Hilbert fazosidagi chiziqli operatorlar va o'z-o'ziga qo'shma operatorlar spektri haqida

Yulduz Rasulovna Kurbonova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada Hilbert fazosidagi chiziqli operatorlar va qo'shma operatorlarning spektri haqida ma'lumotlar keltirilgan. Mavzuni to'liq yoritish uchun ta'rif, teoremalar va bir qator misollar yechib ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Hilbert fazosi, operatorlar, izomorf fazo, norma, chiziqli operator, chegaralangan operator, normallangan fazo, o'z-o'ziga qo'shma operator, xos qiymat, xos vektor, ortogonal, regulyar qiymat, spektr, rezolventa

On the spectrum of linear operators and self- adjoint operators in Hilbert space

Yulduz Rasulovna Kurbonova
Bukhara State University

Abstract: This article presents information about the spectrum of linear operators and joint operators in Hilbert space. A definition, a theorem and a number of examples are presented for complete coverage of the topic.

Keywords: Hilbert space, operators, isomorphic space, norm, linear operator, bounded operator, normalized space, is the joint operator to itself, eigenvalue, eigenvector, orthogonal, regular value, spectrum, resolvent

1. Hilber fazosidagi chiziqli operatorlar

1-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosiga Hilbert fazosi deyiladi.

Bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

Ixtiyoriy tabiatli f, g, φ,.... elementlarning H to'plami Hilbert fazosi bo'lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1) H- Evklid fazosi, ya'ni skalyar k'opaytma kiritilgan chiziqli fazo;

2) $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ metrika ma'nosida H-to'la fazo

3) H fazo- cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

2-ta'rif. Agar E va E* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinbo'lib,

x→ $x*, y \to y*, x, y \epsilon E$, x*,y*$\epsilon E^*$ ekanligidan x+y$\leftrightarrow x^* + y^*$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x^*$ va (x,y)=(x^*, y^*)

munosabatlar kelib chiqadi va E va E^* lar izomorf fazolar deyiladi.

1-teorema. Ixtiyoriy ikkita separabel Hilbert fazosi o'zaro izomorfdir [1].

3-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \qquad (x \in X, \quad y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bunday holda Ax mavjud va Ax$\in Y$ bo'lgan barcha x$\in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va D(A) kabi belgilanadi, ya'ni

$$D(A)=\{x\epsilon X: Ax\ mavjud\ va\ Ax \in Y\}.$$

Bunday holda D(A) ning chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab qilinadi, ya'ni agar x,y$\in D(A)$bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$ bo'ladi.

1-misol. Ushbu A:C[-1;1]→C[-1;1] (Ax)(t)=tx(t) operator chiziqli operator bo'ladi.

Yechish. Ixtiyoriy x,y$\epsilon C[-1;1]$ bo'lib $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun

$$(A(\alpha x + \beta y)(t) = t(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha t x(t) + \beta t y(t) =$$
$$= \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t)$$

bundan kelib chiqadiki A operator chiziqli operator bo'ladi.

5-ta'rif. Bizga $A: X \to Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\| x - x_0 \| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

7-ta'rif. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\| Ax_n - Ax_0 \| \to 0$ bo'lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

8-ta’rif. Bizga X normallangan fazoning M to’plami berilgan bo’lsin. Agar shunday C>0 son mavjud bo’lib , barcha xϵM uchun $\|x\| \leq C$ tengsizlik o’rinli bo’lsa M chegaralangan deyiladi.

9-ta’rif. X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo‘lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo‘lib, har qanday chegaralangan to‘plamni yana chegaralangan to‘plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta’rif ni keltiramiz.

10-ta’rif. $A: X \to Y$ chiziqli operator bo‘lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| Ax \| \leq C \cdot \| x \|$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

2-misol. Ushbu A:$l_2 \to l_2$ Ax=$(\frac{1}{5}x_1, \frac{1}{5^2}x_2, \frac{1}{5^3}x_3, \dots \dots . \frac{1}{5^n}x_n)$ operator chegaralangan operator bo’ladi.

