Funksionallar va ularning ekstremumlari haqida. Gamilton-Yakobi tenglamasi

Alijon Xayrulloyevich Avezov
Shahzodabonu Voxid qizi Toshpo'latova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada funksional analiz fanida keng qo'llaniladigan funksionallar va ularning ekstremumlari hamda Gamilton-Yakobi tenglamalarining amaliy tadbiqlari haqida ma'lumotlar tahlili keltirilgan. Mavzuni talabalarga tushuntirish bo'yicha alohida sxema ishlab chiqilgan. Lagranj bo'yicha kuchsiz ma'noda differensiallash, funksionalning ekstremumi, ekstremumning zaruriy va etarli shartlari bayon qilinib, har biri bo'yicha misollar echib ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: funksional, ekstremum, funksional orttirmasi, differensial va birinchi variatsiya, Gamilton-Yakobi tenglamasi, o'tkazgich, atmosfera qarshiligi, integral, variatsion hisob, funksionalning birinchi variatsiyasi, funksionalning ikkinchi variatsiyasi, to'plam

About functionals and their extremes. Hamilton-Jacobi equation

Alijon Xayrulloyevich Avezov
Shahzodabonu Voxid qizi Toshpulatova
Bukhara State University

Abstract: The article provides information on functionals and their extremums and practical applications of Hamilton-Jacobi equations, which are widely used in the field of functional analysis. A separate scheme for explaining the topic to students has been developed. Lagrangian weak differentiation, extremum of a functional, necessary and sufficient conditions for an extremum are described, and examples are given for each of them.

Keywords: functional, extremum, functional increment, differential and first variation, Hamilton-Jacobi equation, conductor, atmospheric resistance, integral, calculus of variations, first variation of a functional, second variation of a functional, set

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, talabalar funksionallar va ularning ekstremumlarini hisoblashda qiyinchiliklarga duch kelishadi. Bu mavzular funksional analiz darslarida chuqurlashtirilmagan tartibda o’tiladi. Biroq, ilmiy izlanishlarni davom ettirishda olingan bilimlar etarli bo’lmaydi. SHu sababli ushbu mavzular qo’shimcha ravishda to’garaklarda o’tilishi maqsadga muvofiq hisoblanadi. To’garaklarda ham mavzuni o’tishda tushunchalarni osondan-murakkabga qarab tushuntirib berish yaxshi samara beradi. Ushbuni e’tiborga olib, muallif tomonidan mavzuni quyidagi sxemada o’tish taklif qilinadi: -funksionalning amaliy ahamiyati; -funksional ta’rifi; -funksional orttirmasi; -differensial va birinchi variatsiya; -ikkinchi variatsiya; -Lagranj bo’yicha kuchsiz ma’noda differensiallash; -funksional ekstremumi; -ekstremumning zaruriy va etarli shartlari; -Gamilton-Yakobi tenglamasi; -kanonik yoki Eyler tenglamasining Gamilton formasi; -kanonik sistemaning birinchi integrali; -birgalikda misollar echish.

Aytish kerakki, mavzuni o’qitishda samarali usullardan foydalanish ijobiy natijalar beradi. Ushbu taklif talabalar tomonidan ijobiy baholanib, mavzularni tushunish qiyin emasligini ta’kidlab, ilmiy izlanishlariga qo’llaganliklarini ma’lum qilishgan.

Eng avvalo funksionallar haqida umumiy tushunchalarni kiritib olaylik.

Shu vaqtgacha o’rganib kelayotgan funksiyalar odatda bitta yoki bir nechta erkli o’zgaruvchilarga bog’liq bo’ladi. Lekin ko’p masalalarda bunday funksiyalar tushunchasi etarli bo’lmay qoladi: masalan, o’tkazgich bo’ylab elektr oqimi o’tganda o’tkazgich atrofida hosil bo’lgan elektromagnit maydonning kuchlanishi o’tkazgich ega bo’lgan egri chiziq shakliga bog’liqdir. Hozirgi zamonda uchirilayotgan raketalar, er sun’iy yo’ldoshlari ham katta ahamiyatga ega. Ayniqsa, er atmosferasidan chiqishda va erga qaytib tushish vaqtida, er atmosferasiga kirganda mumkin qadar kamroq chiziq, atmosfera qarshiligini mumkin qadar kamroq sezish uchun albatta bu kemalarning formalari katta ahamiyatga egadir.

