Алгебраик тенгламалар ва тенгсизликларни декарт координаталар системасидан фойдаланган ҳолда ўқитиш методлари

А.Бегматов
Н.Рахимов
nasriddin.raximov@inbox.ru
Ўзбекистон-Финляндия педагогика институти

Аннотация: Мақолада баъзи алгебраик тенгламалар ва тенгсизликларни декарт координаталар системасидан фойдаланган ҳолатда ўқитиш методлари кўрсатиб ўтилган. Алгебраик тенгламалар ва тенгсизликларни бу усуллардан фойдаланган ҳолда ўқитганимизда ўқувчилар тенгламалар ечимларини тенгсизликлар исботларини геометрик шакллар ёрдамида жуда осон ўзлаштириб оладилар.

Калит сўзлар: Декарт координаталар системаси, тенглама, тенгсизлик, функция, энг кичик ва энг катта қийматлар, модул, ечим ҳамда учбурчак.

Methods for teaching algebraic equations and inequalities using the decorte coordinate system

A.Begmatov
N.Rakhimov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Uzbekistan - Finnish Pedagogical Institute

Abstract: The article shows methods for teaching some algebraic equations and inequalities using the Cartesian coordinate system. When we teach algebraic equations and inequalities using these methods, students can easily learn how to solve equations and prove inequalities using geometric shapes.

Keywords: Cartesian coordinate system, equation, inequality, function, minimum and maximum values, modulus, solution, and triangle.

Дастлаб, $|x-a|+|x-b|=c$ кўринишдаги модулли тенгламани координата усулида ечиш алгоритмини назарий жиҳатдан асослашга ҳаракат қиламиз.

Берилган тенглама ечимга эга бўлиши учун c- номанфий сон бўлиши лозим. Айтайлик, a- манфий сон, b- мусбат сон бўлсин. Мос чизмани чизиб оламиз.

Маълумки, модул тушунчаси масофа маъносида қўлланилади, яъни $|x-a|$ деганда x нуқтадан a нуқтагача бўлган масофа тушунилади. Бунда қуйидаги ҳолатлар бўлиши мумкин.

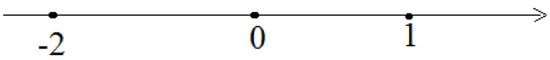
1) $x \in [a;b]$ бўлсин, у ҳолда, $b-a=c$ текширилади. Тенглик тўғри бўлса, ечим $x \in [a;b]$, акс ҳолда тенглама ечимга эга бўлмайди.

2) $x \notin [a;b]$ бўлсин, у ҳолда $x>b \;\; \text{ёки} \;\; x<a$ бўлади. Айтайлик $x>b$ бўлса, берилган тенгламанинг ечими $x-b+x-a=c \;\; \Rightarrow \;\; x=\dfrac{c+a+b}{2}$, иккинчи ҳолда $x<a$ бўлса, берилган тенгламанинг ечими $b-x+a-x=c \;\; \Rightarrow \;\; x=\dfrac{a+b-c}{2}$ формула ёрдамида аниқланади(Т. В. Автономова, 1993г.).

Энди бунга оид битта масала ечимини келтириб ўтамиз.

Масала. $|x+2|+|x-1|=7$ тенгламани ечинг.

Ечим. Юқоридаги каби дастлаб масала шартига мос чизма чизиб оламиз.



Кўриниб турибдики, $x \in [-2;1]$ ҳолатда тенглама ечимга эга эмас. Шу сабабли иккинчи ҳолатни текширамиз. $x \notin [-2;1]$ бўлсин. У ҳолда, $x>1$ бўлса, тенгламани ечими $x=\dfrac{7+(-2)+1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x=3$ бўлади. Иккинчи ҳолда $x<-2$ бўлса, берилган тенгламанинг ечими $x=\dfrac{-2+1-7}{2} \;\; \Rightarrow \;\; x=-4$ бўлади. Демак, жавоб $x=3 \;\; \text{ва} \;\; x=-4$.

