Keli daraxtida kontur metodlar

Mulkijahon Ismatilloyevna Xusainova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada graflar nazariyasiga oid bir qator tushunchalar bayon berilgan va ularning amaliy tadbig‘i yoritilgan. Spin qiymati ikki va to‘rtga teng bo’lgan Potts modelining ko‘rishlari chizilgan va namoyish qilingan. Keli daraxtida aniqlangan asosiy holatlarni topish masalasi va kontur usuli muhokama qilingan.

Kalit so‘zlar: Potts modeli, energiya, sikl, graf, daraxt, ehtimollar nazariyasi, abstrakt, grafning elementlari, graflarni birlashtirish, Eyler va Gamilton graflari, ekvivalent, maksimal oqim, orgraf, qirra

Contour methods in the Keli tree

Mulkijahon Ismatilloyevna Xusainova
Bukhara State University

Abstract: This article describes a number of concepts related to graph theory and their practical application. Views of the Potts model with spin values of two and four are plotted and shown. The issue of finding key states identified in the Keli tree and the contour method are discussed.

Keywords: Potts model, energy, cycle, graph, tree, probability theory, abstract, elements of graph, merging graphs, Euler and Hamilton graphs, equivalent, maximum current, orgraph, edge

O’n birta sinfdan iborat bo’lgan energiyalar to’plamini Potts modeli uchun asosiy holat bo’ladigan sohlarni topish masalasini ko’rib chiqamiz. Bu masalani hal etish uchun, har bir energiyani minimallashtirish masalasi qaraladi, bu esa har bir energiyani boshqa energiyalardan katta emasligini topish deganidir. Demak, biz quyidagi o’n birta tengsizliklar sestemasining umumiy yechimlarini topib, ikki o’lchovli fazoda sohalarga ajratamiz.

Ma’lumki, siklga ega bo’lmagan bog’lamli graf daraxt deyiladi. Daraxtlar sinfi graflar nazariyasida muhim ahamiyatga ega. Hozirgi paytda daraxt tipidagi graflarda statistik mexanika, ehtimollar nazariyasi, matematik tahlil va matematikaning boshqa bo’limlarini ko’plab masalalari o’rganilmoqda. Daraxtlarning xususiy hollaridan biri

Keli daraxtidir. Keli daraxtida statistik mexanika modellari masalalarini o'rganish uchun Keli daraxtining gruppali tasvirlanishidan foydalanilmoqda.

Ushbu keltirilganlarni inobatga olib, eng avvalo graflar nazariyasi, graflarning geometrik ifodalanishi, grafning koʻrgazmali tasviri va gruppalar nazariyasi haqida umumiy tushunchalarni keltirib, ularning Keli daraxtida kontur metodlarda rolini bayon qilamiz.

Dastlab graflar haqida qisqacha tarixiy malumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi haqida ma'lumotlarni keltiramiz. So'ngra grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, mar-shrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yol haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni bayon qilamiz. Tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar, maksimal oqim haqidagi masala va bu masalalani hal qilish uchun Ford algoritmiga bog'lisligini ko'rsatamiz.

Graflarning berilish usullariga ko'ra: graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar, uchning lokal darajasi, multigraf, koʻphad, grafning uchlari qoʻshniligi matritsasi, oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qoʻshniligi matritsasi, oriyentirlangan grafning uchlari qoʻshniligi matritsasi, sirtmoqsiz orgraf uchlari qoʻshniligi matritsasi, grafning qirralari qoʻshniligi matritsasi, insidentlik matritsasidan iborat.

Grafning geometrik ifodalanishini tushuntiramiz. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini oʻrganish va bu xossalarni amalda qoʻllash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tugʻdirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishtirib o'tamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga - grafning koʻrgazmali tasviriga ega boʻlamiz. Agar uchlar toʻplami va bu uchlarning tutashishlarini koʻrgazmali qilib taqdim qilish kerak boʻlsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qogʻozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning toʻgʻri yoki egri boʻlishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo‘lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma grafning geometrik ifodalanishi deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

Teorema. Har qanday chekli grafni uch o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin.

