Keli daraxtida aniqlangan model uchun asosiy holatlar

O'g'iloy Rahmon qizi Yarashova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada uchinchi tartibli Keli daraxtida aniqlangan spin qiymati to'rtga teng bo'lgan modelining asosiy holatlari tahlil qilingan. Uchinchi tartibli Keli daraxtida spin qiymati to'rtga teng bo'lgan yuqoridagi ikki yuz qirq uchta konfiguratsiyalardan energiyasi tenglarini ajratib, o'n birta sinfdan iborat ekanligi va itiyoriy tartibli Keli daraxtida aniqlangan Potts modeli uchun birlik sharda energiyani hisoblash formulasi o'rganib chiqilgan.

Kalit so'zlar: Gibbs o'lchovlari, modellar, Keli daraxti, birlik sharlar, Gamiltonyan, spin qiymati, Potts modelining energiyasi, q-komponentli model, Kroniker simvoli, kvant maydoni, Mo Gans statsionar taqsimoti

Basic cases for the model of the Keli tree

Ugiloy Rahmon qizi Yarashova
Bukhara State University

Abstract: In this article, the main cases of the model with a spin value equal to four, defined in the third-order Keli tree, are analyzed. The third-order Keli tree consists of eleven classes by separating the energy equals from the above two hundred and forty-three configurations with a spin value of four, and the formula for calculating the energy in a unit sphere for the Potts model defined in the arbitrary Keli tree is studied.

Key words: Gibbs measurements, models, Keli tree, unit spheres, Hamiltonian, spin value, Potts model energy, q-component model, Kroniker symbol, quantum field, Mo Gans stationary distribution

Oxirgi yillarda daraxtlarning avtomorfizmlar gruppasini o'rganishga doir juda ko'p ilmiy maqolalar vujudga kela boshladi, ayniqsa Keli daraxti (Keli daraxti ba'zi bir terminalogiyada Bete panjarasi ham deyiladi). Keli daraxti Γ^k, bu $k \geq 1$ tartibli cheksiz daraxt bo'lib, ya'ni har bir uchidan roppa-rosa $k+1$ dona qirra chiquvchi, siklsiz cheksiz grafdir.

Faraz qilaylik, $\Gamma^k = (V, L, i)$, bu yerda V - Γ^k-ni uchlar to'plami, L-uning qirralar to'plami va $i-$ insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirraga uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi. Agar $i(e) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va bunda $l = < x, y >$ ko'rinishda yozamiz. Keli daraxtida $d(x, y)$, $x, y \in V$ masofa

$$d(x, y) = \min\{d : \exists x = x_0, x_1, ... x_{d-1}, x_d = y \in V \}$$

bu yerda $< x_0 x_1 >, < x_1, x_2 >, ..., < x_{d-1,} x_d >$ yaqin qo'shnilar formula yordamida kiritiladi. Yuqoridagi minimumni aniqlovchi

$$\pi = \{x = x_0, x_1 ... ..., x_{d-1}, x_d = y \in V\}$$

ketma-ketlik x dan y ga yo'l deyiladi. Maqolada U.A.Roziqov va G.I.Botirovlarning ilmiy maqolalaridan ma'lumki [1], Keli daraxtini uchlari bilan tashkil etuvchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli $(k+1)$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppa orasidagi munosabat haqida mulohaza yuritamiz.

Ta'rif. G gruppa A_α qism gruppalarni erkin ko'paytmasi deyiladi, agar A_α qism gruppa birgalikda butun G gruppani hosil qilsa, ya'ni G ning har bir g elementi A_α dan olingan chekli elementlar ko'paytmasidan iborat bo'lsa:

$$g = a_1 a_2 ... a_n, a_i \in A_\alpha, \ \overline{i = 1, n}$$

va agar G ning har bir elementi quyidagi shartlar ostida yagona ko'rinishda bo'lsa:

1) barcha a_i elementlar birdan farqli;

2) (1.2.1) da A_α qism gruppadan ikkita element yonma-yon turmaydi, umuman olganda (1.2.1) ko'paytmada bitta qism gruppaga kirgan bir necha ko'paytuvchini o'z ichiga olgan bo'lsa ham.

Faraz qilaylik, $G_K -$ tashkil etuvchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo'lgan, $(k+1)$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarni erkin ko'paytmasi bo'lsin.