Yechish. xϵl_2 bo’lsin, l_2 fazoda norma formulasi

$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$ kabi kiritilgan.

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{5^k} x_k \right|^2 \leq \frac{1}{25} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{25} \|x\|^2$$

$\|Ax\| \leq \frac{1}{5} \|x\|$ bu yerda C=$\frac{1}{5}$, demak A operator chegaralangan [2].

11-ta’rif. $\| Ax \| \leq C \cdot \| x \|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to‘plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\| A \|$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\| A \| = \inf C.$$

Bu ta’rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar chiziqli chegaralangan A operator biror X normallangan fazoni Y normallangan fazoga akslantirsa, u holda chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun quyidagi

$$\| A \| = \sup_{\| x \|=1} \| Ax \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

ifoda o'rinlidir.

1-tasdiq. Chiziqli chegaralangan A operatorning normasi uchun quyidagi

$$\sup_{\| x \|=1} \| Ax \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| Ax \|$$

tenglik o'rinli.

3-misol. A: C[0;1]→C[0;1] (Ax)(t)=tx(t) operatorning normasini toping

Yechish.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} 1\|x\| = 1$$

ushbu tengsizlikdan $\|A\| \leq 1$ kelib chiqadi.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ax_0\| = 1$$

$$\|x_0\|=1,\ x_0(t) = 1$$

deb olsak

$\left.\begin{matrix}\|A\| \geq 1 \\ \|A\| \leq 1\end{matrix}\right\}$ ushbu tengsizliklardan kelib chiqadiki $\|A\|=1$ ekan.

Faraz qilaylik biror X chiziqli normallangan fazoni Y chiziqli normallangan fazoga akslantiruvchichiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini L(X,Y) bilan belgilaymiz. Umuman olganda X=Y bo'lganda L(X,X)=L(X) ekanligi bizga ma'lum.

1-natija. Ixtiyoriy $A \in L(X,Y)$ va $x \in D(A)$, $\| x \| = 1$ uchun quyidagi

$$\| Ax \| \leq \| A \|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

12-ta'rif. Faraz qilaylik bizga A:X → Y va $A : X \to Y$ va $B : X \to Y$ chiziqli operatorlarning yig'indisi deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo'yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi [2]. Agar $A, B \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\| C \| = \| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$$

tengsizlik o'rinli.

Haqiqatan ham,

$$\| Cx \| = \| Ax + Bx \| \leq \| Ax \| + \| Bx \| \leq \| A \| \cdot \| x \| + \| B \| \cdot \| x \| \leq (\| A \| + \| B \|) \| x \|.$$

Bu yerdan $\| C \| = \| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ tengsizlik kelib chiqadi.

13-ta'rif. A chiziqli operatorning α songa ko'paytmasi x elementga αAx elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni

$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$

14-ta'rif. $A: X \to Y$ va $B: Y \to Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin. B va A operatorlarning ko'paytmasi deganda, har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA: X \to Z$ operator tushuniladi.

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatrlar bo'lsa, u holda Cham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va $\|C\| \leq \|B\|\|A\|$ tengsizlik o'rinli.

Haqiqatan ham $\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\|\|Ax\|_Y \leq \|B\|\|A\|\|x\|_X$

Bu yerdan $\|C\| \leq \|B\|\|A\|$ tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

4-Misol: A:C[-1;1]→ℂ

A(x)=2[x(1)-x(0)] chiziqli chegaralanganlikka tekshiring.

Berilgan A(x)=2[x(1)-x(0)] $x\epsilon[-1;1]$ Chiziqli ekanligi ma'lum .chegaralanganlikka tekshiramiz.

$|A(x)| = |2x(1) - 2x(0)| \leq 2|x(1)| + 2|x(0)| \leq (2+2) \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)| = 4\|x\|$

Demak A operator chegaralangan.

