Ikkita buzilish chizig'iga ega kvachiziqli elliptik tipdagi tenglamalar to'g'risida boshlang'ich tushunchalar va ularning qo'llanishi haqida

Dilnoza Shavkat qizi Bozorova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada Ikkita buzilish chizig'iga ega kvachiziqli elliptik tipdagi tenglamalar to'g'risida boshlang'ich tushunchalar berilgan. Bunda matematik fizika tenglamalari haqida umumiy ma'lumotlar keltirilgan. Xususiy hosilali differensial tenglamalar va ularning tarixi haqida tushunchalar berilgan. Aralash tipdagi tenglamalar haqida ma'lumotlar bayon qilingan. Ayrim differensial tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltirish yo'llari ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: multiindeks, multiindeks uzunligi, differensial operator, kvachiziqli differensial operator, regulyar yechim,bir jinsli yechim, elliptik tenglama, ultragiperbolik tenglama, Trikomi tenglamasi, Puasson tenglamasi, korrekt qo'yilgan masala, Laplas tenglamasi

Introduction to quasilinear elliptic equations with two distortion lines and their applications

Dilnoza Shavkat qizi Bozorova
Bukhara State University

Abstract: The article provides basic concepts about quasilinear elliptic type equations with two distortion lines. It contains general information about mathematical physics equations. Concepts about differential equations with specific derivatives and their history are given. Information about equations of mixed type is described. Ways to make some differential equations into canonical form are shown.

Keywords: multi-index, multi-index length, differential operator, quasi-linear differential operator, regular solution, homogeneous solution, elliptic equation, ultrahyperbolic equation, Tricomi equation, Poisson equation, correctly set problem, Laplace equation

D orqali dekart ortogonal koordinatalari $x_1, x_2, \dots x_n, n \geq 2$ bo'lgan x nuqtalarning $n-$o'lchovli E^n yevklid fazosidagisohani, ya'ni ochiq bog'langan (bo'sh bo'lmagan) to'plamni belgilaymiz. Tartiblangan manfiy bo'lmagan n ta butun sonning $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ ketma-ketligi $n\ tartibli\ multiindeks$ deyiladi, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n$ son bu $multiindeksning\ uzunligi$ deb ataladi.

$u(x) = u(x_1, x_2, \dots x_n)$ funksiyaning $x\epsilon D$ nuqtadagi $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n$ tartibli hosilasini

$$D^\alpha u = {D_1}^{\alpha_1} {D_2}^{\alpha_2} \dots .. {D_n}^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \dots . \partial {x_n}^{\alpha_n}}, D^0\ u = u(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Xususiy holda $\alpha = \alpha_1$ bo'lganda

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial {x_i}^{\alpha_i}} = {D_i}^{\alpha_i} u,\ D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i},\ {D_i}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = u_{x_i x_i}$$

$F = F(x, \dots, p_\alpha, \dots)$ funksiya D soha x nuqtalarining va $P_\alpha = P_{\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n} = D^\alpha u, \alpha_i = 0, 1, \dots$ haqiqiy o'zgaruvchining berilgan funksiyasi bo'lib, kamida bitta $\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}, |\alpha| = m > 0$ hosila noldan farqli bo'lsin.

Ushbu

$$F(x, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0\ (1)$$

Tenglik noma'lum $u(x) = u(x_1, x_2, \dots x_n)$ funksiyaga nisbatan *m-tartibli xususiy xosilali differensial tenglama* deyiladi.

(1) Tenglamaning chap tomoni esa xususiy hosilali *differensial operator* deb ataladi.

Agar F barcha $p_\alpha(|\alpha| = 0, 1, \dots m)$ o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, (1) tenglama *chiziqli differensial tenglama* deb ataladi. Agarda $F, |\alpha| = m$ bo'lganda barcha p_α o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, (1) *kvazichiziqli differensial tenglama* deb ataladi. D sohada aniqlangan $u(x)$ funksiya (1) tenglamada ishtirok etuvchi barcha hosilalari bilan uzluksiz bo'lib, uni ayniyatga aylantirsa, $u(x)$ uni (1) tenglamaning *regulyar (klassik) yechimi* deyiladi.

Xususiy hosilali m-tartibli chiziqli differensial tenglamani ushbu

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x)\ (2)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin..