Keltirilgan misollarda ko’rilayotgan kattaliklar, chunonchi kuchlanish, qarshilik va o’xshash fizikaviy va mexanikaviy kattaliklar erkli argumentlarning qiymatlaridan tashqari yana funksiyalarga (egri chiziq, sirt formasi va hokazolar) ham bog’liq bo’lyapti. SHu bilan biz funksional tushunchasiga kelamiz.

Tar’if-1. Biror $y(x)$ funksiyalar sinfidan olingan har bir $y(x)$ funksiyaga bog’liq ravishda o’zgaruvchi I son, ya’ni $I = I(y(x))$ son funksional deyiladi.

Demak, oddiy funksionallarda biz chiziqdagi, tekislikdagi, fazodagi nuqtalardagi bog’lanishnlari qarasak, funksionalda chiziqqa sirt formasiga va hokazolarga bog’lanishni ko’ramiz. Funksionalda bitta yoki bir nechta funksiyalarga funksionalning qiymati mos keltiriladi. Funksionalga ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \quad (1)$$

integral misol bo'la oladi, chunki bu integralning qiymati $y = f(x)$ funksiyaga bo'liq. Yuqorida aytib o'tilganidek, funksionallarni umumiy xususiyatlari matematikaning «Funksional analiz» deb atalgan bo'limida o'rganiladi. Variatsion hisob esa funksionallarning maksimum va minimum qiymatlarini izlash masalalari bilan shug'ullanadi.

Ta'rif-2. Agar $J[y]$ funksional W chiziqli normalangan fazoda berilgan bo'lsa

$$\Delta J = J[y+h] - J[y], h \epsilon W$$

ayirmaga $J[y]$ funksionalning orttirmasi deyiladi.

Ta'rif-3. Agar W chiziqli normallangan fazoda berilgan $J[y]$ funksionalning ΔJ orttirmasi uchun

$$J[y+h] - J[y] = L[y,h] + \beta[y,h] \quad (2)$$

yoyilma o'rinli bo'lib, bunda $L[y,h] - b$ ga nisbatan chiziqli funksional,

$$\beta[y,h] \text{ esa } \|h\| \to 0 \text{ da } \frac{\beta[y,h]}{\|h\|} \to 0$$

munosabatni qanoatlantirsa, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada differensiallanuvchi yoki birinchi variatsiyasiga ega deyiladi.

(2) yoyilmaning bosh qismidan iborat $L[y,h]$ ga esa $J[y]$ funksionalning birinchi variatsiyasi deyiladi va u $\delta J = \delta J[y]]$ kabi belgilanadi: $\delta J = L[y, \delta y]$.

Keltirilgan ta'rif bo'yicha variatsiyaga ega funksionallarga adabiyotlarda Freshe ma'nosida (yoki kuchli ma'noda) differensiallanuvchi funksionallar ham deyiladi.

Ta'rif-4. W chiziqli normalangan fazoning y va uning ixtiyoriy $h \in W$ $e$lementi uchun funksionalning ΔJ orttirmasi

$$J[y+h] - J[y] = L_1[y,h] + \frac{1}{2} L_2[y,h] + \beta_1(y,h) \quad (3)$$

ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lsin, bu erda $L_1[y,h] - h$ ga nisbatan chiziqli funksional, $L_2\ [y,h]$ $e$sa δy ga nisbatan kvadratik funksional

$$\frac{\beta_1(y,h)}{\|h\|^2} \to 0, \|h\| \to 0.$$

U holda, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada ikkinchi variatsiyaga ega deyiladi.

h ga nisbatan kvadratik funksional $L_2[y,h]$ esa, $J[y]$ funksionalning ikkinchi variatsiyasi deyiladi hamda bu variatsiya $\delta^2 = \delta^2 J[y,h]$ kabi belgilanadi: $\delta^2 = L_2[y,h]$.

1-misol: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x)dx$ bo'lsin.

Bu funksional uchun (3) yoyilma

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)hdx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, yuqorida keltirilgan ta'riflarga ko'ra,

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)dx, \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx$$

funksional Freshe bo'yicha kuchli ma'noda differensiallanuvchiligi bilan bir qatorda, Lagranj bo'yicha kuchsiz ma'noda differensiallanuvchiligi tushunchasi ham mavjud.