3-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A: X \to Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
2) A operator uzluksiz;
3) A operator chegaralangan.

2-natija. A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

15-ta'rif. Bizga $X, Y-$ chiziqli normalangan fazolar va $A: X \to Y$ chiziqli chegaralangan operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^*: Y^* \to X^*$ operator va ixtiyoriy $x \in X,\ g \in Y^*$ lar uchun

$$(g, Ax) = (A^* g, x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

5-Misol. A:$l_2 \to l_2$

Ax=$(\frac{1}{7}x_1, \frac{1}{7^2}x_2, \dots \dots \frac{1}{7^n}x_n \dots.)$ o'z o'ziga qo'shma operator ekanligini isbotlang.

Ixtiyoriy x,yϵl_2 uchun (x,y)=$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

(Ax,y)=$\sum_{k=1}^{\infty}(Ax)_x \overline{y_k}$=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}x_k\overline{y_k}$=$\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{\frac{1}{7^k}y_k}$=(x,Ay) bu tenglikdan kelib chiqadiki $A^* = A$ A operator o'z o'ziga qo'shma operator ekan.

Demak, har bir $g \in Y^*$ funksionalga $(f, x) = (g, Ax)$ tenglik bilan aniqlanuvchi $f \in X^*$ funksionalni mos qo'yuvchi $A^* : Y^* \to X^*$ operator A operatorga qo'shma operator deb ataladi.

Qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1. A^* operator chiziqli.
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3. Ixtiyoriy k son uchun $(kA)^* = kA^*$.
4. Agar A uzluksiz bo'lsa, u holda A^* ham uzluksiz bo'ladi.

4-teorema. Agar $A \in L(X, Y)$ bo'lsa, u holda $A^* \in L(Y^*, X^*)$ va $\|A^*\| = \|A\|$ tenglik o'rinli.

16-ta'rif. H Hilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar biror $A^* : H \to H$ operator va ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

6-misol: A:$L_2[-1; 1] \to L_2[-1; 1]$

$$(Ax)(t)=t\int_{-1}^{1} sx(s)ds$$

operatorning o'z o'ziga qo'shma operator ekanligini ko'rsating.

Yechish.

$$A: L_2[-1; 1] \to L_2[-1; 1]$$

$(Ax)(t)=t\int_{-1}^{1} sx(s)ds$ operatorni o'z - o'ziga qo'shmalikka tekshiring.

Yechish.

$(Ax,y)=\int_{-1}^{1}(Ax)(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-1}^{1}(t\int_{-1}^{1} sx(s)ds)\overline{y(t)}dt =$ $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} tsx(s)\overline{y(t)}dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} stx(t)\overline{y(s)}dtds = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{(t\int_{-1}^{1} sy(s)ds)}dt =$ (x, A^*y)

$(A^*y)(t) = t\int_{-1}^{1} sy(s)ds$

$$A^* = A$$

Demak A operator o'z –o'ziga qo'shma operator ekan.

7-ta'rif. Agar $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

7-misol. A,B $:L_2[-1;1] \to L_2[-1;1]$

(Ax)(t)=tx(t), (Bx)(t)=$t^2 \int_{-1}^{1} s^2 x(s)ds$ A va B operatorlarning o'z o'ziga qo'shma operator bo'lishini isbotlang [1].

Yechish. Birinchi bo'lib A operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lishini ko'rsatamiz.