Isbot. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta’rifiga binoan uning hech bo‘lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo‘lsa, u holda uni 3 o‘lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda ularni uch o‘lchovli Evklid fazosidagi biror to‘g‘ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to‘g‘ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o‘tkazamiz (graf chekli bo‘lgani uchun buning imkoniyati bor).

Graflar nazariyasi haqida umumiy malumotlar. 1736-yilda L. Eyler tomonidan o’sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyosingsberg ko’priklari haqidagi masalaning qo’yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo’lishiga asos bo’Idi.

Kyosingsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yetti ko’prikning joylashuvi qadimiy xaritada tasvirlangan Kyosingsberg - bu shahar 1255-yilda asoslangan bo’lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg’oqlarida joylashgan. 1946-yildan boshlab, Ka-liningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarlkibida.

XIX asrning o’rtalarida graflar nazariyasi bilan bog’liq tadqiqotlar G.Kirxgof va A.Keli ishlarida paydo bo’ldi. “Graflar” iborasi D.Kyonig tomonidan 1936- yilda graflar nazariyasiga bag’ishlangan dastlabki darslikda uchraydi.

Graflar nazariyasi bo’yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo’llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o’yinlar; yo’llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va kompyuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

Bog'liq boshlangich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin ($V \neq \varnothing$). Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) VxV bilan belgilaymiz. Graf deb shunday <*V*,*U*>, juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U $< v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji bo'lib, VxV to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

G=(V, U) graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementiariga G grafning uchlari, V to'plamning o'ziga esa, graf uchlari to'plami deyiladi.

Graflar nazariyasida «uch» iborasi o'rniga, ba'zan, tugun yoki nuqta iborasi ham qo'llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba'zi iboralari bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta'riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

Bir amalli algebraik sistemalarning eng muhimi gruppalardir. Bu tushuncha juda ham keng tadbiq sohalariga ega bo'lib, katta mustaqil fan-gruppalar nazariyasining mavzui bo'lib xizmat qiladi. Ushbu mavzu gruppalar nazariyasida kirish sifatida qaralishi mumkin, unda gruppalar haqida, ular bilan har bir matematik tanishib chiqish shart bo'lgan elementar ma'lumotlar bayon qilinadi.

Gruppa deb assotsiativ bo'lgan (ammo kommutativ bo'lishi shart bo'lmagan) bitta algebraik ammalli G to'plamga aytiladi. Shu bilan birga bu amal uchun teskari amal ham mavjud bo'lishi shart. Gruppaviy amal nokomutativ bo'lishi mumkinligi sababli teskari amalning bajarilishi quyidagini bildiradi: G dan olingan ixtiyoriy ikkita a va b elementlar uchun G da bir qiymatli aniqlangan shunday x element va bir qiymatli aniqlangan shunday y element mavjud $ax = b, ay = b$ bo'ladi.

Agar G gruppa chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda u chekli gruppa, undagi elementlarning soni esa gruppaning tartibi deyiladi. Agar G gruppada aniqlangan amal kommutativ bo'lsa, u holda G kommutativ yoki Abel gruppasi deyiladi. Gruppa ta'rifidan kelib chiqadigan eng sodda natijalarni ko'rsatamiz. Teskari amalning mavjudligidan kelib chiqib natijalarga o'tamiz. G gruppada ixtiyoriy a element berilgan bo'lsin. Gruppa ta'rifidan G da bir qiymatli aniqlangan shunday la elementning mavjudligi kelib chiqadiki, $ala = a$ bo'ladi, demak, bu element uni a elementga o'ngdan ko'paytirganda bir vazifasini bajaradi. Agar b element G gruppaning ixtiyoriy elementi bo'lsa uning mavjudligi gruppaning ta'rifidan kelib chiqadi, u holda

$$b = ya = y(ala) = (ya)la = bla$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib la element faqat avvalgi a elementga nisbatan emas, balki G gruppaning barcha elementlariga nisbatan ham o'nggi bir vazifasini o'taydi, shuning uchun uni biz e' orqali belgilaymiz. Teskari amalning ta'rifidagi 1 qiymatliligidan bu elementning yagonaligi kelib chiqadi. Xuddu shu yo'l bilan G gruppada G dan olingan barcha *a* lar uchun $e'' = a$ shartni qanoatlantiruvchi e'' elementning mavjudligi va yagonaligini isbotlash mumkin. Gruppaning ta'rifidan berilgan *a* element uchun shunday *a'* va *e''* elementlarning mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadiki, $aa' = 1, a''a = 1$ bo'ladi. Aslida a'' va a' elementlar ustma-ust tushadi:

$$a''aa' = a''(aa') = a'' \cdot 1 = a'', a''aa' = (a''a)a' = 1 \cdot a' = a'$$

tengliklardan $a'' = a$ kelib chiqadi. Bu element *a* elementga teskari deyiladi va $a'' = a'$ kelib chiqadi. Bu element *a* elementga teskari deyiladi va a^{-1} bilan belgilanadi, ya'ni:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

shunday qilib, gruppaning har qanday elementi bir qiymatli aniqlangan teskari elementga ega.

So'ngi tengliklardan a^{-1} uchun teskari element vazifasini a elementning o'zi bajarishi kelib chiqadi. So'ngra osongina ko'rish mumkinki, ko'paytuvchilarga teskari bo'lgan elementlarning teskari tartibda olingan ko'paytmasi bir nechta element ko'paytmasi uchun teskari element bo'ladi:

$$(a^1a^2 \ldots a^{m-1}a^m) = a^{m^{-1}} a^{(m-1)^{-1}} \ldots a^{2^{-1}} a^{1^{-1}}$$

Nihoyat, bir uchun assotsiativ amalga ega bo'lgan G ning barcha *a* lari uchun $al = a$ xossaga ega bo'lgan kamida bitta *e* element mavjud bo'lsa va agar bu o'nggi birlar ichiga kamida bitta shunday e^0 element mavjud bo'lsaki, unga nisbatan G ning har qanday a elementi kamida 1 ta o'ng teskari a^{-1} elementga ega ya'ni , $aa^{-1} = l^0$ bo'lsa, u holda, G gruppa bo'ladi. a^{-1} element a uchun o'ng teskari elementlardan biri bo'lsin. U holda:

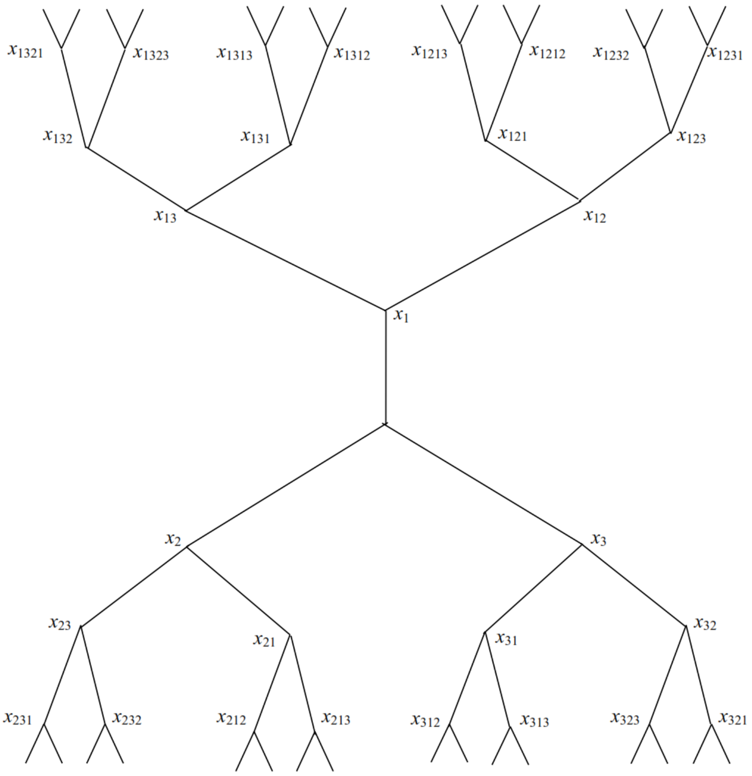
$$aa^{-1} = e^0 = e^0e^0 = e^0aa^{-1} \text{ ya'ni } aa^{-1} = e^0aa^{-1}.$$

Bu tenglikning ikkala tomoni a^{-1} uchun o'ng teskari elementlardan biriga o'ngdan ko'paytirib, al^0al^0 ni hosil qilamiz, bu yerdan $a = e^0a$ chunki e^0 element G uchun o'nggi birdir. Shunday qilib, e^0 element G uchun chapi ham *e* ekan.