Tasdiq: Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_κ gruppa orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Isbot: Bu moslik quyidagicha quriladi. Fiksrlangan ihtiyoriy $x_0 \in V$ uchga G_κ gruppaning e birlik elementini mos qo'yamiz. Umumiylikka zid bo'lmagan holda ko'rilayotgan grafni tekislikda deb qarashimiz mumkin. Keyin x_0 uchga qo'shni bo'lgan uchlarni soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalish bilan $x_i \in V$ lar bilan nomerlab chiqamiz.

Har bir $x_i \in V$ uch uchun gruppaning a_i, $i = 1, k+1$ tashkil etuvchilarini mos qo'yamiz. Endi har bir $x_i \in V$ uchlar uchun ikkilik x_{ij} nomerlashni aniqlaymiz, bular

x_i — ni qo'shnilari bo'ladi. x_i — ni bitta qo'shnilaridan biri x_0 bo'lib, unga $x_{ii} = x_0$ mos qo'yamiz va u holda qolgan $x_i \in V$ qo'shnilarni nomerlash yuqoridagi nomerlash qoidasi bo'yicha bo'ladi. Har bir x_{ij} uch uchun $a_i\ a_{j,}$ $\quad i, j = \overline{1,\ k+1}$ so'zni mos qo'yamiz, $x_{ii} = x_0$ va $a_i^2 = e$ bo'lgani uchun, u holda bu akslantirish keyingi qadamlarda ham saqlanadi.

$x_{i,j}$ uchlarning qo'shnilari uchun uchtalik nomerlashni quyidagicha kiritamiz. $x_{i,j}$ - ni bitta qo'shnisi x_i bo'lgani uchun, unga $x_{ijj} = x_i$ mos qo'yamiz va u holda qolgan qo'shnilarni nomerlash yuqoridagi kabi bir qiymatli aniqlanadi. Har bir $x_{ij\kappa}$ uch uchun $a_j a_j a_k$ so'zni mos qo'yamiz. Bu akslantirish oldingi qadam bilan mos keladi, chunki $x_{ijj} = x_i$ va $a_j a_j a_j = a_j a_j^2 = a_i$. Shunday qilib, Γ^k-Keli daraxtida uchlar to'plami V bilan G_k gruppa orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Tasdiq isbot bo'ldi. Uni quyidagi rasmdan ham ko'rish mumkin.

Gibbs o'lchovlarini topish uchun tahlil etilayotgan modellarning asosiy holatlarini topish muhum sanaladi [1-3], chunki topilgan asosiy holatlar Gibbs o'lchovlarini 1 ga intiltiradi. Ehtimollar nazariyasidan bizga malumki, o'lchovlarning 1 ga yaqinlashish hodisalarni realligini ta`minlaydi.

U.A.Roziqov va G.I.Botirovlarning ishlarida [1] spin qiymati 3 ga teng bo`lgan Potts modeli uchun 2 tartibli Keli daraxtida asosiy holatlarni topish uchun, birlik sharlarga ajratilgan. U holda Potts modelining ko'rinishi quyidagiga teng bo'ladi [1-4]:

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y \in V \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Yuqoridagi Gamiltonyanga asosan 81 ta konfeguratsiya 6 ta sinflardan tashkil topgan birlik sharlarning energiyasiga teng bo'ladi [1]:

1- sinf: $U_1 = \frac{3}{2} J_1 + J_2$

2-sinf: $U_2 = J_1 + J_2$

3-sinf: $U_3 = 3J_3$

4-sinf: $U_4 = \frac{1}{2} J_1 + J_2$

5-sinf: $U_5 = \frac{1}{2} J_1$

6-sinf: $U_6 = J_2$

Maqolada spin qiymati 4 ga teng bo`lgan Potts modeli uchun 3 tartibli Keli daraxtida aniqlangan [1-2] asosiy holatlarni topish masalasini muhokama etilgan. Demak, birlik sharlarda Potts modelining energiyasi ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$U = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{d(x,y)=2 \\ x,y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Uchinchi tartibli Keli daraxtida spin qiyamti 3 ga teng bo'lgan birlik sharlardagi konfiguratsiyalr soni 243 tani tashkil etadi, bular quyidagi ko'rinishda bo'ladi. Shulardan ikkitasini keltiramiz:

1. $U = \frac{1}{2} J_1 (1+1+1+1) + J_2 (1+1+1+1+1+1) = 2J_1 + 6J_2;$

2. $U = \frac{1}{2} J_1 (1+1+0) + J_2 (1+0+0) = J_1 + J_2.$

Demak, uchinchi tartibli Keli daraxtida spin qiymati 4 ga teng bo'lgan yuqoridagi 243 ta konfeguratsiyalardan energiyasi tenglarini ajratib, quyidagi 11 sinfdan iborat ekanligi aniqlaymiz.