Barcha $x\epsilon D$ lar uchun (2) tenglamaning o'ng tomoni $f(x)$ nolga teng bo'lsa, (2) tenglama bir jinsli, $f(x)$ funksiya nolga teng bo'lmasa, bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bir jinsli bo'lmagan (2)tenglamaning yechimlari bo'lsa,ravshanki $w(x) = u(x) - v(x)$ ayirma bir jinsli $(f = 0)$ tenglamaning yechimi bo'ladi. Agarda $u_i(x), i = 1, \dots, k$ funksiyalar bir jinsli $(f = 0)$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i\, u_i(x)$ funksiya ham, bu yerda c_i haqiqiy o'zgarmaslar, shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Xususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \ (3)$$

ko'rinishda yoziladi,bu yerda A_{ij}, B_i, C, f, $-D$ sohada berilgan haqiqiy funksiyalardir.

(3)Tenglamaning barcha $A_{ij}, i, j = 1, \dots . n$ koeffitsentlari nolga teng bo'lgan $x \in D$ nuqtalarda tenglama ikkinchi tartibli bo'lmay qoladi,ya'ni bu nuqtalarda (3)tenglamaning tartibi buziladi.Bundan keyin biz (3) tenglama berilgan sohada uning tartibi ikkiga teng deb hisoblaymiz.(3) tenglamada $i \neq j$ bo'lganda alohida – alohida $A_{ij}u_{x_i x_j}, A_{ji}u_{x_j x_i}$ qo'shiluvchilar ishtirok etmay,balki ularning yig'indisi $(A_{ij} + A_{ji})u_{x_i x_j}$ ishtirok etadi.Shu sababli ham umumiyatlikka ziyon yetkazmay hamma vaqt $A_{ij} = A_{ji}$ deb hisoblaymiz.

D sohada aniqlangan va $k-$ tartibgacha xususiy hosilali bilan uzluksiz bo'lgan haqiqiy $u(x)$ funksiyalarning to'plami $C^k(D)$ orqali belgilanadi. Faraz qilaylik (1) tenglamada ishtirok etayotgan $F(x, \dots, p_\alpha, \dots)$ funksiya, $p_\alpha = p_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, |\alpha| = m$ o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz birinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin.(1) tenglama nazariyasida $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ haqiqiy o'zgaruvchilarga nisbatan ushbu

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\alpha=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \lambda^\alpha, \lambda^\alpha = \lambda_1{}^{\alpha_1}\lambda_2{}^{\alpha_2} \dots \lambda_n{}^{\alpha_n} \ (4)$$

m-tartibli forma - m darajali bir jinsli ko'phad muhim rol o'ynaydi.Bu forma (1) tenglamaga mos bo'lgan *xarakteristik forma* deyiladi.

Ikkinchi tartibli kvazichiziqli

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\, u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \ (5)$$

differensial tenglama uchun,bu yerda $A_{i,j}(x) \in C(D)$ (4) forma

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\, \lambda_i \lambda_j \ (6)$$

kvadratik formadan iborat bo'ladi.Xususiy hosilali differensial tenglamalar,shu jumladan (5) ko'rinishdagi ikkinchi tartibli tenglama tekshirilayotganda, iloji boricha erkli o'zgaruvchilarni almashtirib, tenglamalarni soddaroq ko'rinishga keltirishga harakat qilinadi va ayrim hollarda bunga erishiladi ham.Shu maqsadda, avvalo (5) tenglamada erkli o'zgaruvchilarni almashtirganda uning $A_{i,j}(x)$ koeffisentlari qanday qonun bilan o'zgarishini tekshiramiz. $x = (x_1, \dots, x_n)$ O'zgaruvchilar o'rniga $y = y(x)$, ya'ni

$$y_k = y_k(x_1, \dots, x_n), k = 1, \dots, n$$

o'zgaruvchilarni kiritamiz. x o'zgaruvchilarning biror atrofida $y_k \epsilon C^2$ bo'lsin va ushbu yakobian $\frac{D(y_1,\dots,y)}{D(x_1,\dots,x_n)} \neq 0$ deb hisoblaymiz.Bu shartga ko'ra x o'zgaruvchilarni y lar orqali ifodalashimiz mumkin,ya'ni $x = x(y)$. (5) tenglamaga kirgan $u(x)$ funksiyaning hosilalarini ya'ni y o'zgaruvchilarga nisbatan hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Bu ifodalarni (5) tenglamaga qo'yib uni ushbu ko'rinishda yozib olamiz:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{A}_{kl}\,u_{y_k y_l}+\widetilde{\Phi}\left(y,u,u_{y_1},\dots,u_{y_n}\right)=0, (7)$$

bu yerda

$$\tilde{A}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}, (8)$$

$\widetilde{\Phi}$ esa, Φ dan va birinchi tartibli hosilalar ishtirok etgan hadlardan tashkil topgan ifoda.