W chiziqli normalangan fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin. V to'plam yoki $M(y) = \{h \epsilon W: y + h \epsilon V\}$ to'plam W ning chiziqli qism fazosi bo'lsin.

Ta'rif-5. $J(y)$ funksionalning $y \epsilon W$ nuqtadagi Lagranj bo'yicha birinchi variatsiyasi deb $\varphi(\alpha) = J[y + \alpha h]$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtadagi hosilasiga aytiladi: $\varphi J = \varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h]\Big|_{\alpha=0}$, $\varphi(\alpha) -$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasiga esa, $J(y)$ funksionalning Lagranj bo'yicha ikkinchi variatsiyasi deyiladi:

$$\delta^2 J = \varphi'(0) = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h]\Big|_{\alpha=0}.$$

2-misol: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [\, y^2(x) + y'(x)]dx$ funksionalning Lagranj bo'yicha birinchi va ikkinchi variatsiyalari hisoblang.

Bu funksional $W = C^1[x_0, x_1]$ da aniqlangan. Uning Lagranj bo'yicha birinchi va ikkinchi variatsiyalarini hisoblaymiz:

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha h] = \int_{x_0}^{x_1} [(y + \alpha h)^2 + (y' + \alpha h')^2 dx].$$

Demak, ta'rifga ko'ra: $\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2y(x)h - 2y'h')dx,$

$$\delta^2 J = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2h^2 - 2h'^2)dx$$

funksionalning Freshe bo'yicha dfferensiallanuvchiligidan Lagranj bo'yicha ham differensiallanuvchiligi kelib chiqadi va bunda mos variatsiyalar o'zaro tengdir.

Endi bevosita funksionalning ekstremumi va ekstremumning zaruriy va etarli shartlari haqida ma'lumotlarni soddadan-murakkabga qarab bayon etamiz.

Funksionallarning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topishga keltiriluvchi amaliy masalalar juda ko'p uchraydi va matematikaning bunday masalalarni o'rganadigan bo'limi - variatsion hisob deb ataladi.

Endi funksionalning ekstremumi tushunchasini aniq matematik ta'rifini keltiramiz va funksional variatsiyasidan foydalanib, ekstremumni umumiy ko'rinishidagi zaruriy hamda etarli shartlarini yoritamiz.

Cheksiz o'lchovli W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin.

Ta'rif-6. Agar ixtiyoriy $y \in W$ uchun

$$J[y^*] \leq J[y](J[y^*] \geq J[y])$$

tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning V to'plamidagi global minimum (maksimum) nuqtasi, $J[y^*]$ esa funksionalning minimal (maksimal) qiymati deyiladi:

$$J[y^*] = \min_{y \in V} J[y] \; (J[y^*] = \max_{y \in V} J[y]).$$

Funksionalning minimum va maksimum nuqtalarini, umumiy nom bilan ekstremum nuqtalari deb ataymiz.

Masalan, $W = C[0,1]$ da aniqlangan

$$J[y] = \int_{x_2}^{x_1} [1 - y(x)]^2 dx \,, J[y] \geq 0 = J[y^*], \forall y \in C[0,1]$$

funksionalni qaraylik.

Endi $W-$ chiziqli normalangan fazo, $J[y]$ funksional $V \subset W$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif-7. Agar biror $\varepsilon > 0$ son topilib, $\|y - y^* \|_w < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $y \in W$ nuqtaga $J[y^*] \leq J[y] \,, J[y^*] \geq J[y]$ tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqtaga $J[y]$ funksionalning V to'plamdagi lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan funksionalning global ekstremumi uning lokal ekstremumi ham bo'lishi kelib chiqadi. Bu tasdiqning aksinchasi esa to'g'ri emas.

3-misol: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2(y^2 - 1)dx$ funksionalni qaraymiz. U $W = C[0,1]$ da aniqlangan.

