Eyler va Gamilton-Yakobi tenglamalarini integrallash masalasining ekvivalentligi

Nasillo Sharifovich Xamroev
Toshkent irrigasiya va qishloq xo‘jaligini mexanizasiyalash muhandislari instituti Buxoro filiali

Annotatsiya: Ushbu maqolada Eyler-Lagranj hamda Gamilton-Yakobi tenglamalari haqida batafsil ma’lumotlar keltirilgan. Mavzuni tushuntirish oson bo‘lishi uchun dars o‘tishda noan’anaviy usul qo‘llash taklif qilingan. Keltirilgan tenglamalarni ekvivalentligi isbotlangan va ularga doir bir qator misollar echib ko‘rsatilgan hamda grafiklar yordamida tushuntirilgan. Olingan natijalar tahlil qilinib, taklif qilingan usulning kamchiliklari va afzalliklari bayon qilingan.

Kalit so‘zlar: funksional, noan’anaviy usullar, Eyler-Lagranj tenglamasi, Gamilton-Yakobi tenglamasi, Gamiltonian, Gamilton sistemasi, kanonik forma, hosila, to‘liq integral, transversallar oilasi, ekstremal maydon, to‘g‘ri chiziqlar oilasi, urinma

Equivalence of the integration problem of Euler and Hamilton-Jacobi equations

Nasillo Sharifovich Xamroev
Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers Bukhara branch

Abstract: This article provides detailed information on the Euler-Lagrange and Hamilton-Jacobi equations. In order to make it easier to explain the topic, it is suggested to use an unconventional method during the lesson. Equivalence of the given equations is proved and a number of examples are solved and explained with the help of graphs. The obtained results are analyzed and the advantages and disadvantages of the proposed method are described.

Keywords: functional, unconventional methods, Euler-Lagrange equation, Hamilton-Jacobi equation, Hamiltonian, Hamiltonian system, canonical form, derivative, complete integral, family of transversals, extremal field, family of straight lines, attempt

Ma’lumki, funksionallar funksional analiz fanining asosiy mavzularidan biri hisoblanadi. Ularning amaliy tadbiqlari esa keng ko‘lamlidir. Bu mavzu (bakalavriyat ta'lim yo'nalishida o'tilmaydi. Faqatgina ayrim oliy ta'lim muassasalarining magistratura yo'nalishlarida tanlov fan hisobida o'tiladi xolos) dolzarb bo'lganligi va talabalarning ilmiy izlanishlar olib borishlari uchun ahamiyatli ekanligi munosabati bilan uni talabalarga tushuntirishda turli noan'anaviy usullar va ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llash maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Maqolada Eyler-Lagranj tenglamasi hamda Gamilton-Yakobi tenglamalarini integrallash masalasining ekvivalentligini isbotlash mavzusi talabalarga oson tushuntiriladigan usul taklif qilinadi. misollar yordamida ko'rsatiladi.

Quyidagi funksional uchun Eyler-Lagranj tenglamasi

$$J = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx$$

quyidagi ko'rinishni oladi

$$\frac{d}{dx} F'_{y_i} - F_{y_i} = 0$$

Agar

$$\left\| F_{y_i' y_k'} \right\| \ (i, k = 1,2, \dots, n)$$

maxsus bo'lmasa, unda quyidagi tenglamadan

$$F_{y_i'} = p_i, (i = 1,2, \dots, n) \ (1)$$

$x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ orqali y_i' ni tanlab olish mumkin:

$$y_i' = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

(1) funksional uchun H Gamiltonian deb $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ dan tuzilgan H funksiyaga aytiladi

$$I(x, y, p) = \begin{bmatrix} -F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') + \\ + \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') \end{bmatrix}$$

bu yerda $y_i' = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Gamiltonian uchun differensiallash natijasida olingan quyidagi munosabat o'rinli

$$\left. \begin{aligned} \frac{H}{y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i} \\ \frac{H}{p_i} = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \end{aligned} \right\} (i = 1,2, \dots, n)$$

undan

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} (i = 1,2, \dots, n). (2)$$