Agar endi a element uchun a^{-1} ixtiyoriy o'ng teskari a_2^{-1} element esa ixtiyoriy chap teskari element bo'lsa, u holda,

$$a^{-1}aa=(a_2^{-1}a)a^{-1}=a_1^{-1},$$
$$a_2^{-1}aa_1^{-1}=a_2^{-1}(aa_1^{-1})=a_2^{-1}$$

tengliklardan $a_1^{-1}=a_2^{-1}$ kelib chiqadi. Ya'ni G ning har qanday a elementi uchun a^{-1} teskari elementning mavjudligini osongina ko'rsatish mumkinki, $ax=b, ya=b$ tenglamalarni $x=a^{-1}b, y=ba^{-1}$ elementlar qanoatlantiradi. Bu yechimlarning yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi.



Agar, masalan, $ax_1=ax_2$ bo'lsa, u holda bu tenglikning ikkala tomonini chapdan a^{-1} ga ko'paytirib , $x_1=x_2$ hosil qilamiz. Ushbu keltrilganlardan ko'rinib turibdiki,graflar nazariyasining Keli daraxti bilan bog'liq. O'z navbatida quyidagi teorma o'rinli.

Teorema. Keli daraxtining V uchlar to'plami bilan G_κ gruppa orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud [1-2].

Teoremaning isboti yuqorida ko'rsatib o'tilgan adabiyotlarda berilgan bo'lib, biz qisqacha Keli daraxning ko'rinishi haqida ma'lumot beramiz. Quyida K=2 bo'lgandagi keli daraxtining tasviri berilgan.

Yuqoridagi ko'rinishni o'ng ko'rinish deyiladi, chunki bu holda x va y -yon qo'shnilar va ularga mos keluvchi g va l G_k - gruppa elementlari yoki $g=ha_i$ yoki $h=ga_j$ ba'zi bir i, j uchun bo'lishi mumkin. Chap ko'rinishi ham xuddi yuqoridagiday aniqlanadi.

Faraz qilaylik, G_k - T^k, $k \geq 1$ Keli daraxtining o'ng ko'rinishi bo'lsin.

Ixtiyoriy $x \in G_k$ element quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} ... a_{i_n}, bu \cdot yerda \quad 1 \leq i_m \leq k+1, \quad m = \overline{1,n}$,

n-soni x so'zining uzunligi deyiladi va $l(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

x so'zning qisqarmaydigan yozilishda $a_i,\ i = 1,2,...,k+1$ harflar sonini $w_x(a_i)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $x = a_3 a_5 a_4 a_5 a_2$, u holda

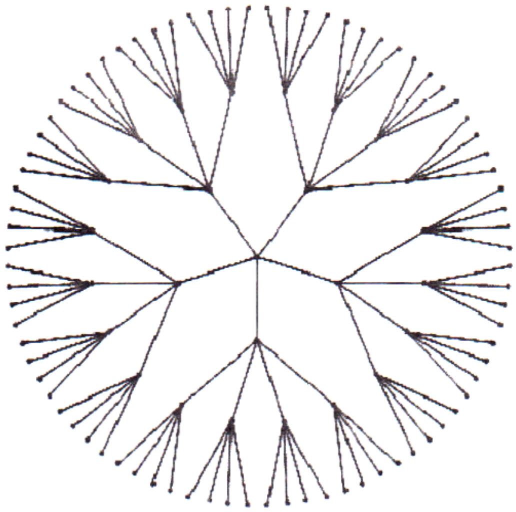
$w_x(a_2) = w_x(a_3) = w_x(a_4) = 1, \qquad w_x(a_5) = 2$

Ravshanki, x so'zning uzunligi $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_x(a_i)$ bo'ladi, yuqoridagi misolda

$l(x) = l(a_3 a_5 a_4 a_5 a_2) = 1+1+1+2 = 5$.