Shu funksional $V = \{ y \in C^1[0,1]: y(x) = 0\}$ to'plamda global maksimumga ega emas: sup $J[y] = +\infty$. Haqiqatan ham, agar $y_n = nx, n = 0,1 \dots \dots$ $(y_n \in V)$ funksiyalarni qarasak

$$J[y_n] = \int_{x_0}^{x_1} n^2(n^2x^2 - 1)dx = \frac{1}{3} n^4 - n^2 \to +\infty, n \to \infty.$$

Ammo, $y^* = 0$ funksiya, $J[y]$ funksional uchun lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Haqiqatan ham: $J[y^*] = 0$, $\|y - y^*\|_{S[0,1]} < \varepsilon, (0 < \varepsilon < 1)$ bo'lganda, $y^2 - 1 \leq 0$, shuning uchun,

$$J[y] = y'^2(y^2 - 1)dx \leq 0 = J[y^*], \forall y \in V.$$

$J[y]$ funksionalning cheksiz o'lchovli W fazoning V qism to'plamidagi minimumini (yoki maksimumini) topish haqidagi masala, cheksiz o'lchovli ekstremal masaladir. Bu masalani variatsion masala deb ataymiz va

$$J[y] \to \min(max), y \in V \qquad (4)$$

yoki

$$J[y] \to extr, y \in V$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Keyingi qaraladigan variatsion masalalarda $J[y]$ funksional, W fazo va uning V to'plami aniqlashtiriladi. Odatda, V to'plam funksiyalar (yoki ularning geometrik talqini sifatida chiziqlar, sirtlar) to'plamidan iborat bo'ladi.

Shuning uchun, (4) ekstremal masalada V to'plam elementlariga joiz funksiyalar (chiziqlar, sirtlar) deb ataladi.

Chiziqli normallangan W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin ($V = W$ bo'lishi ham mumkin). V - chiziqli qism fazo yoki biror $y_0 \in V$ uchun qurilgan $M(y_0) = \{h \in W: yh \in V\}$ to'plam chiziqli qism fazodan iborat bo'lsin.

Shu farazlarda, (4) masalalarda ekstremumning zaruriy va etarli shartlari quyidagi teoremalarda ifodalangan.

1-teorema. Agar $y_0 \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lsa va shu nuqtada δJ birinchi variatsiya hamda $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiya mavjud bo'lsa,

$$\delta J = 0 \ \delta^2 J \geq 0 \ (\delta^2 J \leq 0) \qquad (5)$$

shartlar bajariladi.

2-teorema. Agar $J[y]$ funksional $y_0 \in V$ nuqtada birinchi va ikkinchi variatsiyalarga ega bo'lib, ular

$$\delta J, \delta^2 J \geq \alpha h^2 \ (\delta^2 J \leq -\alpha h^2), \forall h \in W \qquad (6)$$

(bu erda $\alpha > 0$ – biror o'zgarmas son) shartlarni qanoatlantirsa**,** y_0 - lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Ilmiy ishlarda keng qo'llaniladigan Gamilton - Yakobi tenglamasi, kanonik yoki Eyler tenglamasining Gamilton formasi haqidagi tushunchalarni ilmiy izlanishlarga bog'lab tushuntiramiz. Bu kelgusida talabalarni ilmiy maqolalarni o'rganishlari va ilmiy maqolalar tayyorlashlariga yordam beradi.

Quyidagi funksional uchun Eyler-Lagranj tenglamasi

$$J = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx \ (7)$$

quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d}{dx} F'_{y_i} - F_{y_i} = 0. \ (8)$$

Agar $\left\| F_{y_i' y_k'} \right\|$ $(i, k = 1,2, \dots, n)$ maxsus bo'lmasa, unda quyidagi tenglamadan

$$F_{y_i'} = p_i, (i = 1,2, \dots, n) \ (9)$$

$x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ orqali y_i' ni tanlab olish mumkin:

$$y_i' = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n). (10)$$

(9) funksional uchun H gamiltonian deb $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ dan tuzilgan H funksiyaga aytiladi. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$I(x, y, p) = \begin{bmatrix} -F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \\ + \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') \end{bmatrix}, (11)$$

bu erda $y_i' = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Gamiltonian uchun differensiallash natijasida olingan quyidagi munosabat o'rinli

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{H}{y_i} = -\dfrac{\partial F}{\partial y_i}, \\ \dfrac{H}{p_i} = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{array} \right\} (i = 1,2, \dots, n), (12)$$

undan

$$\left. \begin{array}{c} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{array} \right\} (i = 1,2, \dots, n) \ (13)$$

ga ega bo'lamiz.

(13) tenglamaga Eyler-Lagranj tenglamasining kanonik yoki Gamilton sistemasi deyiladi, bunda $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ o'zgaruvchilar kanonik o'zgaruvchilar deyiladi. Ular YAkobi va Gamilton tomonidan aniqlangan. Lagranj esa ularni kanonik formasidagi differensial tenglamalarga qo'llagan.

