in secondary schools, academic lyceums, to solve complex problems from the number theory section in simple, convenient and several ways.

Keywords: comparison, module, Euler function, small firm theorem, canonical propagation, statement, mutually simple, linear comparison, Chinese remainder theorem, equivalence, properties of degrees.

Bizga a va b butun sonlar va m natural son berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. Agar a va b sonlarini m ga bo'lgandagi qoldiqlari teng bo'lsa, a va b sonlar m modul bo'yicha taqqoslanuvchi deyiladi va $a \equiv b(modm)$ shaklda yoziladi.

Masalan, $a = 22$ va $b = 27$ sonlari $m = 5$ modul bo'yicha taqqoslanadi, ya'ni

$22 \equiv 27(mod5)$.

Xossalari:

1°. Ixtiyoriy a butun soni va m natural soni uchun $a \equiv a(modm)$ taqqoslama o'rinli bo'ladi.

2°. Agar $a \equiv b(modm)$ bo'lsa, u holda $b \equiv a(modm)$bo'ladi.

3°. Agar $a \equiv b(modm)$ va $b \equiv c(modm)$ bo'lsa, u holda $a \equiv c(modm)$ bo'ladi.

4°. Taqqoslamalarni hadma-had qo'shish va hadma-had ko'paytirish mumkin, ya'ni, agar $a \equiv b(modm)$ va $c \equiv d(modm)$ bo'lsa, u holda

$a + c \equiv b + d(modm)$ va $a \cdot c \equiv b \cdot d(modm)$ bo'ladi.

5°. $a \equiv b(modm)$ taqqoslama va $\forall n \in \mathrm{N}$ soni uchun $an \equiv bn(mod\, mn)$ taqqoslama o'rinli bo'ladi.

6°. Taqqoslamaning ikkala tarafini ham m bilan o'zaro tub bo'lgan $(\mathrm{EKUB}(\mathrm{m}, \mathrm{c}) = 1)$ c soniga ko'paytirish mumkin. Ya'ni $a \equiv b(modm)$ va $\mathrm{EKUB}(\mathrm{m}, \mathrm{c}) = 1$ bo'lsa, u holda $a \cdot c \equiv b \cdot c(modm)$ o'rinli bo'ladi.

7°. Agar $a \equiv b(modm)$ bo'lsa, u holda $a^n \equiv b^n(modm)$ boladi. Bu yerda *n* ixtiyoriy natural son.

Ta'rif. Musbat sonlar ustida aniqlangan, hamda a soniga $1,2,3,4, \dots . a - 1$ sonlar ichida a bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar sonini mos qo'yuvchi funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi. Eyler funksiyasi $\varphi(a)$ kabi belgilanadi.

Misol: $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2.$

Eyler funksiyasining qiymatini berilgan *a* sonining

$a = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot {p_3}^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$ kanonik yoyilmasidan foydalanib, hisoblaydigan formula keltiramiz.

Tasdiq. a soni uchun Eyler funksiyasi ya'ni a soniga $1,2,3,4, \dots . a - 1$ sonlar ichida a bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar soni $\varphi(a)$ quyidagicha topiladi:

$$\varphi(a) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_k})$$

Isbot. Avval *a* tub son bo'lgan holni qaraymiz, ya'ni $a = p$ biror tub songa teng bo'lsin. U holda p tub son ekanligidan $1,2,3, \dots p - 1$ sonlarni har biri bilan o'zaro tub bo'ladi. Demak, $\varphi(p) = p - 1$.

Endi a biror tub sonning darajasi ko'rinishida bo'lsin ya'ni $a = p^\alpha$. U holda $\{1,2,3,4, \dots , p^\alpha - 1\} \setminus \{p, 2p, 3p, \dots , (p^{\alpha-1} - 1)p\}$ sonlarning barchasi p^α bilan o'zaro tub, ya'ni $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Aytaylik, $a = p_1 \cdot p_2$ ko'rinishda bo'lsin, bu yerda p_1, p_2 tub sonlar. Umumiylikka zarar yetkazmagan holda $p_1 < p_2$ deb olib,

$$\{1,2,3,\dots,p_1\cdot p_2-1\}\setminus\{p_1,2p_1,3p_1,4p_1,\dots,(p_2-1)p_1,p_2,2p_2,3p_2,4p_2,\dots,(p_1-1)p_2\}$$

sonlarni qaraymiz. Bu sonlarning barchasi $p_1\cdot p_2$ bilan o‘zaro tub bo‘ladi, ya’ni