(2) tenglamaga Eyler-Lagranj tenglamasining kanonik yoki Gamilton sistemasi deyiladi, bunda $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ o‘zgaruvchilar kanonik o‘zgaruvchilar deyiladi. Ular Yakobi va Gamilton tomonidan aniqlangan. Shu o‘rinda aytish joizki, Lagranj esa kanonik formasidagi differensial tenglamalarni qo‘llagan.

Endi Gamilton-Yakobi tenglamasini ko‘rinishi keltiramiz. (2) ko‘rinishdagi kanonik sistema quyidagi funksional uchun Eyler-Lagranj tenglamalar sistemasi bo‘ladi:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - H(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) dx\right],$$

agar y_i, p_i larni noma’lum funksiyalar sifatida qarasak, bu funksional variatsiyasi

$$\delta J = -Hdx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i \bigg|_{x_1}^{x_2}$$

bo‘ladi va fiksirlangan x_1 da 2 indeksni tashlab yuborib

$$\delta J = -Hdx + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_1,$$

bunda

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= -H(x, y, p) \\ \frac{\partial J}{\partial y_i} &= p_i \end{aligned}\right\} (i = 1,2, \dots, n) \ (3)$$

(3) da p_i ni ajratish orqali Gamilton-Yakobi tenglamasi deb ataluvchi xususiy hosilaga ega birinchi darajali tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial J}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial y_n}\right) = 0$$

Gamilton-Yakobi tenglamasi uchun, unda noma’lum funksiyalar qatnashmasligini hisobga olgan holda, umumiy integralni quyidagi ko‘rinishda olish mumkin

$$V = V(x, y_1, y_2, \dots, y_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

bu yerda $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ - hosilaviy doimiylar.

Endi Eyler tenglamasining umumiy integrali va Yykobi-Gamilton tenglamasi to‘liq integralini topish masalasi teng kuchli ekanligini ko‘rsatamiz.

Aavalo Eyler tenglamasi umumiy integralidan Yykobi-Gamilton tenglamasi to‘liq integralining kelib chiqishini ko‘rib chiqamiz.

Eyler tenglamasi umumiy integrali berilgan bo‘lsin:

$$y = \varphi(x, \alpha, \beta), (4)$$

β parametrni fiksirlab, α parametrga bog‘liq bo‘lgan shunday ekstremallar oilasiga ega bo‘lamiz. Ularning ma’lum chegaralanganligini aks ettiruvchi maydon sifatida olish mumkin. $u(x,y,\beta)$ orqali bu maydon, quyidagi tenglamadan α ni ajratish natijasidan olingan funksiya qiyaligini belgilaymiz:

$$\left.\begin{array}{c} y=\varphi(x,\alpha,\beta) \\ u=\varphi'_x(x,\alpha,\beta) \end{array}\right\}.$$

$\Theta(x,y,\beta)$ orqali berilgan (4) ekstremal maydonga mos keluvchi transversal maydonni anglatuvchi funksiyani belgilaymiz.

Bu $\Theta(x,y,\beta)$ funksiya kvadratura yordamida ham topilishi mumkin va yuqorida ko‘rsatilgani kabi, Gamilton-Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi. Bunday holda, bu echimga additiv γ doimiyni qo‘shib, quyidagi echimga ega bo‘lamiz

$$\Theta=\Theta(x,y,\beta)+\gamma.$$

Bu ikki parametrga bog‘liq, shuning uchun Gamilton-Yakobi tenglamasi to‘liq integralini anglatadi.

Endi Gamilton-Yakobi tenglamasi to‘liq integralidan Eyler tenglamasi umumiy integralini keltirib chiqarish yo‘lini ko‘rib chiqamiz.