$$(Ax,y)=\int_{-1}^{1}(Ax)(t)\overline{y(t)}dt$$

$$(Ax,y)=\int_{-1}^{1} tx(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-1}^{1} x(t)t\overline{y(t)}dt = (x,Ay)$$

bu tenglikdan kelib chiqadiki $A^* = A$ A operator o'z–o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Endi B operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini ko'rsatamiz

$$(Bx)(t)=t^2 \int_{-1}^{1} s^2 x(s)ds$$

$$(Bx,y)=\int_{-1}^{1}(Bx)t\overline{y(t)}dt = \int_{-1}^{1} t^2 \int_{-1}^{1} s^2 x(s)ds\overline{y(t)}dt =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} t^2 s^2 x(s)\overline{y(t)}dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} s^2 t^2 x(t)\overline{y(s)}dtds =$$

$$\int_{-1}^{1} x(t)(t^2 \int_{-1}^{1} s^2 y(s)ds)dt = (x, B^* y)$$

bu tenglikdan kelib chiqadiki $B^* = B$ B operator ham o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Hilbert fazosida qo'shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1-lemma. Agar $A, B \in L(H)$ bo'lsa, u holda

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$,

2) $(AB)^* = B^* A^*$,

3) $(A^*)^* = A$ tengliklar o'rinli.

8-misol. Berilgan A:$L_2[0;1] \to L_2[0;1]$

(Ax)(t)=$(t^2 + t + 1)\int_0^1 x(s)ds$ operatorga qo'shma operatorni toping.

Yechish. A:$L_2[0;1] \to L_2[0;1]$

(Ax)(t)=$(t^2 + t + 1)\int_0^1 x(s)ds$

(x,y)=$\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$

(Ax,y)=(x,$A^* y$)

(Ax,y)=$\int_0^1 (t^2 + t + 1)\int_0^1 x(s)ds\,\overline{y(t)}dt$=$\int_0^1\int_0^1 (t^2 + t + 1)x(s)\overline{y(t)}dsdt$

(Ax,y)=$\int_0^1\int_0^1 x(s)\,(t^2 + t + 1)\overline{y(t)}dtds$

(Ax,y)=$\int_0^1 x(t)(\int_0^1 (s^2 + s + 1)y(s)ds)dt = (x, A^* y)$

$(A^* y)(t) = \int_0^1 (s^2 + s + 1)y(s)y(s)ds$ bu tenglikdan kelib chiqadiki A$\neq A^*$ demak A operator o'z-o'ziga qo'shma operator emas ekan.

2. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar va uning spektri

Bizga H- Gilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar $\forall x, y \in H$ elementlari uchun quyidagi

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

shartni qanoatlantiruvchi A^* operatorga A ning qo'shmasi deyiladi va agar $A^* = A$ tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni $\forall x, y \in H$ elementlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operatorga o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

1-lemma: H- kompleks Gilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiy bo'ladi.

2-lemma: Operator o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan bo'lsa, u holda har qanday xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonal bo'ladi.

1-teorema: λ kompleks soni o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan A operator regulyar qiymati bo'lishi uchun shunday $C > 0$ son topilib, hamma $x \in H$ nuqtalarda

$$\|A_\lambda x\| = \|Ax - \lambda x\| \geq C\|x\|$$

tengsizlik ning bajarilishi zarur va yetarkidir.

1-natija: λ kompleks soni A o'z-o'ziga qo'shma operator spektriga tegishli bo'lishi uchun $\exists \{x_n\}$ ketma-ketlik topilib, quyidagi

$$\|A_\lambda x_n\| \leq C_n\|x\|,\ C_n \to \infty, n \to \infty$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$\|A_\lambda x_n\| \leq C_n\|x\|,\ C_n \to \infty, n \to \infty$$

munosabatda $\|x_n\| = 1$ deb olish mumkin, unda

$$\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0, \|x_n\| = 1$$

bo'ladi.

2-teorema: $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ kompleks soni o'z-o'ziga qo'shma bo'ladigan A operatorning regulyar qiymatidir.

3-teorema: O'z-o'ziga qo'shma bo'lgan A operatorning spektri haqiqiy sonlar o'qidagi $[m, M]$ kesmada yotadi, bu yerda

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x), M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$$

4-teorema: Agar A operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa, unda $m\ va\ M$ sonlari A ning spektriga tegishli bo'ladi.

1-natija: Ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma operator bo'sh bo'lmagan spektrga ega bo'ladi.