$\varphi(p_1\cdot p_2)=p_1\cdot p_2-p_1-p_2+1=(p_1-1)\cdot(p_2-1)=\varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)$

Demak, o‘zaro tub bo‘lgan ikkita p_1 va p_2 natural son uchun

$\varphi(p_1\cdot p_2)=\varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)$ ekanligi kelib chiqdi.

Induksiyadan foydalangan holda juft-jufti bilan o‘zaro tub bo‘lgan k ta natural son uchun: $\varphi(p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k)=\varphi(p_1)\cdot\varphi(p_2)\cdot\varphi(p_3)\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k)$ ekanligini osongina hosil qilish mumkin.

Teorema (Eyler teoremasi). O‘zaro tub bo‘lgan a va m $(m>1)$ sonlari uchun quyidagi munosabat o‘rinli: $a^{\varphi(m)}\equiv 1(modm)$

Isbot. Aytaylik, $\varphi(m)=c$ bo‘lsin. m dan kichik va m bilan o‘zaro tub bo‘lgan turli $r_1,r_2,r_3,\dots,r_c$ sonlari uchun $ar_1,ar_2,ar_3,\dots,ar_c$ sonlarni qaraymiz. U holda

$ar_1\equiv s_1(modm), ar_2\equiv s_2(modm), ar_3\equiv s_3(modm),\dots., ar_c\equiv s_c(modm)$.

Bu yerda $s_1,s_2,s_3,\dots,s_c$lar o‘zaro teng bo‘lmagan sonlar.

Haqiqatan, $s_i=s_j$ bo‘lsa, u holda $ar_i\equiv s_i(modm)$ va $ar_j\equiv s_j(modm)$ ekanligidan $ar_i-ar_j\equiv(s_i-s_j)(modm)\equiv 0(modm)$ kelib chiqadi. $\mathrm{EKUB(a,m)}=1$ bo‘lganligi uchun $r_i-r_j\equiv 0(modm)$ ya’ni $r_i=r_j$. Bu esa r_k sonlarining turli ekanligiga zid.

Shuningdek, $s_1,s_2,s_3,\dots,s_c$ sonlarning barchasi m bilan o‘zaro tub ekanligini ko‘rish qiyin emas. Bundan esa $r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_c=s_1\cdot s_2\cdot s_3\cdot\ldots\cdot s_c$ tenglik kelib chiqadi. $ar_i\equiv s_i(modm)$ taqqoslamalarni hadma-had ko‘paytirsak,

$a^c\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_c=s_1\cdot s_2\cdot s_3\cdot\ldots\cdot s_c(modm)$ munosabatga ega bo‘lamiz. Demak, $a^c=1(modm)$ ya’ni $a^{\varphi(m)}=1(modm)$. (*)

Agar Eyler teoremasida m soni o‘rniga biror p tub olinsa, u holda (*) tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi: $a^{p-1}=1(modp)$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini a ga ko‘paytirsak, $a^p=a(modp)$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik *Fermaning kichik teoremasi* deyiladi.

Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi. Endi quyidagi taqqoslamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} x\equiv b_1(modm_1)\\ x\equiv b_2(modm_2)\\ \quad\cdots\\ x\equiv b_k(modm_k)\end{cases}$$

bu yerda, $m_1,m_2,m_3,\dots,m_k$ sonlari jufti-jufti bilan o‘zaro tub sonlar ya’ni $\forall i,j\epsilon\overline{1,k}$ va $i\neq j$ lar uchun $\mathrm{EKUB}(\mathrm{m_i},\mathrm{m_j})=1$. Bu sistema bir noma’lumli *chiziqli taqqoslamalar sistemasi* deyiladi.