(5) tenglama tekshirilayotgan D sohada aniq x_0 nuqtani olamiz va $y_0=y(x_0),\beta_{ki}=\frac{\partial y_k(x_0)}{\partial x_i}$ belgilashlarni kiritamiz.(8) formula x_0 nuqtada quyidagicha yoziladi:

$$\tilde{A}_{kl}(y_o)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x_o)\,\beta_{ki}\beta_{lj}\ (9)$$

(6) kvadratik formani x_0 nuqtada yozib olamiz:

$$Q=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x_o)\,\lambda_i\lambda_j\ (10)$$

Maxsus bo'lmagan ushbu

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}\beta_{ki}\,\xi_k, \det(\beta_{ki})\neq 0\ (11)$$

affin almashtirish natijasida (10) kvadratik forma

$$Q=\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{A}_{kl}(y_o)\,\xi_k\xi_l\ (12)$$

ko'rinishga keladi.Bu kvadratik formaning koeffisentlari ham (9) formula bilan aniqlanadi.Shunday qilib, (5) tenlamani x_0 nuqtada x o'zgaruvchilar o'rniga ya'ni $y=y(x)$ o'zgaruvchilar kiritib soddalashtirish uchun, shu nuqtada (10) kvadratik formani maxsus bo'lmagan (11) chiziqli almashtirish yordami bilan soddalashtirish yetarlidir.Algebra kursida isbot qilinadiki, hamma vaqt shunday maxsus bo'lmagan (11) almashtirish mavjud bo'lib uning yordami bilan (10) kvadratik forma quyidagi ko'rinishga olib kelinadi:

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\,{\xi_k}^2\ (13)$$

bu yerda $\mu_k, k=1,\dots,n$ koeffisentlar 1,-1, 0 qiymatlarni qabul qiladi.Shu bilan birga musbat (manfiy) koeffisentlar soni (inersiya indeksi) va nolga teng bo'lgan koeffisentlar soni (forma defekti) affin invariantdir, ya'ni bu sonlar faqat (10) forma bilan aniqlanib, (11) almashtirishning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmaydi. Bu narsa (5) differensial tenglama $A_{ij}(x)$ koeffisentlarning x_0 nuqtada qabul qiladigan qiymatlariga qarab klassifikatsiya qilish imkonini beradi.

Yuqorida aytilganlarga asosan (7) tenglama

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k\,u_{y_k y_l}+\widetilde{\Phi}\left(y,u,u_{y_1},\dots,u_{y_n}\right)=0\ (14)$$

ko'rinishda yoziladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaning aralash hosilalar qatnashmagan bunday ko'rinishi odatda uning *kanonik ko'rinishi* deyiladi. (5) tenglamani bitta nuqtada emas, hech bo'lmaganda $x_0 \epsilon D$ nuqtaning biror kichik atrofida kanonik ko'rinishga olib keluvchi o'zgaruvchilarning almashtirishini (affin bo'lishi shart emas) toppish mumkinmi degan savol tug'iladi. Bu savolga ijobiy javob faqat $n = 2$ bo'lgandagina ma'lum.Bu holni biz alohida ko'ramiz.

Agar barcha $\mu_k = 1$ yoki barcha $\mu_k = -1, k = 1, \ldots, n$ bo'lsa, ya'ni Q forma mos ravishda musbat yoki manfiy aniqlangan (definit) bo'lsa (5) tenglama $x \in D$ nuqtada *elliptik tipdagi* yoki *elliptik tenglama* deyiladi.