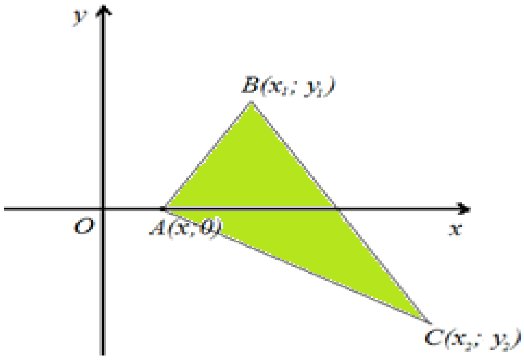
$|x-a|+|x-b|>c$ ёки $|x-a|+|x-b|<c$ кўринишдаги модулли тенгсизликларни ҳам координаталар методи ёрдамида ечиш усулларини юқоридаги каби кўрсатиб ўтиш мумкин(П., 1981г.).

Навбатдаги қадамда функциянинг энг кичик (энг катта) қийматини топишда координаталар системасидан фойдаланиш усули (Н.Рахимов., 7-8 march 2016.).

Намуна сифатида $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}$ кўринишдаги функциянинг энг кичик қийматини топиш алгоритмини қараб чиқамиз. Бунинг учун берилган функцияни қуйидагича шакл алмаштирамиз.

$$f(x)=\sqrt{(x-x_1)^2+(0\pm y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(0\mp y_2)^2}$$

У ҳолда, f(x) – функциянинг охирги ифодасидан координаталар системасида учлари берилган нуқталарда бўлган ABC учбурчакни ясаб оламиз(1-расм).



1-расм. Масала шартига мос шакл.

Чизмадан кўришимиз мумкинки, берилган функция AB ва AC кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг, яъни $f(x)=|AB|+|AC|$. Учбурчак тенгсизлигидан $|BC|\le|AB|+|AC|$ муносабат ўринли бўлади. Демак, берилган функция ўзининг энг кичик қийматига A нуқта BC кесмада ётган ҳолатда эришади, яъни $f(x)_{\min}=|BC|$. У ҳолда, энг кичик қиймат

$$f(x)_{\min}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

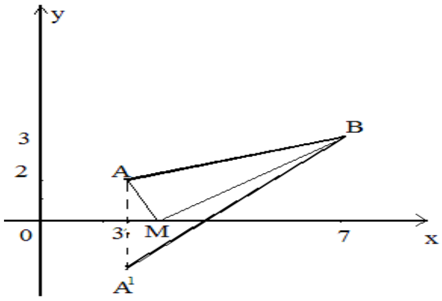
формула ёрдамида аниқланади. Қуйида бу формула ёрдамида функциянинг энг кичик қийматини топишга оид мураккаб математик масалалардан бирининг қулай ечимини келтириб ўтамиз (И.Гельфанд., 2007).

Масала. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг. (Н.Рахимов, 2017).

Ечим. Берилган функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.
$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}=\sqrt{(x-3)^2+2^2}+\sqrt{(x-7)^2+3^2}$$

Бундан кўринадики берилган функция M(x;0) нуқтадан A(3;2) ва B(7;3) нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндисига тенг.

Бунда $A'(3;-2)$ нуқта A нуқтага Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқта, яъни $AM+MB=A'M+MB$. Бу йиғиндининг энг кичик қиймати учбурчак тенгсизлигига кўра $A'(3;-2)$ ва B(7;3) нуқталар орасидаги масофага тенг бўлади. Функция ўзининг энг кичик қийматига A', M ва B нуқталар бир тўғри чизиқда ётган ҳолдагина эришади. Демак, $|A'B|=\sqrt{(7-3)^2+(3+2)^2}=\sqrt{41}$ бўлади. (А., 1996).



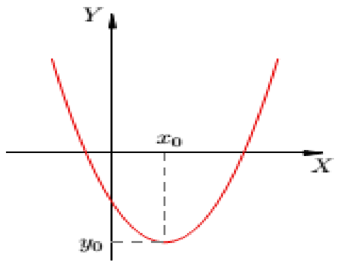
2-расм. Масала шартига мос шакл.

Қуйида параметрга боғлиқ квадрат тенгламаларни координаталар системасидан фойдаланиб ўқитишга оид бир нечта тавсияларни бериб ўтамиз.

Дастлаб, баъзи - бир асосий тасдиқларни келтириб ўтамиз. ax^2+bx+c (bunda $a\neq 0$) ифода квадрат учҳад; $f(x)=ax^2+bx+c$ (bunda $a\neq 0$) - квадрат функция; унинг графиги эса $y=ax^2$ параболани параллел кўчириш натижасида ҳосил қилиниши бизга маълум.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

эканлигидан парабола учининг координаталари $x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ бўлади. Квадрат функцияда a>0 (парабола шохлари юқорига йўналган) ва $D>0$ ($D=b^2-4ac$ - дискриминант) бўлса, квадрат функция графигининг ох ўқига нисбатан вазияти қуйидагича кўринишда бўлади:



3-расм. Масала шартига мос шакл.