Teorema (Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasi). Bir noma'lumli chiziqli taqqoslamalar sistemasi berilgan bo'lib, $\mathrm{M_s}$va $\mathrm{M_s^*}$ sonlari quyidagicha aniqlangan bo'lsin: $\mathrm{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_s = M_s \cdot m_s}$, va $\mathrm{M_s^*}$ sonini $\mathrm{M_s \cdot M_s^* = 1(mod m_s)}$ shart o'rinli bo'ladigan qilib tanlab olamiz. x_0 sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mathrm{x_0 = M_1 \cdot M_1^* \cdot b_1 + M_2 \cdot M_2^* \cdot b_2 + \cdots . + M_{\mathit{k}} \cdot M_{\mathit{k}}^* \cdot b_{\mathit{k}}}$$

U holda $\mathrm{x \equiv x_0(mod\, m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k)}$ taqqoslamani qanoatlantiruvchi barcha x lar to'plami berilgan sistemaning yechimlari to'plamiga teng bo'ladi.

Isbot. $\mathrm{M_j}$ larning aniqlanishiga ko'ra, $\mathrm{M_s}$ dan farqli barcha $\mathrm{m_s}$lar ga bo'linadi. Natijada, $x_0 \equiv \mathrm{M_s \cdot M_s^*} \cdot b_s(\mathrm{modm_s}) \equiv b_s(\mathrm{mod\, m_s})$ hosil bo'ladi. Shu sababli

$\mathrm{x = x_0}$ yechim sistemani qanoatlantiradi.

Bundan esa, berilgan sistema quyidagi sistemaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} \mathrm{x \equiv x_0(modm_1)} \\ \mathrm{x \equiv x_0(modm_2)} \\ \quad \cdots \\ \mathrm{x \equiv x_0(modm_k)} \end{cases}$$

Bu sistema $\mathrm{x \equiv x_0(mod\, m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k)}$ taqqoslamaga teng kuchli.

Misol: Quyidagi sistemani yeching.

$$\begin{cases} \mathrm{x \equiv b_1(mod\ 4)} \\ \mathrm{x \equiv b_2(mod\ 5)} \\ \mathrm{x \equiv b_3(mod\ 7)} \end{cases}$$

Bu yerda $\mathrm{M_1 = 35,\ M_2 = 28,\ M_3 = 20}$ bo'lganligi uchun, $35 \cdot 3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4), 28 \cdot 2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5), 20 \cdot 6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$ ekanligidan

$\mathrm{M_1^* = 3, M_2^* = 2, M_3^* = 6}$ bo'lishini hosil qilamiz.

Demak, $x_0 = 35 \cdot 3 \cdot b_1 + 28 \cdot 2 \cdot b_2 + 20 \cdot 6 \cdot b_3 = 105 \cdot b_1 + 56 \cdot b_2 + 120 \cdot b_3$

Yuqoridagi teoremaga ko'ra berilgan sistema quyidagi tenglamaga teng kuchli:

$$\mathrm{x \equiv (105 \cdot b_1 + 56 \cdot b_2 + 120 \cdot b_3)(mod140)}$$

Aytaylik, $\mathrm{b_1 = 1, b_2 = 3}$ va $\mathrm{b_3 = 2}$ bo'lsin, u holda bo'lib, sistemaning quyidagi yechimi hosil bo'ladi:

$$\mathrm{x \equiv (105 \cdot 1 + 56 \cdot 3 + 120 \cdot 2)(mod\ 140) \equiv 93(mod\ 140).}$$

Bu yechimni $\mathrm{x = \overline{93}_{140}}$ yoki $\mathrm{x = 93 + 140k, k \epsilon Z}$ ko'rinishida ham yozish mumkin.

Tatbiqlari

1-Misol: 2031^{2042} sonining oxirgi ikki raqamini toping?

1-usul. Ixtiyoriy $\overline{a \ldots bcd}^n$ sonini daraja amallaridan foydalanib $\overline{a \ldots bc1}^m$ ko'rinishiga yoki $\overline{a \ldots b24}^k$ ko'rinishiga keltirsa bo'ladi $(\mathrm{n, m, k\ \epsilon N})$.