1-sinf $U = 2J_1 + 6J_2$

2-sinf $U = 6J_2$

3-sinf $U = \frac{3}{2} J_1 + 3J_2$

4-sinf $U = J_1 + 2J_2$

5-sinf $U = 3J_2$

6-sinf $U = J_2$

7-sinf $U = \frac{1}{2} J_1$

8-sinf $U = J_1 + J_2$

9-sinf $U = 2J_2$

10-sinf $U = \frac{1}{2} J_1 + J_2$

11-sinf $U = \frac{1}{2} J_1 + 3J_2$

11 ta sinfdan iborat bo'lgan energiyalar to'plamini Potts modeli uchun asosiy holat bo'ladigan sohlarni topish masalasini ko'rib chiqamiz. Bu masalani hal etish uchun, har bir energiyani minimallashtirish masalasi qaraladi, bu esa har bir energiyani boshqa energiyalardan katta emasligini topish deganidir. Demak, biz quyidagi 11 ta tengsizliklar sestemasining umumiy yechimlarini topib, ikki o'lchovli fazoda sohalarga ajratamiz.

Yuqoridagi tensizliklar sistemasining yechimlari quyidagilardan iborat.

$$U_1=\left\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2\geq 0,\ J_1\geq -\frac{J_2}{12}\right\}\quad U_6=\left\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2\leq 0,0\geq J_1\geq \frac{J_2}{2}\right\}$$

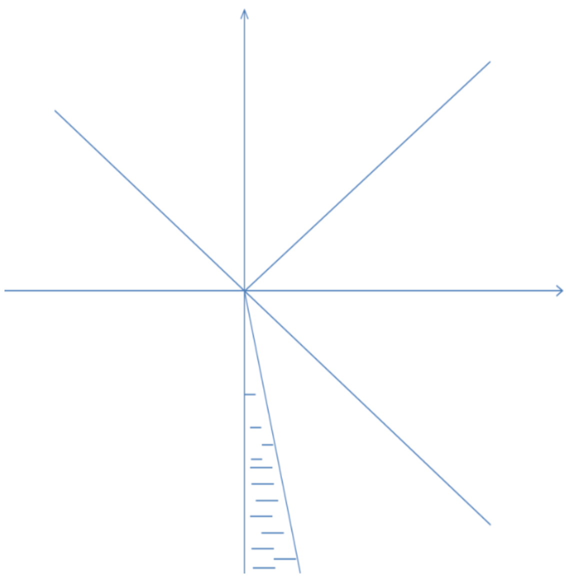
$$U_2=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2\leq 0, J_1\geq 0\}\quad U_7=\left\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2\leq 0, J_1\leq \frac{J_2}{2}\right\}$$

$$U_3=\left\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2\geq 0, J_1\leq -\frac{J_2}{12}\right\}\quad U_8=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}$$

$$U_4=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}\quad U_9=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}$$

$$U_5=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}\quad U_{10}=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}$$

$$U_{11}=\{(J_1,J_2)\in R^2: J_2 == 0, J_1 == 0\}$$



1-chizma. Kelib chiqqan soha

Endi Keli daraxtida aniqlangan bir nechta modellar va Potts modeli uchun birlik shardagi energyasining umumiy formulasini keltiramiz.

1) q- komponentli model. Bu modelning Gamiltaonyani quyidagicha aniqlanadi [3]:

$$H(G)=\sum_{<x,y>eL}\lambda(G(x)G(y))+\sum_{xev}h(G(x))$$

bu yerda,

$$\lambda(V_i,V_j)=\lambda_{i\,j},\ i, j=1,2,$$

q- esa konfiguratsiyaning qabul qiladigan spin qiymatlari:

$$q*q, h(Vj)\in R,\ j=1,2,....,q$$

va $(\tau\in\Omega)$ simmetrik matritsani tashkil qiladi. Ω- barcha konfiguratsiyalar to'plami.

Bu model uchun Rozikov va Botirovlarning olingan natijalari 2007 yilda Journal Statistical Mechanics: Theory and Exprement nomli jurnalda nashr etilgan [1].

2) Keli daraxtida o'zaro ta'siri 2 ga teng bo'lgan Potts modelining Gamiltonyani quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

bu yerda

$$J_1,\ J_2 \in R \text{ va } \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \begin{cases} 1, & \sigma(x) = \sigma(y) \\ 0, & \sigma(x) \neq \sigma(y) \end{cases}$$

$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$ Kroniker simvoli deyiladi.