9-misol: $C[a, b]$ fazoni o'z-o'ziga aks ettiruvchi va

$$(Ax)(t) = tx(t)$$

formula bilan aniqlangan A operatorni ko'ramiz. A operatorning spektri va rezolventasini topamiz.

Yechish: Avval $A-\lambda l$ operatorni va unga teskari operator bo'lgan $R_\lambda(A)$ rezolventasini topamiz. Har qanday $x \in C[a,b]$ uchun

$$(A-\lambda t)x(t)=(t-\lambda)x(t)$$

bo'lgani uchun $Ax=\lambda x$ tenglik $(t-\lambda)x(t)=0$ tenglikka teng kuchli bo'ladi. Ixtiyoriy $\lambda \in C[a,b]$ uchun $(t-\lambda)x(t)=0$ tenglama yaqona aynan nolga teng uzluksiz bo'lgan yechimga ega, shuning uchun A operatorning xos qiymati mavjud emas. Unda teoremaga ko'ra istalgan $\lambda \in C[a,b]$ uchun $A-\lambda I$ operator teskarilanuvchan bo'ladi. Lekin, $\lambda \in (a,b)$ bo'lganda,

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t)$$

formula bilan berilgan $(A-\lambda I)^{-1}$ operator aniqlangan elementlar to'plami $C[a,b]$ fazoning qizmi bo'lib, unga teng kuchli emas. Misol uchun $x_0(t)=C, C\neq 0$ deb olsak, $x_0 \in C[a,b]$, lekin $(A-\lambda I)^{-1}x_0 \notin C[a,b]$ bo'ladi. Bulardan tashqari, $\lambda \in [a,b]$ uchun $(A-\lambda I)^{-1}$chegaralanmagan operator. Buni isbotlsymiz.

Agar n yetarlicha katta bo'lsa unda $\lambda+\frac{2}{n}<b$ bo'ladi va

$$x_n(t)=\begin{cases} 0, a\leq t<t_1(n) \\ n(t-\lambda)-1, t_1(n)\leq t\leq t_2(n) \\ 1, t_2<t\leq b \end{cases}$$

funksiyalar ketma-ketligi $C[a,b]$ toplamga tegishli bo'ladi [2]. Bunda $t_1=t_1(n)=\lambda+\frac{1}{n}, t_2=t_2(n)=\lambda+\frac{2}{n}$. Qurilishiga ko'ra $\|x_n\|=1$ ga teng. Ana endi quyidagi $\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|(A-\lambda I)^{-1}x_n\|=\max_{a\leq t\leq b}\left|\frac{1}{t-\lambda}x_n(t)\right|\geq\frac{n}{2}\left[n\left(\lambda+\frac{2}{n}-\lambda\right)-1\right]=\frac{n}{2}$$

Shunday ekan, $\lambda \in (a,b)$ bo'lganda $(A-\lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator bo'ladi. Demak, $(a,b)\subset\sigma(A)$. Endi $\lambda \notin [a,b]$ holni qaraymiz, bu holatda istalgan $x\in C[a,b]$ uchun $(t-\lambda)^{-1}x(t)$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun $(A-\lambda I)^{-1}$ operator fazoning hamma elementlarida aniqlangan va

$$\|(A-\lambda I)^{-1}x\|\leq\frac{1}{\min\limits_{a\leq t\leq b}\{|t-\lambda|\}}\|x\|$$

tengsizlik o'rinli. Shunday ekan, istalgan $\lambda \notin [a,b]$ son A operator uchun regulyar nuqta bo'la oladi. Spektri yopiq to'plam bo'lgani uchun berilgan A operatorning spektri $\sigma(A)=[a,b]$ kesmadan iborat bo'ladi. $C\setminus[a,b]$ to'plam esa A operatorning rezolventasi to'plami bo'ladi. A ning $\lambda\in C\setminus[a,b]$ nuqtadagi rezolventasi:

$$R_\lambda(A)x(t)=(A-\lambda I)^{-1}x(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t), \lambda\in\rho(A)=C\setminus[a,b]$$

formula asosida aniqlanadi.