Xususan $\overline{a \ldots bc1}^m$ ko'rinishiga keladigan sonlar uchun $(\overline{a \ldots bc0} + 1)^m$ sonini Nyuton binomi formulasi bo'yicha yoyganimizda quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$(\overline{a \dots bc0} + 1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot \overline{a \dots bc0}^k \cdot 1^{m-k} = C_m^0 \cdot \overline{a \dots bc0}^0 \cdot 1^m + +C_m^1 \cdot \overline{a \dots bc0}^1 \cdot 1^{m-1} + C_m^2 \cdot \overline{a \dots bc0}^2 \cdot 1^{m-2} + \dots + C_m^m \cdot \overline{a \dots bc0}^m 1^{m-m}$

yig'indini yoyilma ko'rinishidagi barcha C_m^k lar butun son va uchinchi hadidan boshlab barcha hadlari 100 ga karrali bo'lganligi sababli barchasini $100d$ deb belgilaymiz chunki oxirgi ikki xonasiga ta'sir qilmaydi

$(\overline{a \dots bc0} + 1)^m = C_m^0 \cdot \overline{a \dots bc0}^0 \cdot 1^m + +C_m^1 \cdot \overline{a \dots bc0}^1 \cdot 1^{m-1} + 100d =$
$= 1 + m \cdot \overline{a \dots bc0} \cdot 1 + 100d = 100d + 10 \cdot \left(\overline{a \dots bc} \cdot m\right) + 1$

Aytaylik $m = \overline{\dots f}$ ya'ni m sonining birlar xonasida f raqami bo'lsin, unda sonning o'nlar xonasida $c \cdot f$ sonining oxirgi raqami turadi va bu holatda har doim birlar xonasida 1 raqami bo'ladi. Bizga berilgan misolda $(2030 + 1)^{2042}$ bundan $m = 2042, f = 2, c = 3$ o'nlar xonasida $c \cdot f = 2 \cdot 3 = 6$ raqami bo'ladi, birlar xonasida 1 raqami bo'ladi. Demak , $2031^{2042} = \overline{\dots 61}$

2-usul.(Eyler teoremasi) 2031^{2042} sonining oxirgi ikki raqamini topish masalasi

$2031^{2042} \equiv x(mod100), x < 100$ masalasi bilan teng kuchli sababi, $x -$ bu 2031^{2042} sonini 100 ga bo'lgandagi qoldiq desak bo'ladi. EKUB$(2031{,}100) = 1$,

100 soni uchun Eyler funksiyasini aniqlaymiz:

$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$ Eyler teoremasiga ko'ra

$2031^{40} \equiv 1(mod100)$ va bu taqqoslamani 7°-xossaga asosan darajaga oshirsak

$(2031^{40})^{51} \equiv 2031^{2040} \equiv 1(mod100)$ taqqoslamani hosil qilamiz, 6°-xossaga ko'ra $x \equiv 2031^{2042} \equiv 2031^{2040} \cdot 2031^2 \equiv 1 \cdot 2031^2 \equiv 31^2 \equiv 961 \equiv 61(mod100)$

$61 < 100$ shart bajarilganligidan $x = 61$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2-Misol. 2022^{242} sonini oxirgi ikki raqamini toping?

1-usul. Ixtiyoriy $\overline{a \dots bcd}^n$ sonini daraja amallaridan foydalanib $\overline{a \dots bc1}^m$ ko'rinishiga yoki $\overline{a \dots b24}^k$ ko'rinishiga keltirsa bo'ladi $(\mathrm{n, m, k} \in \mathrm{N})$.

Xususan $\overline{a \dots bd2}^k = \overline{a \dots bd2}^{\overline{mn \dots q0}} \cdot \overline{a \dots bd2}^r$ $r -$ raqam bo'lganligidan $\overline{a \dots bd2}^r$ sonining oxirgi ikki raqamini topish qiyin emas.

