O'quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o'qitish metodikasi

N.Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
B.Mamasidikov
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Maqolada sonning butun va kasr qismi qatnashgan *y=[x]* hamda *y={x}* funksiyalar va ularning xossalari, asosiy teoremalar, ayniyatlar, tenglama va tengsizliklarni yechishga oid masalalar, turli hil matematik turnirlar va olimpiadalarda taklif etilgan ayrim masalalar va ularning yechimlari keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar: Butun va kasr qismlar, ta'rif, funksiya, grafik, masala va yechim

Methodology of teaching students to equations in which the integer and fraction part of a number are multiplicated

N.Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
B.Mamasidikov
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: In the article, the functions y=[x] and y={x} in which the whole and fractional parts of the number are involved and their properties, basic theorems, equations, problems related to solving equations and inequalities, some problems proposed in various mathematical tournaments and Olympiads and their solutions are given.

Keywords: Whole and fractional parts, definition, function, graph, problem and solution

Amaliyotda miqdorlarni o'lchash uchun bajarilayotgan arifmetik hisoblashlar natijasida butun sonlardan farqli kasr sonlar bilan ifodalanuvchi sonlarni ham uchratamiz. Masalan, $128 \div 5 = 25{,}6;$ $-4{,}3 \cdot 2{,}8 = -12{,}04$ va hokazo. Keltirilgan misollarning birinchisida bo'linma 25,6 ga teng bo'lib, 25 uning butun qismini, 0,6 esa kasr qismini tashkil etadi, ikkinchisida esa ko'paytma -12,04 ga teng bo'lib, -13 uning butun qismini, 0,9 esa uning kasr qismini tashkil etadi.

Ta’rif. *Haqiqiy x sonidan ortmaydigan eng katta n butun soniga, x sonining butun qismi deyiladi va* [*x*] *kabi belgilanadi, x -* [*x*] *miqdoriga esa x sonining kasr qismi deyiladi va u* {*x*} *kabi belgilanadi.*

Demak, istalgan *x*-haqiqiy son $x=[x]+\{x\}$ ko‘rinishda ifoda qilinadi, bu yerda $[x]$-son x -ning butun qismi, $\{x\}$-son x-ning kasr qismi (N.Raximov, November, 2022y.).

Bunda x soni $[x]\le x<[x]+1$ oraliqda, x ni kasr qismi esa $0\le\{x\}<1$ oraliqda bo‘ladi.

Sonning butun va kasr qismi haqidagi tushunchalar matematikaning ko‘plab sohalarida uchraydi va ba’zi hollarda tushunchalarni ixcham yozilishiga imkoniyat yaratadi.

Masalan, natural sonlar qatorida *p* tub songa bo‘linadiganlarining soni $\left[\frac{n}{p}\right]$ ga, p^2 ga bo’linadiganlarining soni esa $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ga va umuman olganda p^m ga bo’linadiganlarining soni $\left[\frac{n}{p^m}\right]$ga teng ekanligiga oson ishonch hosil qilishimiz mumkin. Shu sababli *p* tub son *n*! tarkibiga $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]+\ldots$ daraja bilan kiritiladi va hokazo.

1-masala. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2020$ ko‘paytma nechta nol bilan tugaydi.

Yechim. Berilgan ko‘paytmaning kanonik shakli $2^{a_1}\cdot3^{a_2}\cdot5^{a_2}\cdot\ldots\cdot p^{a_n}$ bo‘lsin. Bundan a_1 va a_3 larni topamiz.

$$a_1=\left[\frac{2020}{2}\right]+\left[\frac{2020}{4}\right]+\left[\frac{2020}{8}\right]+\left[\frac{2020}{16}\right]+\ldots+\left[\frac{2020}{1024}\right]=2013$$

$$a_3=\left[\frac{2020}{5}\right]+\left[\frac{2020}{25}\right]+\left[\frac{2020}{125}\right]+\left[\frac{2020}{625}\right]=404+80+16+3=503$$

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot2020=2^{2013}\cdot5^{503}\cdot A=B\cdot10^{503}$. Demak, berilgan ko‘paytma 503 ta nol bilan tugaydi.

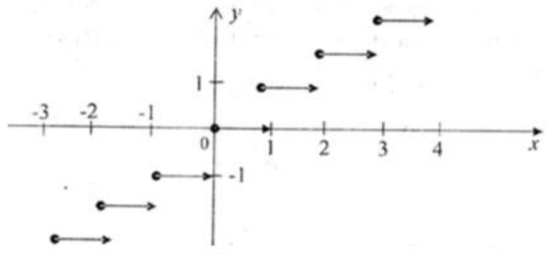
Ma’lumki, *a* sonning tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun *a* ni $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ dan kichik bo‘lgan tub sonlarga bo‘lish shart. Agar *a* son $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ dan kichik bo‘lgan birorta tub songa bo‘linmasa, bu holda *a* tub son bo‘ladi.