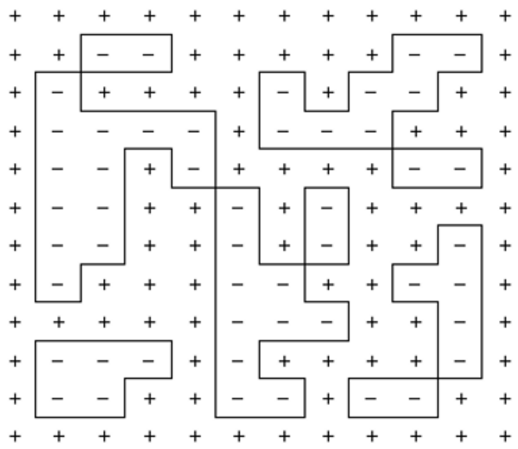
Endi bevosita kontur tushunchasi va graflarning qirralari soni haqidagi teoremani keltiramiz. Aytish joizki, kontur tushunchasi dastlab XX asrning ikkinchi yarimida Z^d da Sinay Ya.G. tomonidan kiritilgan. Fizik sitemalarni o'rganishda moddalarning kristal panjaralari strukturasiga qarab, statistik fizika modellari o'rganiladi. Bu modellar yordamida moddlarning faza almashishlarini matematik jihatdan ilmiy asoslanadi. Maqolada faza almashishlarni topishga xizmat qiluvchi metdolardan biri yani Kontur metodidan (konturlarni sanash) foydalanilgan. Dobrushin R.L., Lanford O.E., Ruelle D. kabi olimlarning ishlarida har bir Gibbs o'lchovlari soniga moddalarning faza almashishlari soni tengligi isbotlangan. Gibbs o'lchovlari sonini topishda tenglamalar usuli va konturlarni sanash usullari muhim ahamiyatga ega.

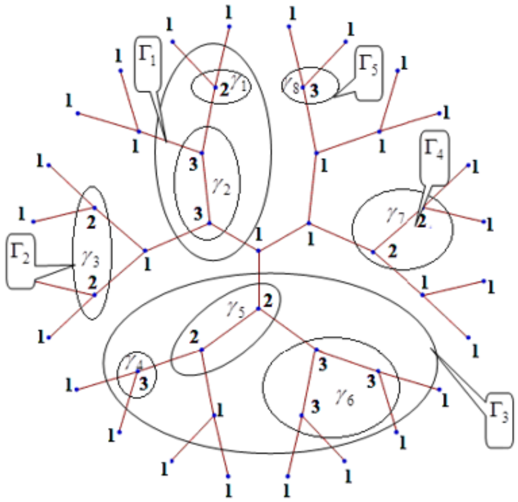
Quyida K=4 bo'lgandagi Keli daraxtining tasviri berilgan.



2-chizma. K=4 bo'lgandagi Keli daraxti.

G - berilgan garf bo'lsin. G garfning uchlari va qirralari sonini mos ravishda $V(G)$ va $E(G)$ bilan belgilaymiz [1]:





Tenglamalar usuli va konturlarni sanash usullaridan foydalanamiz. Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. $\Im^2, k \geq 0$, K-keli daraxtidagi bog'liq qism graf bo'lsin, agar $|V(K)| = n$ bo'lsa, u holda $|\partial V(K)| = (k-1)n + 2$ tenglik o'rinli bo'ladi [1-4].

Xulosa qilib aytamiz, ushbu maqolada spin qiymati 2 va 4 ga teng bo'lgan Potts modeli uchun 3 tartibli Keli daraxtida aniqlangan asosiy holatlarni topish masalasini muhokama qilindi. [2-6] maqolalarda shu yo'nalish bo'yicha olib borilgan izlanishlarga o'xshash differensial operatorlar bo'yicha tadqiqotlar olib borilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Botirov G.I., Qayumov U.U., Phase transition for a model on Cayley tree of order four// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения" (Ташкент, 15-17 апреля 2015 г.) Т-2, с. 88-91.

2. N.N. Ganikhodjayev, U.A. Roziqov, The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree, Lett. Math. Phsy 75(2) (2006), 99-109

3. U.A. Roziqov, Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. 2013

4. Botirov G.I.: Ground states for Potts model with competing interactions on Cayley tree // Uzbek Math. Jour. No.4, (2011), pp.59-65.

5. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

16. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

17. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.

18. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

19. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta’lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g’oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

20. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

21. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

22. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

23. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

24. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

25. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

26. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

27. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

28. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

29. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

30. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

31. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

32. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

33. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

34. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

35. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

36. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

37. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

38. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.