Маълумки, $D>0$ шартда квадрат тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга бўлади.

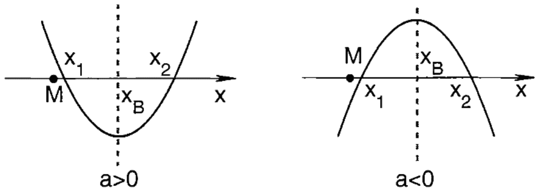
Бизга $f(x)=ax^2+bx+c$ (bunda $a>0$) квадрат функция берилган бўлсин. Агар қандайдир т сони учун $f(m)<0$ тенгсизлик ўринли бўлса, $ax^2+bx+c=0$ тенглама иккита турли илдизга эга бўлади (А.А., 1996г).

Қуйида квадрат функциянинг координаталар системасидаги графиги, яъни парабола учун баъзи - бир муҳим хоссаларни келтириб ўтамиз

(Kh.K.Khaknazarova., N.N.Rakhimov and Kh.K.Khaknazarova. Methods of using the parabola quadratic equations to solve a parameter. SOI: 1.1/Year:2019).

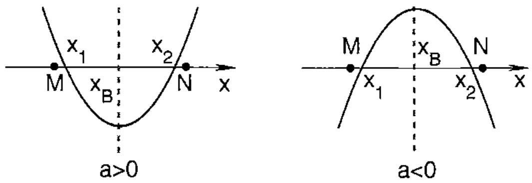
1-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг иккала илдизи ҳам M дан катта бўлган ҳол учун қуйидаги муносабатлар ва чизма ўринли бўлади, яъни

$$\begin{cases} x_1 > M \\ x_2 > M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$$



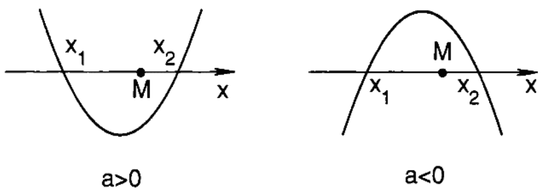
2-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг иккала илдизи ҳам (M;N) интервалда жойлашган ҳолат учун қуйидаги муносабат ва чизма ўринли бўлади.

$$x_1, x_2 \in (M;N) \Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 \in (M;N) \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases}$$



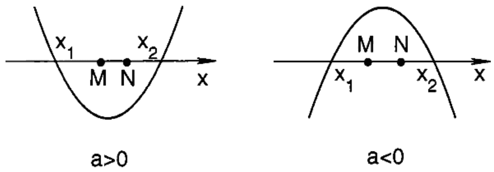
3-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функция ҳамда унинг илдизлари орасида олинган M нуқта учун қуйидаги тенгсизлик ва чизма ўринли бўлади.

$$x_1 < M < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot f(M) < 0$$



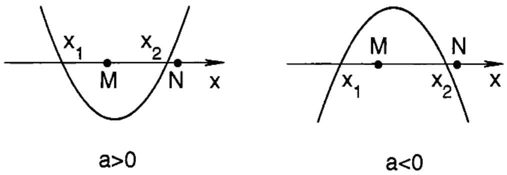
4-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функция ҳамда унинг илдизлари орасида олинган M ва N нуқталар учун қуйидаги тенгсизлик ва чизма ўринли бўлади.

$$x_1 < M < N < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \cdot f(M) < 0 \\ a \cdot f(N) < 0 \end{cases}$$



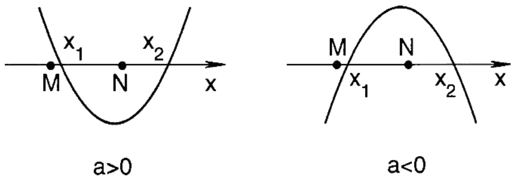
5-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функция ҳамда Ох ўқида олинган M ва N нуқталар учун $x_1<M<x_2<\mathrm{N}$ муносабат бажарилса, улар учун қуйидаги тенгсизлик ва чизма ўринли бўлади.

$$\begin{cases} a\cdot f(M)<0 \\ a\cdot f(N)>0 \end{cases}$$



6-хосса. Берилган $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат функция ҳамда Ох ўқида олинган M ва N нуқталар учун $M<x_1<N<x_2$ муносабат бажарилса, улар учун қуйидаги тенгсизлик ва чизма ўринли бўлади.