Potts modeli uchun topilgan asosiy holatlar Rozikov va Botirovlar tomonidan Throry Mathematical Physics nomli journalda nashr etilgan [1]. Bu maqolada ikkinchi tartibli Keli daraxtida aniqlangan spin qiymati uchga teng bo'lgan Potts modeli uchun Asosiy holatlar va ularning sonlari topilgan.

Roziqov U.A. tomonidan Kroniker simvolining umumlashmasi quyidagi funksiya ko'rinishida kiritilgan [3]:

$$U(\tau a) : \Omega a \to \{|A|-1, |A|-2, \ldots |A| - \min\{|A|, |\Phi|\ \}$$

bu quyidagicha ifodalanadi:

$$\mathrm{V}\,(\tau a\,) = |A| - |\tau a \cap \phi| - \tau(x), x \ni A.$$

Masalan, agar G_A o'zgarmas konfiguratsiya bo'lsa u holda $|\tau A \cap \Phi| = 1$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki agar $|A| = 2$ bo'lib A=$\{x, y\}$ bo'lsa, u holda:

U$(\{\tau(x), \tau(y)\ \}) = \sqrt{\tau(x)\tau(y)}$ bu yerda (a) – a ning butun qismi.

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y)} = \begin{cases} 1, \tau(x) = \tau(y) \\ 0, \tau(x) \neq \tau(y) \end{cases}$$

r$\ni N$ va r^1=$\left[\dfrac{r+1}{2}\right]$ bo'lsin bu yerda (a)- a ning butun qismi. μ_r bilan barcha (x)= $\{y \ni V : d(x,y) \le r^1\ \}$ radiusi r^1 bo'lgan barcha shartlar to'plamini belgilaymiz, ya'ni: $\mu_r = \{br(x) : x \ni V\ \}$

Roziqov U.A. tomonidan quyidagi gamiltanian kiritilgan [1-4]:

$$H(T) = -J \sum_{b \ni Mr} V(\tau b) \text{ bu yerda } J \in R.$$

Bu model uchun Keli daraxtining asosiy holatlari va ularning soni topilgan hamda Botirov tomonidan Mathematical Notes nomli jurnalda natijalar nashr etilgan.

3) 2- o'lchovli nazariya kvant maydonida panjarali model d=2 bo'lsin. H- qadam bilan Z^2 panjarani qaraymiz. Mo Gans statsionar taqsimotiga mos keluvchi gamiltanian quyidagicha aniqlanadi:

$$H_0=\frac{1}{2}\sum_{ч}\left[\left(\vartheta(x_1+h,x_2)-\vartheta(x_2,x_2+h)-\vartheta(x_2,x_2)\right)^2+m^2{}_0h^2\vartheta^2(x_1,x_2)\right]$$

$X=(x_1,x_2)$ bu yerda $h\in Z^2$ dan olingan nuqta.

Keli daraxtida spin qiymatlari $\tau(x)x\ni V$ $\Phi=\{\pm1,\pm2,...,\pm q\}$ to'plam elementlari qabul qiluvchi λ modellarning gamiltaniani quyidagicha aniqlanadi.

$$H\,(T)=H\lambda(\tau)=\sum_{<x,y>\ni L}\lambda(\tau(x),\tau(y),J),$$

bu yerda $J\ni R^n, n\ni N$, barcha yon qo'shnilar bilan jamlanuvchidir.

Bu model uchun M. Rakhmatullayev tomonidan kuchsiz asosiy holatlar tushunchasi kiritilgan va olingan natijalar Theory Mathematical Physics nomli jurnalda nashir etirlilgan.

4) 2- o'lchovli panjarada Izing modeli quyidagicha aniqlanadi:

$$H_0=J\sum_{At-t^{v}11=1}\vartheta(t^1)\vartheta(t)=\pm1, t^1, t^{11}\ni z^2.$$

Agar J>0 bo'lsa ferramagnit holati bo'ladi, bu yerda 2 ta davriy $\vartheta^+=\{\vartheta(t)=1\}$, $\vartheta=\{\vartheta(t)=-1\}$ asosiy holat bo'ladi. Keli daraxtining birlik sharida energiyasini hisoblash:

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y)=\begin{cases}1, agar\tau(x=\tau(y)\\0, agar\tau(x)\pm\tau(y)\end{cases}}.$$

Izing modeli uchun ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida asosiy holatlar topilgan hamda bu natijalar [1] da nashir etilgan.