β parametrga bog‘liq bo‘lgan biror-bir $\Theta(x,y,\beta)$ Gamilton-Yakobi tenglamasi integri berilgan bo‘lsin

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial\beta}\not\equiv 0. (5)$$

Unda Eyler tenglamasi umumiy integrali quyidagi tenglamasini y ga nisbatan echish orqali topish mumkin

$$\frac{\partial\Theta(x,y,\beta)}{\partial\beta}=\alpha. (6)$$

Haqiqatdan ham, har bir β da $\Theta(x,y,\beta)$ funksiya Gamilton-Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi, biror-bir transversallar oilasini, shu bilan birga berilgan variatsion masalaning ekstremallar maydonini anglatadi.

Bu maydonning u qiyaligi faqat x va y o‘zgaruvchilarga emas, β parametrga ham bog‘liq:

$$u=u(x,y,\beta)$$

u va Θ funksiyalar β parametrning barcha qiymatlarida (3) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi, shuning uchun ham tenglamalar sistemasini β ga nisbatan bevosita aniqladiki,

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial\beta}=F''_{y'y'}(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial\beta},\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial\beta}=-F''_{y'y'}(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial\beta}u\ (7)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bulardan foydalanib, topamizki,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial\beta}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial\beta}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$\left(\frac{dy}{dx}-\mathrm{u}(x,y,\beta)\right)F''_{y'y}(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial\beta}.\ (8)$$

Endi esa $y-(6)$ tenglama bilan berilgan x ga bog‘liq funksiya bo‘lsin. Uni Eyler tenglamasini qanoatlantirishini ko‘ramiz. Bunday holda, u α,β ikki bog‘liqsiz parametrlarga bog‘liq bo‘lganligi sababli, y uning umumiy integral bo‘ladi. Xuddi shunday, uning Eyler tenglamasini qanoatlantirishini qiyinchiliksiz topamiz.

(8) funksiyaning chap qismidan, (6) tenglamaga ko‘ra bu funksiya nolga aylanadi. Bu holda

$$\frac{dy}{dx}=u(x,y,\beta)\ (9)$$

yoki (5) shart va (7) tenglamalarning birinchisiga ko‘ra, $\frac{\partial y}{\partial\beta}F''_{y'y'}(x,y,u)$ nol emas. Ammo (3) ning oxirgi tenglamasi berilgan ekstremal maydonning differensial tenglamasi bo‘ladi va y funksiya uni qanoatlantirsa, u ekstremal va Eyler tenglamasini qanoatlantiradi, bu esa so‘ralgan natija.

1-misol. Avvalo integral minimum haqidagi masalani qaraymiz:

$$I=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Yechish. Berilgan masala uchun Eyler tenglamasi $y''=0$ va ekstremallar oilasi fazoda to‘g‘ri chiziqlar oilasiga ega. (9) transversallik sharti bu holda quyidagicha

$$\left(\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta x+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y=0, y'\cdot\frac{\delta y}{\delta x}=-1$$

Ya’ni, ortogonallik shartini ifodalaydi.

u va Θ funksiyalarni bog‘lovchi sistema bu holda quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\sqrt{1+u^2}-\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

bu yerdan u ni ajratib, berilgan masala Gamilton - Yakobi tenglamasini topamiz:

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2=1.$$

Ekstremallar maydoni bir parametrga bog‘liq, fazoni to‘liq yoki qandaydir qismini qoplaydigan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Bu maydonning transversallar oilasi esa uning egri chiziqlariga o‘tkazilgan ortogonallar oilasi bo‘ladi.