2-masala. (97-9-14) 3607 sonini tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma-ket 2, 3, 5 va hokazo tub sonlarga bo‘lib boriladi. Qanday tub songa yetganda bo‘lishni to‘xtatish mumkin? A) 41 B) 43 C) 47 D) 59

Yechim. $\left[\sqrt{a}\right]=\left[\sqrt{3601}\right]=[60{,}008]=60$ ekanligidan, 3601 sonini tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun 60 dan kichik eng katta tub songacha bo‘lib xulosa qilish kerak. Demak, 59 gacha bo‘lish kerak. Javob: 59 (D).

Endi haqiqiy *x* sonning butun va kasr qismini ifodalovchi *y=[x]*, *y={x}* funksiyalar va ularning eng sodda xossalarini ko‘rib chiqamiz.

Sonning butun qismi ta’rifidan foydalanib, nuqtalarni belgilash orqali *y=[x]* funksiya grafigini bevosita chizishimiz mumkin (1-chizma).



1-rasm

y=[*x*] funksiyaning eng sodda xossalari quyidagilardan iborat:

1. *y=[x]* funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R dan iborat.

2. *y=[x]* funksiyaning qiymatlar sohasi barcha butun sonlar to‘plami Z dan iborat.

3. *y=[x]* bo‘lakli o‘zgarmas funksiya.

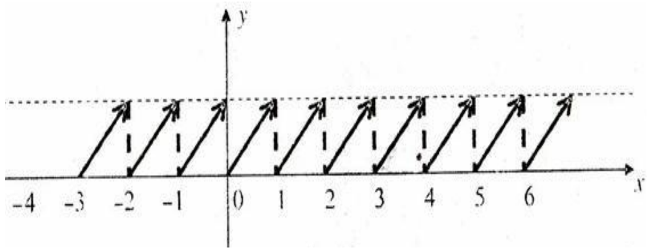
4. *y=[x]* funksiya kamaymaydigan funksiyadir, ya’ni R to‘plamning $x_1 \le x_2$ shartni qanoatlantiruvchi x_1 va x_2 funksiyalari uchun $[x_1] \le [x_2]$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

5. Ixtiyoriy butun *n* soni va haqiqiy *x* soni uchun *[x+n]=[x]+n* tenglik orinli.

6. Agar *x* butun bo‘lmagan haqiqiy son bo‘lsa, u holda *[-x]=-[x]-1* tenglik o’rinli.

7. Ihtiyoriy haqiqiy *x* soni uchun $[x] \le x < [x]+1$ munosabat bajariladi, *[x]=x* tenglik esa faqat va faqat $x \in Z$ bo‘lgan holatda bajariladi.

Sonning kasr qismi ta’rifidan foydalanib, nuqtalarni belgilash orqali *y*={*x*} funksiya grafigini *y*=*x*-[*x*] funksiya grafigidan hosil qilishimiz mumkin (2-chizma).



2-rasm

y={*x*} funksiyaning eng sodda xossalari quyidagilardan iborat:

1. $y=\{x\}$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R dan iborat.

2. $y=\{x\}$ funksiyaning qiymatlar to‘plami [0,1) yarim intervaldan iborat, ya’ni $y=\{x\}$ funksiya chegaralangan bo’lib, $0 \le \{x\} < 1$ tengsizlik o‘rinli.

3. Ixtiyoriy butun *n* soni va haqiqiy *x* soni uchun $\{x+n\}=\{x\}$ tenglik o‘rinli, ya’ni $y=\{x\}$ funksiya davri 1 ga teng bo‘lgan davriy funksiyadir.

4. Agar x butun bo’lmagan haqiqiy son bo’lsa, u holda {-x}=-1-{x} tenglik o‘rinli.

Sinfda yangi materialni o‘rganishda qo‘llaniladigan usullardan yana biri bu o‘quvchilarning mustaqil ishlaridir. O‘quvchilarning mustaqil ishlarida misol va masalalar yechishni mashq qilish, teorema isbotlarini turli xil usullarda bajarish (agar imkoni bo‘lsa), mavzu mazmuniga qarab natijaviy formulalarni chiqarish va unga doir misollar yoki masalalarni tatbiq qilish kabi o‘quv metodik ishlar amalga oshiriladi. Masalan, o‘qituvchi sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechishdan oldin kasrli sonlar ustida 4 amalga doir misollarda vazifa qilib berish, o’nli kasrlarga doir sodda, 1-darajali bir noma’lumli tenglamalarni yechishga doir bo’lgan misollardan ishlab kelishni mustaqil ish sifatida bersa, o‘quvchilarni yangi mavzu bo‘yicha oladigan bilimlari chuqur va mantiqiy ketma-ketlikga ega bo‘ladi. Bunda o‘qituvchi har bir o‘quvchini qo‘yilgan topshiriq mazmunini ochishdagi xato va kamchiliklarini to‘g‘rilab borishi lozim bo‘ladi. Shundagina mustaqil ishlash usuli orqali o‘quvchilar bilimini takomillashtirish mumkin bo‘ladi. Quyida mavzuga oid ba’zi masalalar yechimlarini qarab o‘tamiz.