Agar μ_k koeffisentlaridan bittasi manfiy, qolganlari musbat (yoki aksincha) bo'lsa, (5) tenglama $x \in D$ nuqtada giperbolik tenglama deb ataladi. μ_k Koeffisentlardan l tasi, $1 < l < n - 1$, musbat, qolgan $n - l$ tasi manfiy bo'lsa,(5) tenglama *ultragiperbolik* tipdagi tenglama deb ataladi. Agar μ_k koeffisentlardan bittasi nolga teng, qolganlari noldan farqli va bir xil ishorali bo'lsa,(5) tenglama $x \in D$ nuqtada *parabolik tenglama* deyiladi. Agar koeffisentlardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, (5) tenglama keng ma'noda $x \in D$ nuqtada *parabolik tenglama* deb ataladi.

Agar (5) tenglama D sohaning har bir nuqtasida elliptik,giperbolik yoki parabolik bo'lsa, u holda D sohada mos ravishda *elliptik,giperbolik* yoki *parabolik tipidagi tenglama* deb ataladi.

Agar noldan farqli bo'lgan, bir xil ishorali haqiqiy sonlar mavjud bo'lib, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2 \leq Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2 \quad (15)$$

tengsizlik bajarilsa, D sohada elliptik bo'lgan (5) tenglama *tekis elliptik tenglama* deyiladi. Masalan Trikomi nomi bilan yuritiladigan

$$x_2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}$$

tenglama $x_2 > 0$ yarim tekislikning har bir nuqtasida elliptik bo'lsa ham, bu yerda tekis elliptik emasdir. D sohaning turli qismida (5) tenglama har xil tipga tegishli bo'lsa uni *aralash tipdagi tenglama* deyiladi. Yuqorida keltirilgan *Trikomi tenglamasi* $x_2 = 0$ o'qning ixtiyoriy qismini o'z ichiga olgan ixtiyoriy D sohada aralash tipdagi tenglamaga misol bo'ladi.

Yuqorida bayon qilingan (5) tenglamaning klassifikatsiyasini ekvivalent tarzda $A = \|A_{ij}\|$ matrisaning xarakteristik sonlariga asoslanib ham berish mumkin.Buning uchun algebradan ma'lum bo'lgan (10) kvadratik formaning (13) kanonik ko'rinishdagi $\mu_k, k = 1, \ldots, n$ sonlar A matrisaning xarakteristik sonlaridan iborat ekanligini eslash kifoyadir. Ma'lumki,simmetrik $(A_{ij} = A_{ji})$ matrisaning barcha xarakteristik sonlari haqiqiy sonlardan iboratdir. A matrisaning xarakteristik sonlari ushbu $\det(A - \lambda E)$ algebraik tenglamaning ildizlaridan iborat,bu yerda E -birlik matrisa. Demak, (5) tenglama berilgan D sohaning ixtiyoriy x nuqtasida A matrisa xarakteristik sonlarining ishorasini aniqlab, (5) tenglamaning qaysi tipga tegishli ekanini darhol bilib olish mumkin. Bu yerda yana bir muhim tushuncha,xarakteristik sirtlar tushunchasini kiritib o'tamiz.

Ushbu $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,(x)\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = 0$ tenglama (5) differensial tenglama *xarakteristikalarning tenglamasi* deyiladi. Agar $\omega(x_1, \dots, x_n)$ funksiya xarakteriskalar tenglamasini qanoatlantirsa,

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = c, c = const$$

tenglik bilan aniqlanadigan sirt berilgan (5) differinsial tenglamaning *xarakteristik sirti yoki xarakteristikasi* deyiladi.

O'zgaruvchilar soni ikkita bo'lganda xarakteristik egri chiziq haqida so'z boradi. Xarakteriskalar tenglamasi rasman bunday tuziladi: (5) differensial tenglamaga mos bo'lgan (6) kvadratik formani tuzib, unda $\lambda_i = \frac{\partial\omega}{\partial x_i}, \lambda_j = \frac{\partial\omega}{\partial x_j}$ deb, hosil bo'lgan ifodani nolga tenglashtiramiz. Faraz qilaylik, $\omega \in C^2$ bo'lsin. (5) tenglamani soddalashtirish maqsadida x_i o'zgaruvchilar o'rniga kiritilgan y_i o'zgaruvchilardan bittasini, masalan $y_i = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ desak, u holda xarakteriskalar tenglamasiga asosan $A_{11} = 0$ bo'ladi.Shuning uchun ham differensial tenglamaning bitta yoki bir nechta xarakteristikalar oilasini bilish, bu tenglamani soddaroq ko'rinishga keltirish imkonini beradi.