2-misol. Agar quyidagi funksionalda

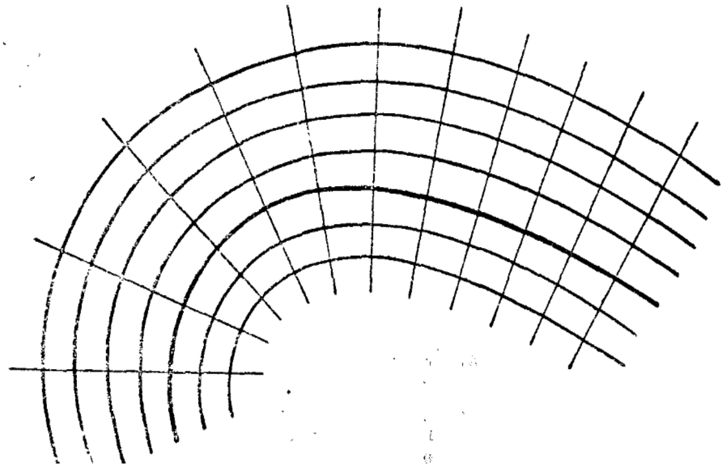
$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx,$$

F funksional x ga bog‘liq bo‘lmasa, unda funksional quyidagi akslantirishga bog‘liq invariant

$$x^* = x + \alpha, y^* = y$$

bo‘ladi.

Berilgan akslantirishga mos keluvchi kanonik sistemaning birinchi integrali mavjud bo‘lishi kerak. Bu birinchi integral $H = const$ bo‘ladi.



1-chizma (2.1.5- misolning yechimi uchun keltirilgan)

Transversallar maydonini qurishda bu oilaning bitta chegarasini butunlay ixtiyoriy tanlashimiz mumkin. Bunday holda barcha transversallar oilasini yuqoridagi bobga asoslanib qurishimiz mumkin. Ayniqsa, bu egri chiziqqa nisbatan normallar oilasini qurib, ekstremallar maydoniga ega bo‘lamiz, barcha to‘g‘ri chiziqlarni teng kesmalarga bo‘lib, yoki bu holda I integral o‘lchovi shunchaki egri chiziq uzunligi bo‘ladi, biz esa barcha egri chiziqli transversallar oilasiga ega bo‘lamiz (1 - chizma). Olingan egri chiziqlar ular (normallar kesmasi) orasidagi masofa doimiy o‘lchovni saqlashi kabi xususiyatga ega.

Bunday egri chiziqlar oilasi parallel egri chiziqlar oilasi deyiladi. Bunday oilaga oddiy misol qilib, biror markazdan olingan konsentrik aylanalarni olish mumkin.

Nihoyat, eslatib o‘tamizki, qaralayotgan masalani bir jinsli muhitda yorug‘likning tarqalishi kabi geometrik optika masalasi sifatida qarash mumkin. Bunday holda maydon ekstremali yorug‘lik nurlarini ifodalaydi, transversallar esa to‘lqin yuzasini, Ya’ni berilgan egri chiziqdan biror egri chiziqqacha yorug‘likning geometrik nuqtalar o‘rnida aynan bir vaqtda borishi bo‘ladi.

Xususiy holda, agar yorug‘lik manbai nuqta bo‘lsa, unda to‘lqin yuzasi markazi shu nuqtada bo‘lgan konsentrik aylanalar bo‘ladi.

3-misol. Integral minimum haqidagi masala uchun maydonni qaraymiz.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{y}.$$

Yechish. Bu masalaning ekstremallar oilasi abssissalar o‘qidagi markazga ega aylanalar oilasi bo‘ladi:

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2$$

va koordinatalar o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar.