4-misol. Quyidagi funksional uchun Eyler tenglamasining kanonik sistemasini yozing:

$$J = \int \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Bizga ma'lumki,

$$p = F_{y'} = \frac{y' \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y'^2}}, y'^2 = \frac{p^2}{x^2 + y^2 - p^2},$$

$$H = -F + y' F_{y'} \Big|_{y' = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}} = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

Izlanayotgan sistema esa quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}},\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}.$$

(12) formuladan (7) funksiyani variatsiyalash formulasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligi kelib chiqadi:

$$\delta J=-Hdx+\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i\Bigg|_{x_1}^{x_2}. (14)$$

Chiziqning oxirlaridagi ekstremumga keltiruvchi transversallik sharti quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$-Hdx+\sum_{i=1}^{n}p_i dy_i=0.\ (15)$$

Ekstremallar bo'ylab

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x}\ (16)$$

va agar $\frac{\partial H}{\partial x}=0$, ya'ni, H x ga bog'liq bo'lmasa, unda

$$H=const\ (17)$$

bo'ladi.

Berilgan differensial tenglamalar sistemasidagi har bir integral chiziqlar bo'ylab doimiy qiymatini saqlovchi funksiyaga shu sistemaning birinchi integrali deyiladi.

Xuddi shunday, $H=const$ Eyler-Lagranj tenglamasi kanonik sistemasining birinchi integrali bo'ladi.

Agar biror-bir $\Phi(y_1,y_2,\dots,y_n,p_1,p_2,\dots,p_n)$ funksiya berilgan bo'lsa, ektremallar bo'ylab

$$\frac{d\Phi}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\right)\ (18)$$

bo'ladi va (18) ning o'ng tomonida turgan ifoda Puasson qavsi deyiladi va $[\Phi,H]$ simvoli bilan belgilanadi. Bu esa anglatadiki,

$$\frac{d\Phi}{dx}=[\Phi,H]. (19)$$

$\Phi(y_1,y_2,\dots,y_n,p_1,p_2,\dots,p_n)$ funksiya kanonik Eyler-Lagranj tenglamalar sistemasining birinchi integrali bo'lishi uchun

$$[\Phi,H]=0\ (20)$$

bo'lishi zarur va etarli.

Agar faqat H emas, Φ ham x ga bog'liq bo'lsa, aniqki, quyidagi formula o'rinli:

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+[\Phi,H]. (21)$$

Nyoter E. teoremasi. a parametrga bog’liq teskarilanuvchi akslantirishlar oilasi berilgan bo’lsin:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \varphi_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha) \\ y_i^* &= \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha) \end{aligned}\right\} (i = 1,2, \dots, n), (22)$$

bu erda φ, φ_0 funksiyalar differensiallanuvchi, $\alpha = 0$ qiymat esa akslantirish ayniyatiga to’g’ri keladi:

$$\varphi_o(x, y_1, y_2, \dots, y_n, 0) = x,$$
$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, 0) = y_i.$$

L: $y_i = y_i(x)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ chiziqda qaralayotgan quyidagi funksional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx,$$

$x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_0), y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha_0)$ akslantirishga mos invariant deyiladi, bunda L chiziq L^*: $y_i^* = y_i^*(x^*)$ chiziqqa o’tadi:

$$\int_a^b F\left(x, y_1, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}\right) dx = \int_{a^*}^{b^*} F\left(x^*, y_1^*, \dots, y_n^*, \frac{dy_1^*}{dx^*}, \dots, \frac{dy_n^*}{dx^*}\right) dx.$$

Kuzatish uchun qoldirilgan har bir (22) akslantirish kanonik ko’rinishdagi Eyler-Lagranj tenglamalar sistemasiga mos keluvchi biror-bir birinchi integral invariantdir (Nyoter E. teoremasi).

5-misol. Agar quyidagi funksionalda

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

F funksional x ga bog’liq bo’lmasa, unda funksional quyidagi akslantirishga bog’liq invariant

$$x^* = x + \alpha, y^* = y$$

bo’ladi.

Shuningdek, berilgan akslantirishga mos keluvchi kanonik sistemaning birinchi integrali mavjud bo’lishi kerak. Bu birinchi integral $H = const$ bo’ladi.

