Kvadratik stoxastik operatorlarga olib kelinadigan ba'zi modellar haqida

Boboxon Jo' rayevich Mamurov
Dilfuza Shavkat qizi Bozorova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Kvadratik va kubik operatorlar ko'pgina biologik,fizik va ximik jarayonlarning matematik modeli bo'ladi. Maqolada shunday jarayonlarga misollar qaralgan.

Kalit so'zlar: populyatsiya, evolyutsion operator, panmiks va autsom populyatsiyalar

On some models coming to quadratic stochastic operators

Boboxon Juraevich Mamurov
Dilfuza Shavkat qizi Bozorova
Bukhara State University

Abstract: Quadratic and cubic operators are mathematical models of many biological, physical, and chemical processes. Examples of such processes are described in this article.

Keywords: population, evolutionary operator, panmix, and outsom populations

Genlarning statistik ta'siri o'zaro chatishtiriladigan bir xil turga tegishli organizmlarning etarlicha katta jamoalarida namoyon bo'ladi. Bunday jamaolar populyatsiya deyiladi.

Aniqlik uchun populyatsiyani biz ikki jinsli deb faraz qilamiz. $J=\{\Phi_1, \Phi, \ldots, \Phi_n\}$ - ayol tiplar to'plami va $M=\{M_1, M_2, \ldots, M_\nu\}$ - erkak tiplar to'plami bo''lsin.

$n+\nu$ soniga populyatsiyaning o'lchami deyiladi.

Populyatsiyaning holati deb, mos ravishda J va M lardagi **x**=($x_1, x_2, \ldots, x_n$) va y= ($y_1, y_2, \ldots, y_\nu$) ehtimollik taqsimotlari juftliliga aytiladi. Bunda $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$; $y_i \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\nu} y_k = 1$.

Populyatsiya evolyutsiyasini tasodifiy jarayon sifatida ham qarash mumkin.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, berilgan populyatsiyaning holatlar fazosi (n-1) o'lchovli S^{n-1} va (ν -1) o'lchovli $S^{\nu-1}$ sumplekslarning Dekart ko'paytmasi S= $S^{n-1} \times S^{\nu-1}$ bo'lar ekan.

Populyatsiyaning tiplarga bo'lish differentsiatsiya deyiladi.

Biz tiplar to'plamini chekli deb hisoblaymiz. Bunga oddiy misol junsiy differentsatsiyadir. Ikki jinsli populyatsiyada har qanday differentsiatsiya jinsiy differentsiatsiya mos bo'lishi , ya'ni barcha bir tipdagi organizmlar bitta jinsga tegishli bo'lishi kerak. Shunday qilib, erkak va ayol tiplar haqida gapirish mumkin.

Ta'rif. Populyatsiya differentsiatsiyasi irsy(nasledsitvennoy) deyiladi, agar F avloddagi ixtiyoriy z=(x,y) holat uchun chatishtirsh natijasida paydo bo'ladigan F' avlodning $z' = (x', y')$ holati aniqlangan bo'lsa.

$$z' = \mathrm{V}z \ (z \in S) \ (1)$$

tenglama bilan aniqlanuvchi $V: S \to S$ akslantirishga populyatsiyaning evalyutsiya(evalyutsion) operator, (1) tenglamaga evalyutsiy (evalyutsion) tenglamasi deyiladi.

Koordinatalar ko'rinishida u quyidagi tenglamalar sistemasi ko'rinishini oladi:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n ; y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \ (1 \le i \le n),$$
$$y_k' = g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n ; y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \ (1 \le k \le \nu).$$

Bu tenglamalar sistemasiga evalyutsion tenglamalar sistemasi deyiladi.

V evolyutsion operatorning qo'zg'almas nuqtasi deb, populyatsiyaning muvozanat holatga (Vz=z) aytiladi.

Brauerning mashhur topologik teoremasiga ko'ra bunday nuqtalar mavjud va bunday nuqtalar to'plami kompakt bo'ladi. Agar populyatsiyaning barcha holatlari muvozanat holatlari bo'lsalar, populyatsiya aynan muvozonatli deyiladi. Bunday populyatsiyaning evolyutsion operatori birlik operator bo'ladi, ya'ni V=**1**.