M to'plam birlik sharlar to'plamidan iborat bo'lsin. σ konfeguratsiya $b\in M$ birlik sharda aniqlangan bo'lsa, bu konfeguratsiya chegaralangan konfiguratsiya deyiladi va σ_b kabi belgilanadi.

Potts modeli uchun, birlik shardagi energiyasini hisoblash formulasini quyidagicha kiritamiz:

$$U(\sigma_b)\equiv U(\sigma_b,J)=\frac{1}{2}J_1\sum_{\substack{<x,y>\\x,y\in b}}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_2\sum_{\substack{x,y\in b\\d(x,y)=2}}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

bu yerda $J=(J_1,J_2)\in R^2$.

Teorema. 1) Markazi c nuqtada va qiymati $\sigma_b(c_b)=i$ bo'lgan σ_b konfeguratsiya (bu yerda c_b b sharning markazidir) hamda $|x:\sigma_b(x)=j|=m_j$, $j=1,2,...,q$ bu yerda |A| –A ning elementlar soni berilgan bo'lsin. U holda $U(\sigma_b)$ quyidagi ko'rinishda hisoblanadi

$$U(\sigma_b)\equiv U_{i,k}(m_j,J)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}\delta_{ij}\,m_j\,J_1+\sum_{j=1}^{q}C_{m_j}^2J_2$$

bu yerda $m_j \in N \cup \{0\}$, $\sum_{j=1}^{q} m_j = k+1$ and $J = (J_1, J_2) \in R^2$;

2) Ixtiyoriy σ_b konfeguratsiya uchun, $U(\sigma_b)$ quyidagi to'plamga tegishli bo'ladi.

$$U(\sigma_b) \in \{U_{i,k}(m_j, J) : m_j \in N \cup \{0\},\ \sum_{j=1}^{q} m_j = k+1 \ va\ J = (J_1, J_2) \in R^2\}.$$

Potts modeli uchun aniqlangan Keli daraxtida 3-tartibli spen qiymati 4 ga teng bo'lganda asosiy holatlar ko'rib chiqildi. Gibbs o'lchovlarini topish uchun tahlil etilayotgan modellarning asosiy holatlarini topish muhum sanaladi, chunki topilgan asosiy holatlar Gibbs o'lchovlarini 1 ga intiltiradi. Ehtimollar nazariyasidan bizga ma'lumki, o'lchovlarning 1 ga yaqinlashish hodisalarni realligini ta`minlaydi. Shuningdek Potts modeli uchun aniqlangan Keli daraxtida ixtiyoriy tartibli birlik sharning energiyasini hisoblash formulasi tahlil qilib chiqildi.

Hozirgi kunda zamonaviy matematikaning jumboqli masalalaridan hisoblangan o'lchovlar nazariyasiga har bir matematik qiziqib o'rganmoqda. Kristal panjara daraxt tipida bo'lgan moddalarning faza almashishlarini topish statistic fizikaning asosiy masalalaridan biridir. Gibbs o'lchovlari soni Kristal panjara tipida bolgan moddalarning faza almashishlar soni tengligi yani ma'lum bir siklik qonuniyatga bo'y sunishi o"zbek olimlari tomonidan o'rganilgan. Gibbs o'lchovlarini topish o'lchovlar nazariyasida juda muhimdir. [5-36] maqolalarda Gibbs o'lchovlari bo'yicha olib borilgan izlanishlarga o'xshash Banax va vaznli Sobolev fazolarida differensial operatorlar bo'yicha tadqiqotlar olib borilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. G.I. Botirov, U.A. Roziqov, Potts model with competing interactions on the Cayley tree: The countour method, Teor. Math. Phys. 153(1) (2007), 1423-1433

2. Botirov G.I., Qayumov U.U., Energy of unit balls for Potts model on a Cayley tree // Abstracts of the Conf. of Scientific Reports "New Theorems of Young mathematicians - 2013", 15-16 April 2013, p. 100-101..

3. U.A. Roziqov, Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. 2013

4. Botirov G.I.: Ground states for Potts model with competing interactions on Cayley tree // Uzbek Math. Jour. No.4, (2011), pp.59-65.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

7. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

16. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

17. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

18. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

19. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

20. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

21. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

22. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

23. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

24 Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

25. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

26. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

27. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

28. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

29. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo’yicha ba’zi uslubiy ko’rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

30. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

31. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

32. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

33. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

34. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

35. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

36. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International

Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.