Bu oiladan $M_0(x_0, y_0)$ nuqta orqali o‘tuvchi ekstremallarni belgilaymiz, unda ekstremal tenglamasi quyidagicha bo‘lgan markaziy maydonga ega bo‘lamiz:

$$(x - c)^2 + y^2 = y_0^2 + (x_0 - c)^2.$$

Bu maydon uchun transversallar oilasini topamiz. Buning uchun egri chiziqli chiziqli integral bo‘lgani sabab, formuladan foydalanib, $\Theta(x, y)$ funksiyani topamiz, unda integrallash yo‘liga bog‘liq emasligi sababli, $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va $M(x, y)$ nuqtalarni bog‘lovchi ekstremalni olamiz. Bu holda, kuzatganimiz kabi, u asosiy integralga aylanadi, Ya’ni

$$\Theta(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{ds}{y}.$$

Oxirgi integralni hisoblash uchun, ekstremallar markazidan ekstremaldagi nuqtada tomon yo‘nalgan, radius bilan ifodalanadigan, integrallash burchagi φ o‘zgaruvchini qo‘llaymiz, unda, agar R radiusni anglatsa, c - ekstremal markazining abssissasi bo‘lsa, o‘tish formulasi quyidagicha:

$$x = c + R\cos\varphi\,, y = R\sin\varphi,$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\, d\varphi.$$

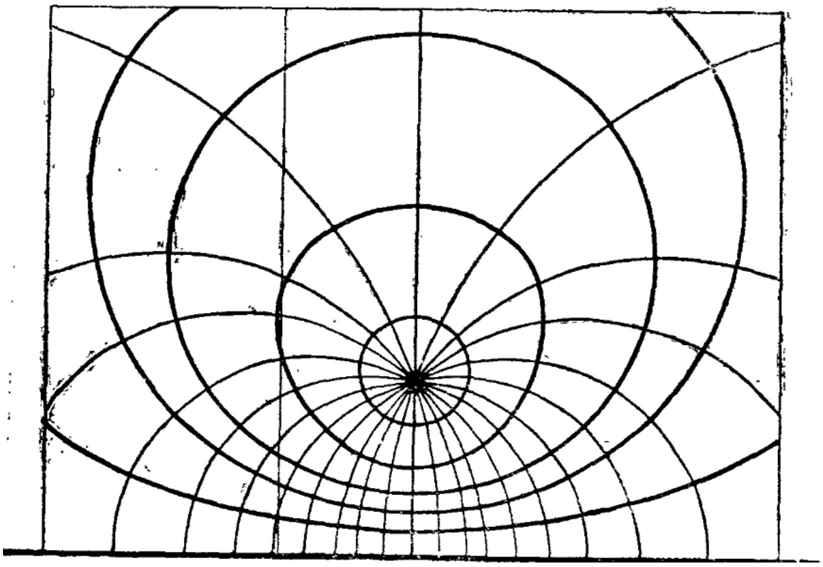
Bu yerdan

$$\Theta = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \left[\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi_0}^{\varphi} = \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Endi φ va φ_0 parametrlar bilan ifodalangan aynan transversal tenglamasini yoza olamiz:

$$\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}} = a, tg\frac{\varphi}{2} = a_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}, a_1 = e^a > 0.$$

Eslatib o‘tamizki, olingan transversal tenglamasi formasi ancha qulay, sababi, bu oilaning egri chiziqlarini chizishda qulay geometrik holatni beradi. Maydonning o‘zi 2 - chizmada berilgan.



2 - chizma. (4 - misolning echimi aniq bo‘lishi uchun)

4-misol. Yuqoridagi ikki misolda ham transversallik sharti ortogonallik shartidan ixtiyoriy kelib chiqdi. Endi esa bunday bo‘lmaydigan misolni ko‘ramiz.

Yechish. Minimum haqidagi masalaga ko‘ra

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 \, dx$$

funksional ekstremallar to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi, transversallik sharti esa:

$$[y'^2 - 2y'^2]\delta y + 2y'\delta x = 0, \frac{\delta y}{\delta x} = 2y',$$

Ya’ni, maydonning har bir nuqtasida transversallarga urinmaning burchak koeffitsienti ekstremallarning burchak koeffitsientidan ikki marta kichik bo‘lishi kerak.