Tenglama ixtiyoriy z^0 boshlang'ich holatda $\{z^{(t)}\}_{t=0}^{\infty}$:

$$z^{(t+1)} = \mathrm{V}(z^{(t)}) \ (t=0, 1, 2, \ldots) \ (2)$$

traektoriyani bir qiymatli aniqlaydi. $z^{(t)}$ holat, F_0 boshlanzich avlod $z^{(0)}$ holatda bo'lganda, t-avlod F_t da payda bo'ladi, ya'ni $z^{(t)} = V^t z^{(0)}$ (t=0, 1, 2, . . .).

Agar $z^{(t)}$ traektoriya yaqinlashsa, $z^{(m)} = \lim_{t\to\infty} z^{(t)}$, u holda (2) va V operatorning uzluksizligidan $z^{(m)}$ holat ham muvozanatli bo'ladi.

Traektoriyaning limit nuqtalari to'plamiga uning limit to'plami deyiladi.

Bu to'plam bo'sh emas, agar traektoriyalar yaqinlashsa, bitta nuqtadan iborat bo'ladi.O'rganilgan ko'pgina populyatsion- genetik hollarda traektoriyalar yaqinlashadi. Bu tasdiqni isbotlashda quyidagi lemma muhim o1rin tutadi.

Lemma. Agar $\{z^{(t)}\}$ traektoriyaning limit nuqtalar to'plami chekli va barcha limitik holatlar muvozanat holatlari bo'lsalar, traektoriyalar yaqinlashadi.

Teorema. $\{z^{(t)}\}$ traektoriyaning barcha limitik holatlari muvozanat holati bo'lishi uchun $\lim_{t\to\infty} d(z^{(t+1)} - z^{(t)}) = 0$ bo'lishi zarur va etarli (d(,)-masofa).

Populyatsiyaning evolyutsion operatorining ko''rinishida chatishishlar tizimi va tanlash omillari muhim o'rin tutadi.

Chatishish tizimi *panmiks* deyiladi, agar populyatsiyadan jiftliklar, tipga bog'liqsiz holda tasodifiy tanlansa.

Bu esa, agar populyatsiya (x,y) holatda bo'lsa, u holda Φ_i ayol tipinung M_k erkak tipi bilan chatishish ehtimolligi $x_i y_k$ ga teng bo'ladi. Bunday chatishtirishli populyatsiya panmiksli populyatsiya deyiladi. Biz faqat panmiksli populyatsiyalarni qaraymiz. Ikki jinsli populystsiya uchun evolyutsion tenglamani keltirib chiramiz.

Buning uchun bizga quyidagi ma'lumotlar kerak bo'ladi.

1) Nasl qoldirish koeffitsentlari $p_{ik,j}^{(t)}$, $p_{ik,j}^{(m)}$.

$p_{ik,j}^{(t)}$ miqdor Φ_j ($1\leq j \leq n$) ayol tipning Φ_i ($1\leq i \leq n$) tipdagi ona va M_k ($1\leq k \leq \nu$) tipdagi otadan to'g'ilish ehtimolligini bildiradi.

2) Yashab ketish koeffitsentilari $\lambda_i^{(f)}$, $\lambda_j^{(m)}$.

$\lambda_j^{(f)}$ miqdor Φ_j ayol tipinung, $\lambda_l^{(m)}$ esa M_l erkak tipning keying ko'payishgacha yashash ehtimolligini aniqlaydi va $\lambda_j^{(f)} \geq 0$, $\lambda_l^{(m)} \geq 0$.

$1-\lambda_j^{(f)}$ va 1-$\lambda_l^{(m)}$ lar mos ravishda tiplarning o'lish ehtimolliklari deyiladi.

Faraz qilaylik, (x,y) F avloddagi populyatsiyaning holati bo'lsin.

Keyingi, F'avlodda tiplarning paydo bo'lish ehtimolliklari to'la ehtimol formulasiga asosan:

$$\overline{x_j} = \sum_{i,k=1}^{n,\nu} p_{ik,j}^{(f)}\, x_i\, y_k \,,\ \overline{y_l} = \sum_{i,k=1}^{n,\nu} p_{ik,l}^{(m)}\, x_i\, y_k. \ (3)$$