10-misol: Kompleks $L_2[0,1]$ Gilbert fazosida quyidagi

$$Ax(t) = tx(t) + \int_0^1 tsx(s)ds, x \in L_2[0,1]$$

tenglik bilan aniqlangan operatorning spektri va rezolventasi topilsin.

Yechish: A ning xos qiymatini topish uchun quyida bayon qilingan tasdiqdan foydalanamiz:

1-tasdiq: $\lambda \in C \setminus [0;1]$ kompleks soni A ning xos qiymati bo'lishi uchun

$$\Delta\lambda := 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds = 0$$

tenglikni isbotlashimiz zarur va yetarlidir.

Isboti: (Zaruriyligi) Aytaylik, $\lambda \in C \setminus [0;1]$ A ning xos qiymati bo'lsin: biror nolmas $x \in L_2[0;1]$ element uchun

$$Ax(t) = tx(t) + \int_0^1 tsx(s)ds = \lambda x(t)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Unda

$$(t-\lambda)x(t) + t\alpha_x = 0$$

$$\alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds$$

bo'ladi. Bunda agar $\alpha_x = 0$ bo'lsa,

$$(t-\lambda)x(t) + t\alpha_x = 0$$

tenglik $(t-\lambda)x(t) = 0$ tenglikka aylanadi. Bu yerdan x ning qiymati nolga teng bo'lishiga ega bo'lamiz. Tanlanishiga ko'ra esa $x \neq 0$. Demak, shunday ekan, $\alpha_x \neq 0$.

$$(t-\lambda)x(t) + t\alpha_x = 0$$

tenglikdan

$$x(t) = -\frac{\alpha_x \cdot t}{t-\lambda}$$

ni topib olamiz va bu tenglikni

$$\alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds$$

ga qo'yib

$$\alpha_x = -\alpha_x \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds$$

tenglikka erishamiz. $\alpha_x \neq 0$ bo'lganidan

$$\Delta(\lambda) = 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds = 0$$

tenglik hosil bo'ladi.

(Yetarliligi) Aytaylik, $\lambda \in C \setminus [0;1]$ kompleks son uchun $\Delta\lambda = 0$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Unda $x(t) = t(t-\lambda)^{-1}$ funksiyani olamiz,

$$(A - \lambda I)x(t) = (t-\lambda)\frac{t}{t-\lambda} + t\int_0^1 s\frac{s}{s-\lambda} ds = t\left(1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds\right) = t\Delta(\lambda) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan λ son A operator uchun xos qiymat bo'lishi va $x(t) = \frac{t}{t-\lambda}$ unga mos xos funksiya bo'lishi kelib chiqadi.

A ning $[0;1]$ kesmadan tashqaridagi xos qiymatlarini topamiz:

Barcha $-\lambda$ lar uchun

$$\Delta(\lambda) = 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda} ds \geq 1$$

tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari $Im\lambda \neq 0$ bo'lsa $\Delta(\lambda) \neq 0$ hosil qilish murakkab emas. 1.1.1-tasdiqqa ko'ra A operator $\lambda > 1$ xos qiymatlarga ega bo'lishi mumkin. Aytaylik $\lambda > 1$ bo'lsin, unda

$$\Delta'(\lambda) = \int_0^1 \frac{s^2}{(s-\lambda)^2} ds > 0$$

$$\lim_{\lambda \to 1} \Delta(\lambda) = -\infty; \ \lim_{\lambda \to \infty} \Delta(\lambda) = 1$$