Quyidagi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar oilasini qaraymiz:

$$y = mx_0.$$

Bu variatsion masala uchun ekstremal maydonni akslantiradi. Endi bu maydonning transversallar oilasini topamiz. Yuqoridagilardan ketma-ket foydalanib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$y = mx, u = m = \frac{y}{x}, \frac{\partial \Theta}{\partial x} = u^2 - 2u^2, \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 2u.$$

Bundan

$$\Theta(x_1, y_1) = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} -u^2 dx + 2u dy.$$

$y = \frac{y_1}{x_1}$ ekstremal egri chiziq integrallanganini x uchun olib,

$$u = \frac{y_1}{x_1}, dy = \frac{y_1}{x_1} dx,$$

$$\Theta(x_1, y_1) = \int\limits_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} -\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 dx + 2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 dx = \frac{y_1^2}{x_1^2} x \Bigg|_0^{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}$$

ekanligini topamiz.

Shunday qilib, $\Theta(x, y) = \frac{y^2}{x}$ bundan ko‘rinadiki, qaralayotgan transversallar oilasi

$$y^2 = cx,$$

ya’ni, simmetriya o‘qi abssissalar o‘qida va uchi koordinatalar boshida bo‘lgan parabolalar oilasini tashkil etadi.

Olingan maydonda transversallik sharti kuzatiladi va geometrik aniq yoki ma’lumki, parabolaga urinma nuqtasini uchi bilan bog‘lovchi to‘g‘ri chiziqdan ikki karra kichik burchak koeffitsientiga ega bo‘ladi. Aytish joizki, [1-7] maqolalarda hosila va differensiallarga oid bir qator teoremalar va qarshi misollar keng qo’llanilgan.

Eyler-Lagranj hamda Gamilton-Yakobi tenglamalari [8-38] ilmiy maqolalarda keng ko’lamli qo’llanilgan. Xususan, singulyar integral tenglamalarni yechishda, gipergeometrik funksiyaning analitik davom ettirishda, yechimlarning mavjud va yagonaligini isbotlashda hamda Eyler integrallarini hisoblashda keng qo‘llanilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Хамроев Н.Ш. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш методикаси ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), 141-153 б.

2. Хамроев Н.Ш. Иккинчи тартибли оддий дифференицал тенгламалар учун чегаравий масалаларни Грин функцияси ёрдамида ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), 154-167 б.

3. Жураев Т. Х.,Хамраев Н.Ш., Сувонов О. Ш., Сапаров Х. Р. Разработка концепции силлабуса для учебного процесса геометро-графических дисциплин // Образование и проблемы развития общества. 2020. №3 (12).

4. Жураев Т.Х., Хамраев Н.Ш., Ураков О.Х., Абдуманнонов М., Саидова Г.К. Решение краевой задачи построения плоских сопряжений геометрическим моделированием для направляющих поверхностей рабочих органов \\ В сборнике: Эффективность применения инновационных технологий и техники в сельском и водном хозяйстве. Сборник научных трудов международной научно-практической онлайн конференции, посвященной 10-летию образования Бухарского филиала Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства. 2020 г., с. 346-348.

5. Sobirov K.N., Hamroev N.SH., Khamroyev G.F. Prospects for the development of tourism animation activities [Электронный ресурс] // Экономика и социум, 2020, №11(78). С. 335-338.

6. Xamroev N.Sh. Funksiyaning hosilasiga doir ayrim mulohazalar // Science and Education, scientific journal, 3:10 (2022), 24-36 b.

7. Хамроев Н.Ш. Интерактивные методы при преподавании темы «двойные интегралы» // Science and innovation, 1:6 (2022), стр. 113-124.

8. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

9. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical

systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

10. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

11. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International

Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

12. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

13. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

16. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.

17. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

18. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

19. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

20. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

21. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

22. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

23. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

24. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

25. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

26. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

27. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

28. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

29. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

30. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

31. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

32. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

33. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

34. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

35. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

36. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

37. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

38. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).