$\overline{a \dots bd2}^{\overline{mn \dots q0}} = ((\overline{a \dots bd0} + 2)^{10})^{\overline{mn \dots q}} = (\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot \overline{a \dots bd0}^{10-k} \cdot 2^k)^{\overline{mn \dots q}} = (100d + C_{10}^9 \cdot \overline{a \dots bd0}^1 \cdot 2^9 + C_{10}^{10} \cdot \overline{a \dots bd0}^0 \cdot 2^{10})^{\overline{mn \dots q}}$ yoyilmada $C_{10}^9 = 10$ va $\overline{a \dots bd0}^1 = 10q$ ga teng ekanligidan $C_{10}^9 \cdot \overline{a \dots bd0}^1 \cdot 2^9 = 100l$ ya'ni 100 ga karrali, demak daraja asosining oxirgi ikki raqami $C_{10}^{10} \cdot \overline{a \dots bd0}^0 \cdot 2^{10} = \overline{\dots 24}$ soniga bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

$$((\overline{a \dots bd0} + 2)^{10})^{\overline{mn \dots q}} = (100d + 100l + \overline{\dots 24})^{\overline{mn \dots q}} = (\overline{\dots 24})^{\overline{mn \dots q}} =$$
$$= \begin{cases} \overline{\dots 24}, (\overline{\dots 24})^{\overline{mn \dots q}} \text{sonida } q - \text{toq raqam bo'lsa} \\ \overline{\dots 76}, (\overline{\dots 24})^{\overline{mn \dots q}} \text{sonida } q - \text{juft raqam bo'lsa} \end{cases}$$

Bizga berilgan misolda $2022^{642} = 2022^{240} \cdot 2022^2$ deb olsak bo'ladi

1) $2022^{640} = (2022^{10})^{64} = (\overline{\dots 24})^{64} = \left((4 - \text{juft})\right) = \overline{\dots 76}$

2) $2022^2 \cdot \overline{...76} = \overline{...84}$

Demak $2022^{641} = \overline{...84}$ munosabatga ega bo‘lamiz.

2-usul. (Eyler teoremasi) $2022^{642} \equiv x(mod100), x < 100$ va $\text{EKUB}(2022{,}100) = 4$ bo‘lgani uchun bu taqqoslamani ikki tomonini ham 5°-xossaga ko‘ra 4 ga qisqartirganimizda:

$1011^2 \cdot 2022^{640} \equiv \frac{x}{4}(mod25)$ munosabat o‘rinli va $\text{EKUB}(2022; 25) = 1$ tenglikdan Eyler teoremasini qo‘llasak maqsadga muvofiq bo‘ladi $\varphi(25) = 25 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$;

1) $2022^{20} \equiv 1(mod25) \Rightarrow 7° - \text{xossaga ko'ra} \Rightarrow (2022^{20})^{32} \equiv 1(mod25)$

2) Ushbu taqqoslamani ikki tomonini 6°-xossaga ko‘ra 1011^2 ga ko‘paytirsak:

$1011^2 \cdot 2022^{640} \equiv 1011^2 \cdot 1 \equiv 21 \equiv \frac{x}{4}(mod25)$ taqqoslama hosil bo‘ladi.

Demak, $\frac{x}{4} = 21 \Rightarrow x = 84$.

3-misol. Yangi 2022-yil munosabati bilan qorbobo 9-B sinfning a’lochi o‘g’il bolalariga 3 tadan, a’lochi qizlariga 2 tadan kitob sovg’a qildi. Agar qorbobo jami bo’lib 40 ta kitob sovg’a qilgan bo‘lsa, nechta o‘g’il va qiz sovg’a olishgan?

Yechish: Berilgan masalaga mos tenglama tuzsak $3a + 2b = 40, a = ?, b = ?$

Bu yerda a −o‘g’il bolalar soni, b −qiz bolalar soni.

$2b = -3a + 40 \Rightarrow 2b \equiv 40(mod3)$ 6°-xossaga ko’ra bu taqqoslamani 2 ga ko‘paytirsak $4b \equiv 80(mod3) \Rightarrow b \equiv 2(mod3) \Rightarrow b = 3k + 2, k\epsilon\text{Z}$ bu tenglikdan $3a = 40 - 2b = 40 - 2 \cdot (3k + 2) = 40 - 6k - 4 = 36 - 6k$

$a = 12 - 2k$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Demak $\begin{cases} a = 12 - 2k \\ b = 3k + 2 \end{cases}$ $k\epsilon\text{Z}$ xususan,

$k = 0$ da $\begin{cases} a = 12 \\ b = 2 \end{cases}$, $k = 1$ da $\begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$, $k = 2$ da $\begin{cases} a = 8 \\ b = 8 \end{cases}$, $k = 3$ da $\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases}$

$k = 4$ da $\begin{cases} a = 4 \\ b = 14 \end{cases}$, $k = 5$ da $\begin{cases} a = 2 \\ b = 17 \end{cases}$, $k = 6$ da $\begin{cases} a = 0 \\ b = 20 \end{cases}$ k ning qolgan qiymatlarida $a < 0$ yoki $b < 0$ bo’ladi bu masala shartiga zid. Umumiy javob $\begin{cases} a = 12 - 2k \\ b = 3k + 2 \end{cases}$ $k\epsilon\text{Z}$.