(13) ko’rinishdagi kanonik sistema quyidagi funksional uchun Eyler-Lagranj tenglamalar sistemasi

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - H(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) dx\right] (23)$$

bo’lib, agar y_i, p_i larni noma’lum funksiyalar sifatida qarasak, bu funksional variatsiyasi

$$\delta J = -Hdx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (24)$$

va fiksirlangan x_1 da 2 indeksni tashlab yuborib

$$\delta J = -Hdx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_1, \ (25)$$

quyidagini topamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} = -H(x,y,p) \\ \frac{\partial J}{\partial y_i} = p_i \end{aligned}\right\} (i = 1,2,\dots,n). (26)$$

(26) da p_i ni ajratish orqali Gamilton-Yakobi tenglamasi deb ataluvchi xususiy hosilaga ega birinchi darajali tenglamaga ega bo’lamiz:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial J}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial y_n}\right) = 0 \ (27)$$

Xususiy hosilali birinchi tartibli tenglamaning umumiy integrali deb, faqat o’zgaruvchilari soniga teng bo’lgan hosilaviy doimiylar qatnashgan echimga aytiladi.

Gamilton-Yakobi tenglamasi uchun unda noma’lum funksiyalar qatnashmasligini hisobga olgan holda, umumiy integralni quyidagi ko’rinishda olish mumkin

$$V = V(x, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_n), (28)$$

bu erda $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ - hosilaviy doimiylar.

Faraz qilamizki, $V - a_i$ parametrga bog’liq uzluksiz differensiallanuvchi va har bir xususiy hosila $\frac{\partial V}{\partial a_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i} (i = 1,2,\dots,r)$ barcha argumentlarga nisbatan uzluksiz differensiallanuvchi bo’lsin.

Qo’shimcha farazga nisbatan, aniqlanuvchi

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial a_n}\right| \neq 0 \ (29)$$

uchun Yakobi teoremasi o’rinli.

Agar Gamilton-Yakobi tenglamasi V umumiy integral ma’lum bo’lsa, unda quyidagi tenglikka ega bo’lamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_k} = b_k, \\ \frac{\partial V}{\partial y_k} = p_k, \end{aligned}\right\} (30)$$

bu yerda $a_k, b_k \ (k = 1,2,\dots,n)$ - o’zgarmas sonlar, $2n$ o’zgarmas songa bog’liq bo’lib, (13) kanonik sistemaning echimini beradi.

6-misol. Quyidagi funksionalning ekstremumini toping:

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Gamiltonian quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$H=-\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

Shuningdek, Gamilton-YAkobi tenglamasi esa quyidagi ko'rinishda

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\sqrt{x^2+y^2-\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2}$$

bo'ladi yoki

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2=x^2+y^2 \ (31)$$

echimni quyidagi ko'rinishda izlash mumkin:

$$J=\frac{1}{2}(Ax^2+2Bxy+Cy^2). (32)$$

(32) echimni (31) tenglamaga qo'yish natijasida

$$A^2+B^2=1, B(A+C)=0, B^2+C^2=1$$

ekanligini topamiz.

Faraz qilamiz,

$$A=-C=\sin\beta, B=-\cos\beta$$

bo'lsin. (31) tenglamaning echimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$J=\frac{1}{2}(x^2\sin\beta-2xy\cos\beta-y^2\sin\beta).$$

Yakobi teoremasiga ko'ra, Eyler-Lagranj tenglamasining umumiy integrali

$$\frac{\partial J}{\partial \beta}=\mathrm{const}=\frac{1}{2}\alpha$$

yoki

$$x^2\sin\beta-2xy\cos\beta-y^2\sin\beta=\alpha$$

bo'ladi.

Ilmiy izlanishlar uchun eng muhim tushunchalardan biri kanonik almashtirishlar to'g'risida fikrlar bayon qilamiz. Agar quyidagi almashtirish

$$\left.\begin{array}{l} Y_i=Y_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n,p_1,p_2,\dots,p_n) \\ P_i=P_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n,p_1,p_2,\dots,p_n) \end{array}\right\} (i=1,2,\dots,n) \ (33)$$

(13) kanonik sistemani kanonik sistemaga akslantirsa

$$\frac{dY_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial P_i}, \frac{dP_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial Y_i} \ (i=1,2,\dots,n) \ (34)$$

(yangi Gamiltonian bilan $\widetilde{H}=\widetilde{H}(x,Y_1,Y_2,\dots,Y_n,P_1,P_2,\dots,P_n)$) unda (33) almashtirish kanonik deyiladi.