shartlar o'rinli bo'ladi. Bundan $(1;\infty)$ intervalda $\Delta(\lambda)$ ning o'sishi va yagona $\lambda_0 \in (1;\infty)$ nuqtada $\Delta(\lambda_0) = 0$ tenglik bajarilishi hosil bo'ladi. Shunday qilib, $[0;1]$ kesmadan boshqa A ning bitta xos qiymati mavjud ekanligiga erishamiz. Masalan, $\lambda \in C \setminus [0;1]$ son A ning xos qiymati bo'lmasin. $A - \lambda I$ operatorga teskari operatorni aniqlaymiz:

$$(A - \lambda I)x(t) = (t-x)x(t) + t\int_0^1 sx(s)ds = y(t), x, y \in L_2[0;1]$$

tenglikdan

$$\alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds$$

ni olgan holatda $x(t)$ ni topib olamiz:

$$(t-\lambda)x(t) + t \cdot \alpha_x = y(t),$$

bundan

$$x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} - \alpha_x \frac{t}{t-\lambda}$$

$x(t)$ uchun olingan

$$x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} - \alpha_x \frac{t}{t-\lambda}$$

ifodani

$$\alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds$$

ga qo'ysak, α_x uchun

$$\alpha_x = \int_0^1 \frac{sy(s)}{s-\lambda}ds - \alpha_x \int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda}ds$$

tenglamaga erishamiz. Bundan esa $\Delta(\lambda) \neq 0$ ekanligidan

$$\alpha_x = \frac{1}{\Delta\lambda}\int_0^1 \frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$$

hosil bo'ladi. Bundan,

$$x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} - \frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1 \frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$$

kelib chiqadi.

Shunday ekan, A ning rezolventasi quyidagi

$$R_\lambda(A)y(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} - \frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1 \frac{sy(s)}{s-\lambda}ds\,, y \in L_2[0;1]$$

formula yordamida aniqlanadi.

Bu olingan natijalardan ko'rinadiki, agar $\lambda \in C \setminus \{[0;1] \cup \{\lambda_0\}\}$ bo'lsa, unda $D\big(R_\lambda(A)\big) = L_2[0;1]$ va $R_\lambda(A)$ chegaralangan, bunda $\lambda_0 \in (0;\infty)$ va $\Delta(\lambda_0) = 0$ b) $\lambda \in [0;1]$ bo'lsin, unda $Im(A-\lambda I) \neq L_2[0;1]$, sababi $y_0(t) \equiv 1$ funksiyani olsak $y_0 \notin Im(A-\lambda I)$. Shunday ekan, $D(R_\lambda(A)) \neq L_2[0;1]$ va shu sabab $\lambda \in \sigma(A)$. Demak, A ning spektri $\sigma(A) = [0;1] \cup \{\lambda_0\}$ to'plamdan iborat, bunda $\lambda_0 \in (0;\infty)$ va $\Delta(\lambda_0) = 0$.

Yuqorida keltirilganlardan shuni xulosa qilish mumkinki, aksariyat fizik, biologik, kimyoviy va iqtisodiy masalalarning matematik modellari chiziqli fazolarda kiritilgan funksionallar orqali o'rganiladi. Shu bilan bir qatorda, oddiy va xususiy hosilali matematik fizika tenglamalari [3-32], biologik jarayonlarning matematik modellari chiziqli fazolarda o'rganilib [33-38], ularning yechimlari tahlil qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rasulov T.H., Ismoilova D.E. O’z-o’ziga qo’shma operatorlar o’quv metodik qo’llanma, 2021-yil.

2. Abdullayev J.I Lakayev S.N. On the Spectral Propert Расулов of the Matrix-Valued Friedrichs Model. Manyparticles Hamiltonians, spectrum and scattering.//Advances in soviet Mathematics. American Mathematical Society. 1191. 5.pp.1-37.

3. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta’lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g’oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

13. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

16. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

17. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

18. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

19. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

20. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

21. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

22. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.

23. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.

24. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.

25. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.

26. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

27. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

28. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

29. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

30. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

31. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

32. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

33. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

34. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

35. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

36. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

37. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.

38. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.