F'avlodning reproduktiv bosqihida Bayes formulasiga asosan

$$\mathrm{x}_j' = \frac{\lambda_i^{(f)}\,\overline{x_j}}{\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^{(f)}\,\overline{x_r}} \,,\ y_l' = \frac{\lambda_l^{(m)}\,\overline{y_l}}{\sum_{\rho=1}^{\nu}\lambda_\rho^{(f)}\,\overline{y_\rho}}\,. \ (4)$$

va (4) lardan quyidagi evolyusion tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\mathrm{x}_j' = \frac{1}{W^{(f)}(x,y)} \sum_{i,k=1}^{n,\nu} \omega_{ik,j}^{(f)}\, x_i\, y_k \ (1\leq j \leq n),$$

$$\mathrm{y}_l' = \frac{1}{W^{(m)}(x,y)} \sum_{i,k=1}^{n,\nu} \omega_{ik,l}^{(m)}\, x_i\, y_k \ (1\leq l \leq \nu), \ (5)$$

bu yerda $\omega_{ik,j}^{(f)} = p_{ik,j}^{(f)}\lambda_j^{(f)}$, $\omega_{ik,l}^{(m)} = p_{ik,l}^{(m)}\lambda_l^{(m)}$ larga mos ravishda ayol va erkaklarning moslashuv koeffitsentilari (приспобленности) deyiladi va

$$\mathrm{W}^{(\mathrm{f})}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{\mathrm{ik,j}=1}^{\mathrm{n},\nu,\mathrm{n}} \omega_{\mathrm{ik,j}}^{(\mathrm{f})}\, \mathrm{x_i}\, \mathrm{y_k},$$

$$W^{(m)}(x,y) = \sum_{ik,l=1}^{n,\nu,\mathrm{n}} \omega_{ik,l}^{(m)}\, x_i\, y_k \ . \ (6)$$

Bu bichiziqli formalar (x,y) holatda mos ravishda ayol va erkak jinslarning o'rtacha moslashuvchanligi deyiladi.

Agar n= ν , Φ_i=M_i ($1\leq i \leq n$) bo'lsa, populyatsiya autosom deyiladi.

Bu holda nasl qoldirish, yashab ketish, moslashuvchanlik koeffitsentlari jinsga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni

$$p_{ik,j}^{(f)} = p_{ik,j}^{(m)},\ \lambda_j^{(f)} = \lambda_j^{(m)},\ \omega_{ik,j}^{(f)} = \omega_{ik,j}^{m)} \ (1\leq i,k,j \leq \mathrm{n})\ .$$

Jins bilan bog'liq belgilashlarni tashlab yuborsak (5) dan quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$x_j' = \frac{1}{W(x,y)} \sum_{i,k=1}^{n} \omega_{ik,j}\, x_i\, y_k \ (1\leq j \leq n),$$

$$y_j' = \frac{1}{W(x,y)} \sum_{i,k=1}^{n,\nu} \omega_{ik,j}\, x_i\, y_k \ (1\leq j \leq n), \ (7)$$

bu yerda $W(x,y) = \sum_{ik,j=1}^{n} \omega_{ik,j}\, x_i\, y_k$, (8)

unga populyatsiyaning o'rtacha moslashuvchanligi deyiladi.

Autsom populyatsiyada ayol va erkak turlarning aniqlanishiga ko'ra $p_{ki,j} = p_{ik,j}$ deb olish qabul qilingan.

(7) ko'rinadiki, autosom populyatsiyaning evolyutsion operatorining obrazi ImV D holatlar fazosining diognalida yotadi: D= {(x,x) : x∈ Δ^{n-1}}. Boshqacha qilib, aytganda, F avlodda (x,y) holat qanday bo'lishidan qa'tiy nazar, navbatdagi avlodda ayol va erkak tiplarning ehtimollari ustma-ust tushadi($x' = y'$).

Barcha $\{z^l\}$ traektoriyalar l=1 dan boshlab D da yotadi.

Autosom populyatsiyaning evolyutsion tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_j' = \frac{1}{W(x)} \sum_{i,k=1}^{n} \omega_{ik,j}\, x_i\, x_k \ (1\leq j \leq n), \ (9)$$

bu yerda

$$W(x) = \sum_{ik,j=1}^{n} \omega_{ik,j}\, x_i\, x_k \ . \ (10)$$

$W(x)$ ga populyatsiyaning o'rtacha moslashuvchanligi, n soniga esa aytosom populyatsiyaning o'lchami deyiladi. Populyatsiya *selektiv neytral* deyiladi, agar bitta jinsdagi barcha tiplarning yashab ketish koeffitsetlari teng bo'lsa, ya'ni $\lambda_j^{(f)}$ j ga va $\lambda_l^{(m)}$ l ga bog'liq bo'lmasa.