Asosiy chegaraviy masalalarning qo'yilishi

1. Dirixle masalasi yoki birinchi chegaraviy masala. R^3 fazoda S bo'lakli silliq sirt bilan chegaralangan sohani D deb belgilaylik. Xususiy hosilali (7) tenglamaning D sohada aniqlangan va S sirtda berilgan qiymati orqali $u(x, y, z)$yechimini topish masalasi *Dirixle masalasi* deyiladi, ya'ni (7) tenglamaning $D \cup S$ sohada uzluksiz va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

$$u(x, y, z)|_S = \varphi_1(x, y, z), (x, y, z) \in S$$

$u(x, y, z)$ yechimini toping, bu yerda $\varphi_1(x, y, z)$ berilgan funksiya.

2. Neyman masalasi yoki ikkinchi chegaraviy masala.(7) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial N}|_S = \varphi_2(x, y, z), (x, y, z) \in S$$

$u(x, y, z)$ yechimini toping, bu yerda - $\varphi_2(x, y, z)$ berilgan funksiya, N esa S sirtga o'tkazilgan normal.

3. Puankare masalasi yoki uchinchi chegaraviy Masala. (7) tenglamaning D sohada aniqlangan, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz va ushbu chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi

$$\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial N} + \alpha(x,y,z)u(x,y,z)\right)\Big|_S = \varphi_3(x,y,z), (x,y,z) \in S$$

$u(x,y,z)$ yechimini toping, bu yerda $\alpha(x,y,z)$ va $\varphi_3(x,y,z)$ - berilgan funksiyalar, N esa S sirtga o'tkazilgan normal. Agar yuqorida keltirilgan masalalarning $u(x,y,z)$ yechimi S sirtga nisbatan D sohaning ichida (yoki tashqarisida) qidirilayotgan bo'lsa, u holda bunday masalaga mos ravishda *ichki (yoki tashqi) masala* deyiladi. Shuni ta'kidlash muhimki, (2) va (3) tenglamalar bilan bir jinsli qattiq jismda sodir bo'ladigan issiqlik jarayonlarigina emas, balki boshqa statsionar jarayonlar ham ifodalanadi. Bunga misol sifatida siqilmaydigan suyuqliklarning potensial oqimini keltirishimiz mumkin.

Korrekt qo'yilgan chegaraviy masala tushunchasi

Xususiy hosilali tenglamaiar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar - bu berilgan differensial tenglamaning qaralayotgan sohada ma'lum bir qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat bo'ladi.

Qo'shimcha shartlar ko'pchilik hollarda chegaraviy shartlar bo'lishi mumkin, ya'ni noma'lum funksiyaning qiymati qaralayotgan jismning sirtida yoki boshlang'ich shartlar - fizik jarayonni o'rganishda uning boshlang'ich vaqtdagi holati berilishi mumkin. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarning yechimi o'rganilayotgan fizik jarayonning taqribiy matematik ifodasini beradi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellarini qurishda uning ayrim parametrlari abstraktlashtiriladi. Ko'pgina ko'rsatkichlarining jarayonga ta'siri sezilarsiz deb, muhim hisoblangan parametrlar ajratib olinadi va shu parametrlar asosida fizikaviy jarayonning matematik modeli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellashtirilishidan olingan natijalar taqribiy natijalar hisoblanadi.

Shuning qilib, xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalalarning korrektligi tushunchasini kiritamiz. Matematik fizika masalalari real fizik jarayonlarning matematik modelini ifodalagani uchun bu masalalar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur: A) qaralayotgan masala ma'lum bir funksiyalar (M_1) sinfida yechimga ega (yechimning mavjudligi); B) qaralayotgan masalaning yechimi bir funksiyalar (M_2) sinfida yagona (yechimning yagonaligi); C) yechim boshlang'ich va chegaraviy shartlarga, tenglamaning koeffitsientlariga, ozod hadiga va boshqa berilganlarga uzluksiz bog'liq (yechimining turg'unligi).