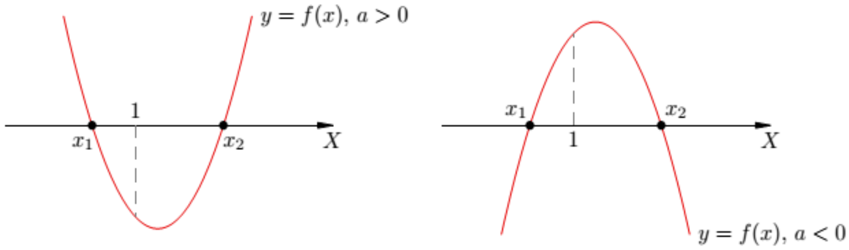
$$\begin{cases} a\cdot f(M)>0 \\ a\cdot f(N)<0 \end{cases}$$



Энди юқоридаги назарий маълумотлар асосида қуйида битта масала ечимини келтириб ўтамиз.

Масала. а параметрнинг қандай қийматларида $ax^2+2x+2a+1=0$ тенглама илдизларидан бири 1 дан кичик, иккинчи илдизи эса 1 дан катта бўлади (Н.Рахимов Ж. , 2017).

Ечим. Масала шартидан $a\neq 0$. Агар а>0 бўлса, парабола шохлари юқорига йўналган бўлиб, $f(1)<0$, аксинча а<0 бўлса, $f(1)>0$ бўлади. Бу иккита ҳол учун қуйидаги чизмани чизиб оламиз.



4-расм. Масала шартига мос шакл.

1- ҳолда a>0 ва $f(1)<0$, 2- ҳолда эса a<0 ва $f(1)>0$ муносабатлар ўринли бўлгани учун иккала ҳол учун умумий бўлган $a \cdot f(1)<0$ тенгсизликни ёза оламиз. У ҳолда, $a(3a+3)<0 \Leftrightarrow -1<a<0$ натижани оламиз. Демак, жавоб. $a \in (-1;0)$. (Kh.K.Khaknazarova., N.N.Rakhimov and Kh.K.Khaknazarova. Methods of using the parabola quadratic equations to solve a parameter. SOI: 1.1/Year:2019).

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Практикум по методике преподавания математики в средней школе. Учеб. пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. ин-тов./Т. В. Автономова, С. Б. Верченко, В. А. Гусев и др.- Под ред. В. И. Мишина. М.: Просвещение, 1993г.- 192 с.

2. N.N.Rakhimov and Kh.K.Khaknazarova. Methods of using the parabola quadratic equations to solve a parameter. SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS International Scientific Journal, ISSN: 2308-4944, Year:2019, Issue: 06, Vol:74 Impact Factor: ESJI(KZ)=8.716, IBI(India)=4.260, SIS(USA)=0.912, ICV(Poland)=6.630. Philadelphia,USA.

3. Н.Рахимов, Ж.Абдуллаев. Параметрли квадрат тенгламаларни координаталар системаси ёрдамида ўқитиш методлари. Аниқ фанларни касбга йўналтириб ўқитиш муоммолари ва ечимлари. Республика илмий-амалий анжуманининг илмий мақола ва тезислари тўплами. Навоий давлат педагогика институти, 23-ноябрь 2018 йил.

4. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами. – М.: Школа-Пресс, 1996г.

5. Н.Рахимов. Solving problems using coordinate planes / Решение задач с использованием координатных плоскостей. International scientific review NEW YORK. USA 7-8 march 2016. № 3 (13)

6. Рашукина Л. П. Координатный метод решения задач в восьмилеткой школе: Дисс.. канд. пед. наук. М., 1981г.- 301 с.

7. И.Гельфанд., Е.Глаголева., А.Кириллов. Метод координат. М., 2007

8. Кушнир И. А. Координатный и векторный методы решения задач. Киев: Астарта, 1996г. — 414 ст.

9. Н.Рахимов, Н.Турсунов, У.Абдуллаев. Масалаларни декарт координаталар системаси ёрдамида ечиш методлари. Аниқ фанларни касбга йўналтириб ўқитиш муоммолари ва ечимлари. Республика илмий-амалий анжуманининг илмий мақола ва тезислари тўплами. Навоий давлат педагогика институти, 23-ноябрь 2018 йил.