4-misol. Fermada o‘rdak, tovuq va qo‘ylar bo‘lib, o‘rdak va qo‘ylarning oyoqlari soni 70 ta, o‘rdaklarning oyoqlari va tovuqlarning panjalari soni esa 32 ta bo‘lsa. O‘rdaklar, tovuqlar va qo‘ylarning sonini toping? (Tovuqning panjalari soni 3ta)

Yechish. Masalaga mos tenglama tuzamiz $\begin{cases} 2x + 4y = 70 \\ 2x + 3z = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 35 \\ 2x + 3z = 32 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2y + 35 \\ 2x = -3z + 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 35(mod\ 2) \\ 2x \equiv 32(mod\ 3) \end{cases}$ bu taqqoslamalar sistemasini Qoldiqlar haqidagi Xitoy teoremasidan foydalanib yechamiz:

$$\begin{cases} x \equiv 35(mod\ 2) \\ 2x \equiv 32(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1(mod\ 2) \\ 2x \equiv 2(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1(mod\ 2) \\ 4x \equiv 4(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1(mod\ 2) \\ x \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

$$x_0 = 2a_1 + 3a_2$$

Bu yechimni taqqoslamalar sistemasiga olib borib qo‘yamiz $\begin{cases} x_0 \equiv 1(mod\ 2) \\ x_0 \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$

$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 \equiv 1(mod\ 2) \\ 2a_1 + 3a_2 \equiv 1(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_2 \equiv 1(mod\ 2) \\ 2a_1 \equiv 1(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \equiv 1(mod\ 2) \\ 4a_1 \equiv 2(mod\ 3) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a_2 \equiv 1(mod\ 2) \\ a_1 \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$ demak, $a_1 = 3k + 2, a_2 = 2l + 1, k, l \epsilon$ Z

Xususan, $a_1 = 2, a_2 = 1$ deb tanlab olsak $x_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ umumiy yechim esa quyidagicha ko’rinishda bo‘ladi:

$x = x_0 +$ EKUK(2,3) $\cdot k \Rightarrow x = 7 + 6k$ bu noma’lumga mos qolgan noma’lumlarni topamiz $\begin{cases} 2y = 35 - x = 35 - 7 - 6k \\ 3z = 32 - 2x = 32 - 2 \cdot (7 + 6k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 28 - 6k \\ 3z = 18 - 12k \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y = 14 - 3k \\ z = 6 - 4k \end{cases} \Rightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = 7 + 6k \\ y = 14 - 3k \\ z = 6 - 4k \end{cases}, k\epsilon$Z . Endi xususiy yechimlarni topamiz, $k = -1$ da $\begin{cases} x = 1 \\ y = 17 \\ z = 10 \end{cases}$

$k = 0$ da $\begin{cases} x = 7 \\ y = 14, \\ z = 6 \end{cases}$ va $k = 1$ da $\begin{cases} x = 13 \\ y = 11 \\ z = 2 \end{cases}$ k ning qolgan qiymatlarida $x < 0$, $y < 0$ yoki $z < 0$ bo‘ladi bu masala shartiga zid. Umumiy javob $\begin{cases} x = 7 + 6k \\ y = 14 - 3k \\ z = 6 - 4k \end{cases}, k\epsilon$Z.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov “ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI”, Toshkent – 2019

2. A. S. Yunusov, S. I. Afonina, M. A. Berdiqulov, D. I. Yunusova. “QIZIQARLI MATEMATIKA VA OLIMPIADA MASALALARI”, ,,O‘qituvchi” nashriyoti. Toshkent – 2007

3. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Algeba and Number theory. 2010. – 523 p.