Bu shartlar bir qarashda o'rinlidek ko'rinadi, lekin ularni fizikaviy jarayonning qurilgan matematik modeli asosida isbotlash kerak. Qo'yilgan masalaning korrektligini isbotlash - bu matematik modelning birinchi aprobatsiyasidir, ya'ni A) qurilgan model jarayonga zid emas (masalaning yechimi mavjud); B) model fizik jarayonni bir qiymatli ifodalaydi (masalaning yechimi yagona); C) fizik kattaliklarning hatoliklari qurilgan modelga sezilarsiz ta'sir qiladi (yechim masalaning berilganlariga uzluksiz bog'liq, ya'ni berilganlaming ozgina 0'zgarishiga yechimning ham ozgina o'zgarishi mos keladi). Yuqoridagi A)-C) shartlarni qanoatlantiruvchi boshlang'ich- chegaraviy masala Adamar ma'nosida *korrekt qo'yilgan masala* deb ataladi. Bo'sh bo'lmagan $M = M_1 \cap M_2$ funksiyalar sinfi boshlang'ich - chegaraviy masalaning *korrektlik sinfi* deyiladi. Agar boshlang'ich-chegaraviy masala A) - C) shartlardan birortasini qanoatlantirmasa, u holda bunday masala *nokorrekt qo'yilgan yoki noto'g'ri qo'yilgan masala* deyiladi.

Nokorrekt chegaraviy masalalarga misollar

Endi nokorrekt qo'yilgan masalalarga misollar keltiramiz:

1-masala (Adamar misoli). $D = \{(x, y): x \in R, y > 0\}$ sohada

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, (16)$$

Laplas tenglamasining

$$u(x, 0) = \tau(x), u_y(x, 0) = v(x), -\infty < x < +\infty, (17)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimi topilsin. Bu yerda $\tau(x), v(x)$ - berilgan cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar. Matematik fizikada (16)-(17) masala *Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi* deyiladi.

Yechish. Ushbu

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{y^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \tau(x) + \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k v(x) \right] \ (18)$$

ifoda (16) tenglamani va (17) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini bevosita tekshirib, ishonch hosil qilish mumkin.

Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi (18) ifodadan kelib chiqadi, ya'ni $\tau(x) \equiv v(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda $u(x, y) \equiv 0$ bo'ladi. Endi (16)-(17) Koshi masalasida boshlang'ich shartlardan birini ozgina o'zgartiraylik, ya'ni (16) tenglamaning

$$u(x, 0) = 0, u_y(x, 0) = \frac{sinnx}{n}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak bo'lsin. Bu masalaning yechimini (18) formula yordamida quyidagi

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} sinnx\ shny$$

ko'rinishda topamiz. Bu yerda $shny = (e^{ny} - e^{-ny})/2$ - giperbolik sinus. Yetarlicha katta n uchun boshlang'ich funksiya

$$\frac{1}{n} sinnx \to 0$$

bo'ladi. Lekin masalaning yechimi $n \to \infty$ da

$$u(x,y) = \frac{1}{n^2} sinnx\ shny \to \infty, x \neq j\pi;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

cheksizlikka intiladi.

Shunday qilib, (16)-(17) masalaning yechimi turg'un emas, ya'ni boshlang'ich shartlarning ozgina o'zgarishi yechimning yetarlicha katta o'zgarishiga olib keldi. Demak, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi *nokorrekt qo'yilgan masala* ekan. Misol sifatida quyidagilarni yechish yo'llari ko'rsatiladi.

1-misol. Tenglama turini aniqlang.

$$A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + a(x,y)U_x +$$
$$b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y)$$

va uni kanonik shaklga keltiring.

(1) tenglamaning turini aniqlaymiz $B^2 - AC$

- Agar biror nuqtada $B^2 - AC > 0$ bo'lsa (1) giperbolik tenglama deyiladi.
- Agar biror nuqtada $B^2 - AC < 0$ bo'lsa (1) elliptik tenglama deyiladi.
- Agar biror nuqtada $B^2 - AC = 0$ bo'lsa (1) parabolik tenglama deyiladi.

Tenglama giperbolik, elliptik, parabolik tipdagi tenglama bo'ladi, D sohada giperbolik, elliptik, parabolik bo'lsa. Tenglama bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga o'tganda o'z turini o'zgartirishi mumkin. Masalan: $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ tenglama$(x,y), y > 0$ nuqtada elliptik tipdagi tenglama :$(x, 0)$ nuqtada parabolik tipdagi tenglama; $(x,y), y < 0$ nuqtada giperbolik tipdagi tenglama.

Tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun:

- $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ koeffisentlarini aniqlaymiz;
- $B^2 - AC$ ifodani hisoblaymiz;
- (1) tenglamani turini aniqlaymiz ($B^2 - AC$ ifoda qiymatiga qarab)

Xarakterik tenglamasini yozamiz.