Selektiv neytral autosom populyatsiyaga *ozod* populyatsiya deyiladi.

λ >0 u ketish koeffitsentiga ega ozod populyatsiya uchun

$$\omega_{ik,j} = \lambda\, p_{ik,j}\ ,\ W(x) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i\, x_k \sum_{j=1}^{n} \lambda\, p_{ik,j} = \lambda\ ,$$

chunki,

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ik,j} = 1. \ (11)$$

(9) sistemadan

$$x_j' = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik,j} x_i\, x_k,\ (1\leq j \leq n) \ (12)$$

ga kelamiz.

Bulardan ko'rinadiki, ozod populyatsiyaning evolyutsion operatori Δ^{n-1} ni o'ziga akslantiruvchi kvadratik akslantirish bo'lar ekan.

[2] da qaralgan statistik mexanikadagi Boltsman modelini ham kvadrat operatorlar yordamida tasvirlanishi mumkinligi [3] ko'rsatilgan. Shu mavzuga oid muammolar, ularni ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalanib o'qitish yo'llari va biologik jarayonlarning matematik modellari (oddiy va xususiy hosilali differenisal

tenglamalar) hisoblangan tenglamalarni yechish yo‘llari [4-30] ilmiy izlanishlarda ham berilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Любич Ю.И., Математические структуры в популяционной генетике, Наукова думка, Киев, 1983.

2. Jenks R.D. // J. Diff. Eduation. 1969. V.5. №3. Pp 497-514.

3. Т.А. Сарымсаков Т.А., Ганиходжаев Н.Н. // Узб.мат. журнал. 1991. №1. 57-64 стр.

3. Мамуров Б.Ж., Абдуллаев Ж. Регрессионный анализ как средство изучения зависимости между переменными // European science, 2:58 (2021), стр. 7-9.

4. Мамуров Б.Ж, Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования, 96:18-2 (2020), стр. 37-39.

5. Mamurov B, Amrilloyeva K. Tasodifiy hodisa tushunchasi haqida. Scientific progress, №2, 2021, p.463-467.

6. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли элементов истории математики в преподавании математики // Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom, 27-29 may 2020 y., p.701-702.

7. Мамуров Б.Ж. Неравномерной оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин . Молодой учёный. 197:11 (2018). с.3-5.

8. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин. Academy. 55:4 (2020). Pp. 13-16.

9. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes. Journal of Physics: Conferense Series. 697 (2016), 012017.

10. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type (σ/μ). arXiv: 2004.01702, p. 1-14. math.D.S

11. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite enotypes. Scientific reports of Bukhara State University. 1:5, 2018. p. 18-21.

12. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора // Наука, техника и образование. 77:2-2 (2021), стр.10-15.

13. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type (σ/μ). Markov Processes Relat.Fields 26, (2020), 915-933.

14. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов. Bulletin of Institute of Mathematics 2019. №6, pp.35-39.

15. Mamurov B.J., Bazorova D. Sh. Biologiya va tibbiyotdagi ba'zi matematik modellar haqida. Science and innovation, Vol.1 issue 8,UIF-2022:8.2. 418-426.

16. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О историзм в процессе обучения математике. Вестник науки и образования. 95:17-2 (2020), стр. 70-74.

17. Мамуров Б.Ж. О решения эволюционных уравнений для кубических стохастических процессов. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. 305-307 стр.

18. Мамуров Б.Ж., Шарирова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S2. // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.121-122.

19. Мамуров Б.Ж.,Шарирова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S2 // Тезисы рес.науч.конф. "Сарымсаковские чтения", Тошкент-2021. стр.100-101.

20. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Kombinatorika haqidagi dastlabki ko'nikmalarni shakllantirish // Science and education, scientific jornal, 2:10 (2021), p 497-505.

21. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.Kombinatorik munosabatlar va ularning geometrik isbotlari haqida. Pedagogik mahorat. 2021,oktyabr. Maxsus son. 20-23-bet.

22. Mamurov B.Zh. The convex combinations of quadratic operators on S2. Abstracts of theVII inter.conf.Modern prob.of applied mat.inf.tex. Al-Khwarizmi-2021. p,87.

24. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

25. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

26. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

27. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

28. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

29. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

30. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.