(34) tenglamasi quyidagi funksional uchun Eyler-Lagranj tenglamasi bo'ladi

$$\int_a^b -\widetilde{H}dx + \sum_{i=1}^{n} P_i dY_i. \ (35)$$

(35) funksional uchun variatsion masala quyidagi funksional uchun variatsion masalaga ekvivalent bo'ladi:

$$\int_a^b -Hdx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i.$$

Bu funksionalning integral osti ifodasi quyidagi ba'zi-bir umumiy differensialdan farq qiladi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dy_i - H\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i dY_i - \widetilde{H}dx + d\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n). (36)$$

Bu holda $\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ berilgan kanonik akslantirishning hosilaviy funksiyasi deb ataladi. (36) dan kelib chiqadiki

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, \widetilde{H} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Darslarni o'tishda samarali bo'lgan bir qator ilg'or pedagogik texnologiyalar [1-17] ilmiy izlanishlarda tavsiya qilingan. Qo'llanilgan usullarning kamchiliklari va afzalliklari to'liq yoritilgan. Talabalarning munosabatlari tahlil qilingan. Amaliy mashg'ulotlarda talabalar tomonidan yo'l qo'yilgan kamchiliklar o'rganilib, ularni bartaraf qilish yo'llari ko'rsatilgan.

Gamilton-Yakobi tenglamasi [18-39] ilmiy maqolalarda keng ko'lamli qo'llanilgan. Xususan, singulyar integral tenglamalarni yechishda, gipergeometrik funksiyaning analitik davom ettirishda va Eyler integrallarini hisoblashda keng qo'llanilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.65-76.

2. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

3. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

4. Avezov A.X. Funksiya hosilasi mavzusini o'qitishda «Kichik guruhlarda ish-lash» metodi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 441-450 b.

5. Avezov A.X. Ta'limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), c. 789-797.

6. Avezov A.X. Oliy matematika fanini oʻqitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), c. 778-788.

7. Avezov A.X. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари // Science and Education, scientific journal 2:11 (2021), 749-758 б.

8. Avezov A.X. Matematika oʻqitishning tatbiqiy metodlari // Pedagogik mahorat, 2021, Maxsus son. 52-57 b.

9. Авезов А.Х. Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов // Вестник науки и образования, 95:17-2 (2020), с. 6-10.

10. Avezov A.X., Rakhmatova N. Eyler integrallarining tatbiqlari // Scientific progress, 2:1 (2021),1397-1406 b.

11. Avezov A.X. Interfaol usullarni qo'llab funksiyaning differensiali va uning taqribiy hisoblashga doir misollar yechish // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 451-461 b.

12. Авезов А.Х. Выбор математической модели и исследование трехмерных турбулентных струй // Молодой ученый, 15, (2017). с.101-102.

13. Авезов А.Х Неравенства и системы неравенств с двумя переменными // Сборник материалов Международной научно-практической конференции, 2019 г. г.Кемерово ст.9-11, Западно-Сибирский научный центр

14. Авезов А.Х. Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, вытекающих из сопла прямоугольной формы на основе «k-ε» модели турбулентности // Ученый XXI века, 5-3(40), 2018 г.

15. Avezov A.X. Gramm determinanti haqida ba'zi bir mulohazalar // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 11-22 b.

16. Avezov A.X. Sferik funksiyalarning amaliy ahamiyati haqida // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 23-34 b.

17. Avezov A.X. О тригонометрических рядах Фурье // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), c. 35-49.

18. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).

19. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, c. 197-199.

20. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

21. Avezov A.X. Matematikani o'qitishda interfaol metodlar: «Keys-stadi» metodi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 462-470 b.

22. Avezov A.X. Funksiyaning to'la o'zgarishini hisoblashga doir misollar yechish yo'llari haqida // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 50-61 b.

23. Avezov A.X. «Kompleks sonlar» mavzusini o'qitishda «Bumerang» texnologiyasi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 430-440 b.

24. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

25. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

26. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

27. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

28. Rasulov X.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

29. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.

30. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

31. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

32. Бозорова Д.Ш., Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.14-22.

33. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.23-30.

34. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

35. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

36. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

37. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

38. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

39. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).