$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0 \qquad (19)$$

(19) tenglamani yeching. Buning uchun :

a)(19)tenglamani dy ga nisbatan kvadrat tenglama sifatida yeching:

$$dy = \frac{B(x,y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x,y)} dx \ ; (20)$$

b) (20) tenglamaning umumiy integralini toping;

$$\varphi_1(x,y) = C_1$$
$$\psi_1(x,y) = C_2 \ (21)$$

Giperbolik tenglama tipidagi holati;

$$\varphi_2(x,y) = C \ (22)$$

Parabolik tenglama tipidagi holati;

$$\varphi_3(x,y) \pm i\psi_3(x,y) = C \ (23)$$

Elliptik tenglama tipida bo'lsa.

$\xi\ va\ \mu$ yangi o'zgaruvchi kiritamiz.

$$\xi = \varphi_1(x,y),$$
$$\mu = \psi_1(x,y).$$

Parabolik tipdagi tenglama bo'lsa, (20) tenglamaning umumiy integralini (22) deb olamiz, ya'ni

$$\xi = \varphi_2(x,y)$$

kabi, ξ ixtiyoriy o'zgaruvchi,ikki marta differensiallanuvchi funksiya ψ_2, $\varphi_2(x,y)$ bilan ifodalanmaydi, $\eta = \psi_2(x,y)$;

$$\xi = Re\big(\varphi_3(x,y) + i\psi_3(x,y)\big) = \varphi_3(x,y),$$
$$\eta = Im\big(\varphi_3(x,y) + i\psi_3(x,y)\big) = \psi_3(x,y).$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalanamiz :

$$U\big(\xi(x,y);\eta(x,y)\big)$$
$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$
$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta}\cdot\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + U_\xi\xi_{xx} + U_\eta\eta_{xx},$$
$$U_{yy} = U_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta}\cdot\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\big(\eta_y\big)^2 + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy},$$
$$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\eta_y + U_{\xi\eta}\cdot\big(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\big) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy}.$$

Topilgan hosilalarni (10 tenglamaga keltirib qo'yamiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz.Natijada tenglama quyidagi shakllardan birini oladi.

- giperbolik turdagi tenglama bo'lsa;

$U_{\xi\xi} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0;$

- parabolik turdagi tenglama bo'lsa;

$U_{\eta\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0;$

- elliptik turdagi tenglama bo'lsa.

$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0.$

2- misol. Tenglama turini aniqlang va kanonik ko'rinishga keltiring.

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2$$

$A(x,y), B(x,y)C(x,y)$ koiffisentlarni aniqlaymiz:

$A = 1, B = -2, C = -21$.

$B^2 - AC$ ifodasini aniqlaymiz:

$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$

$B^2 - AC = 25 > 0 \Longrightarrow$ butun XOY tekisligida giperbolik tipdagi tenglama

Xarakteristikalar tenglamasini yozamiz:

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0\ .$$

Tenglamani dy uchun kvadrat tenglama sifatida yechamiz: $dy = \frac{-2\pm\sqrt{25}}{1}dx$;

$dy = (-2 \pm 5)dx$;

$dy = -7dx, dy = 3dx,$ (10)

$y = -7x + C_1, y = 3x + C_2,$

$y + 7x = C_1, y - 3x = C_2.$

Xarakteristik o'zgaruvchilarni kiritamiz

$\xi = y + 7x,$

$\eta = y - 3x.$

$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0$

$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy}$=0, $\eta_{yy} = 0.$

$$\begin{array}{r|c} 2 & U_x = 7U_\xi - 3U_\eta \\ -3 & U_y = U_\xi + U_\eta \\ 1 & U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta} \\ 1 & U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta} \\ -21 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \end{array}$$

O'xshash hadlarni ixchamlab quyidagilarga ega bo'lamiz:

$U_{\xi\xi}\{49 - 28 - 21\} + U_{\xi\eta}\{-42 - 16 - 42\} + U_{\eta\eta}\{9 + 12 - 21\} +$
$U_\xi\{14 - 3\} + U_\eta\{-6 - 3\} + 5U = \frac{(\xi-\eta)^2}{16}.$

$U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\frac{(\xi-\eta)^2}{1600}.$

Javob: tenglama giperbolik tipdagi tenglamadir.