3-masala. Tenglamani yeching: $[x]=3x+1$

Yechim. $[x]=n,$ (bunda $n \in Z$) belgilash olamiz. U holda, $3x+1=n$ bo‘lib, bundan $x=\frac{n-1}{3}$ ekanini topamiz. Yuqoridagi $[x] \le x < [x]+1$ tengsizlikka asosan $n \le \frac{n-1}{3} < n+1$ tengsizlikni yoza olamiz. Bu esa $\begin{cases} n \le \frac{n-1}{3} \\ \frac{n-1}{3} < n+1 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasiga teng kuchli. Tengsizliklar sistemasini yechib, $-2 < n \le \frac{-1}{2}$ yechimga ega bo‘lamiz. Bu oraliqdagi butun son *n*=-1 bo‘ladi. U holda, $x=\frac{n-1}{3}=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$. Javob: $x=-\frac{2}{3}$ (Rahimov., 2020).

4-masala. Tenglamani yeching. $7x-4[x]=3\{x\}+8$

Yechim. $x=[x]+\{x\}$ ekanligidan: $7([x]+\{x\})-4[x]=3\{x\}+8$ yoki $\{x\}=\frac{8-3[x]}{4}$.

Ma'lumki, $0\le\{x\}<1$ ekanligidan, $0\le\frac{8-3[x]}{4}<1$ bo'lib, bundan $\frac{4}{3}<[x]\le\frac{8}{3}$ kelib chiqadi. $[x]$-butun son ekanligidan $[x]=2$ ekani ma'lum bo'ladi. U holda, $\{x\}=\frac{8-3[x]}{4}=\frac{8-6}{4}=\frac{1}{2}$. Demak, $x=[x]+\{x\}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$ Javob: $x=\frac{5}{2}.$

5-masala. Tenglamani yeching. $x^2-8[x]+7=0$.

Yechim. Berilgan tenglamaning ildizi *x* bo'lsin. $n=[x]$ deb olsak, $x^2+7=8n$ bo'ladi. Demak, *n*>0. Endi $n=[x]$ belgilashdan $n\le x<n+1$ ni yoza olamiz. Oxirgi musbat hadli tengsizlikni kvadratga ko'tarib 7 ni hadma-had qo'shsak, $n^2+7\le x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$ ni hosil qilamiz, $x^2+7=8n$ ekanligidan,

$n^2+7\le 8n<n^2+2n+8$ tengsizlikni hosil qilamiz. Endi bu tengsizlikka teng kuchli bo'lgan quyidagi tengsizliklar sistemasini yozamiz va yechimni topamiz:

$$\begin{cases} n^2+7\le 8n \\ 8n<n^2+2n+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le n\le 7 \\ n<2 \text{ va } \mathrm{n}>4 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le \mathrm{n}<2 \text{ yoki } 4<\mathrm{n}\le 7$$

(N.Raximov, Maktab o'quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko'nikmasini shakllantirish. , 2022/3/26).

Oxirgi natijadan va n-butun son ekanligidan *n*=1, 5, 6, 7 holatlar bo'lishi mumkin.

Bu qiymatlarni navbatma-navbat $x^2+7=8n$ ifodaga qo'yib *x* ning qiymatlarini topamiz(bunda $n\le x<n+1$ ekanidan *x*>0). Javob: $1;\ \sqrt{33};\ \sqrt{41};\ 7$.

6-masala. $\int_0^2[\mathrm{x}^2]dx$ aniq integralni hisoblang.

Yechim. Bu integralni dastlab oraliqlarga ajratib olamiz:

$$I=\int_0^2[\mathrm{x}^2]dx=\int_0^1[\mathrm{x}^2]dx+\int_1^{\sqrt{2}}[\mathrm{x}^2]dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}[\mathrm{x}^2]dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}[\mathrm{x}^2]dx.$$

$$I=\int_0^1 0dx+\int_1^{\sqrt{2}}1dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}3dx=x\,|_1^{\sqrt{2}}+2x\,|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+x\,|_{\sqrt{3}}^{2}=(\sqrt{2}-1)+$$

$$+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+3(2-\sqrt{3})=\sqrt{2}-1+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6-3\sqrt{3}=5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Javob: $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (N.Raximov, November, 2022y.).

Foydalanilga adabiyotlar

1. N.Raximov, B.Mamasidikov. Methods of solving equations related to whole and fractional part of a number. Eurasian Research Bulletin. Volume 14, November, 2022y. Page:190-192.

2. N.Raximov, B.Mamasidikov. Maktab o‘quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko‘nikmasini shakllantirish. Science and Education. 2022/3/26. Page:739-743.

3. N. Rahimov. Matematikadan nostandart masalalar, 1-qism. Uslubiy qo‘llanma. Samarqand-2020y.