$U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\frac{(\xi-\eta)^2}{1600}.$

$\xi = y + 7x, \eta = y - 3x.$

Hozirgi zamon texnika asri hisoblanib, uning tez rivojlanishi barcha aniq fanlar oldiga yangidan-yangi katta vazifalar qo'yishni boshladi. Shuning uchun oddiy differentsial tenglamalar, xususiy xosilali differensial tenglamalar sohasini rivojlantirishda e'tiborni kuchaytirishni talab qilmoqda. Bunga asosiy sabab texnik masalalarni hal qilish uchun yangi chegaraviy masalalarni yechish usullarini takomillashtirish va ularning amaliy tadbiqlarini ta'minlash zarur bo'lmoqda.

Differensial tenglamalarga keltiriladigan fizik, mexanik, texnik masalalardan tashqari, ekologiya, biologiya, meditsina, kimyo va boshqa fanlarning ham amaliy masalalarining matematik modellari oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalarga keltiriladi. Bunda tenglamalar uchun korrekt qo'yilgan chegaraviy masalalarni o'rganish zaruriyati dolzarb hisoblanadi. Yuqoridagi aytilgan masalalar ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarni, shu jumladan buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik va giperbolik tipdagi tenlamalarni o'rganish zarurligini namoyon qiladi.

Buzilish chizig'iga ega elliptik tipdagi tenglamalar deb masala qaralayotgan sohaning ichida tenglama elliptik tipga, soha chegarasining bir qismi yoki chegaraning o'zida boshqa tipga tegishli bo'lgan tenglamalarga aytiladi. Tip o'zgaradigan chiziqqa buzilish chizig'i deyiladi. Bu chiziqda tenglama parabolik tipga tegishli yoki aniqlanmagan bo'lishi mumkin.

Zamonaviy fanning rivojlanishi shuni ko'rsatadiki, buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik va giperbolik tipdagi tenglamalar haqiqiy fizik va biologik jarayonlarning samarali matematik modelidir. Bu esa o'z navbatida ko'plab xorijiy va o'zbek olimlari tomonidan fundamental tadqiqotlar mavzusi bo'lgan turli xil chegaraviy muammolarni belgilash va hal qilishning dolzarbligiga olib kelmoqda.

Elliptik tenglamalar nazariyasining markaziy muammolari yechimlarning silliqligi (cheksiz differensialanuvchilik va yechimlarning analitiklik xususiyati) va chegaraviy masalalar nazariyasi hisoblanadi. Bu muammolar Gilbertning yigirmata muammosidan ikkitasi bilan bog'liqligi ham bejiz emas. O'tgan asrning ikkinchi yarmida chiziqli va chiziqli bo'lmagan bitta buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tenglamalar nazariyasida ajoyib natijalarga erishilgan.

Aytish joizki, buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalarning o'ziga xos xususiyati kabi, buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tenglamalar ham o'ziga xos xususiyatga ega. Ular uchun qo'yilgan Koshi masalasi doimo ham korrekt bo'lavermaydi. Ikkinchi tur giperbolik tipdagi tenglama uchun masala odatdagidek qo'yilsa, uning yechimi mavjud bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun bu kabi tenglamalar uchun ko'rinishi o'zgartirilgan Koshi masalasi (tenglama tipini o'zgartiradigan chiziqda boshlang'ich shartlar «vaznli» funksiyalar orqali beriladi) o'rganiladi [1-12]. Shu mavzuga bag'ishlangan maqolalarni o'rganish, tahlil qilish va amaliyotda qo'llashni osonlashtirish uchun boshlang'ich ma'lumotlarga doir yo'riqnomalar berilgan maqolalarni [13-25] o'rganish tavsiya qilinadi. Ikkita buzilishi chizig'iga ega bo'lgan elliptik, giperbolik va aralash tipdagi tenglamalarning amaliy ahamiyati keng bo'lib, mazkur yo'nalishda bir qator ijobiy nazariy natijalarga olingan [26-39].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

2. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

3. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), c. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

16. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

17. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

18. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-

симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

19. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.

20. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.

21. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

22. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

23. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

24. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

25. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

26. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

27. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

28. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

29. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

30. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

31. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

32. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

33. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

34. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

35. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

36. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

37. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo’yicha ba’zi uslubiy ko’rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

38. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

39. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).