Bir o'lchamli statsionar konveksiya-diffuziya tenglamasi uchun Dirixle masalasini modellashtirish

Sherzod Nurullo o'g'li Aliyev
sherzod88aliyev@gmail.com
Termiz davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada konvektsiya-diffuziya masalasi sonli yechilgan. Masalani yechish uchun bir nechta ayirmali sxemalar qo‘llangan. Masalani sonli yechish algoritmi asosida Python tilida dastur tuzilgan va sonli natijalar olingan. Sonli natijalar asosida grafiklar chizilgan.

Kalit so'zlar: o'lcham, statsionar, konveksiya-diffuziya, tenglama

Modeling the Dirichlet problem for the one-dimensional stationary convection-diffusion equation

Sherzod Nurullo oglu Aliyev
sherzod88aliyev@gmail.com
Termiz State University

Abstract: In this article, the convection-diffusion problem is solved numerically. Several different schemes have been used to solve the problem. Based on the algorithm of numerical solution of the problem, a program was created in Python and numerical results were obtained. Graphs are drawn based on numerical results.

Keywords: size, stationary, convection-diffusion, equation

Kirish. Quyidagi konveksiya-diffuziya tenglamasi uchun Dirixle chegaraviy masalasini qaraymiz:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+v(x)\frac{du}{dx}=f(x),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$u(0)=\mu_1,\qquad u(l)=\mu_2, \tag{2}$$

bu yerda $k(x)\geq k_1>0$.

Har-xil amaliy masalalarda diffuzion ((1) tenglamadagi $k(x)$ diffuziya koeffitsiyenti) yoki konvektiv ko‘chirish ($v(x)$ tezlikli had) ta‘siri yuqori bo‘ladi. Konvektiv ko‘chirishning muhimligini baholash uchun Pekle soni xizmat qiladi, bu had konveksiya-diffuziya tenglamasini o‘lchamsiz ko‘rinishga keltirilayotganda quyidagi ko‘rinishda paydo bo‘ladi:

$$Pe = \frac{v_0 l}{k_0}, \tag{3}$$

bu yerda v_0 - xarakterli tezlik, k_0 - na xarakterli diffuziya koeffitsiyenti.

Agar $Pe << 1$ bo‘lganda diffuziya jarayoni ustunlik qiladi, $Pe >> 1$ bo‘lganda esa konveksiya ustunlik qiladi. Birinchi holda regulyar qo‘zg‘atilgan masalaga kelamiz (kichik Pe parametrik kichik hosila oldida), konveksiya kuchli ustunlik qiladigan holda singulyar qo‘zg‘atilgan masalaga ($(Pe)^{-1}$ kichik parametr yuqori tartibli hosila oldida), singulyar qo‘zg‘atilgan masala yechimining kuchli o‘zgarishi bilan xarakterlanadi, xususan, chegaraviy va ichki o‘tkazuvchi qatlamlarda.

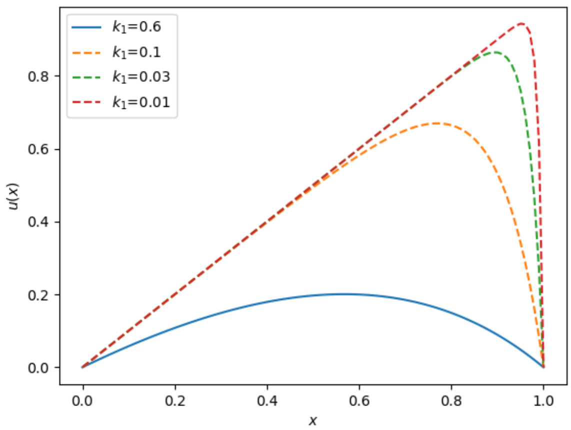
Masalani sonli yechish algoritmi. Konveksiya-diffuziya masalasini o‘zgarmas koeffitsiyentlarda va bir jinsli chegaraviy shartlarda sonli modellashtiramiz. Bu holda koeffitsiyent va parametrlar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$k(x) = k_1,\ \ v(x) = 1,\ \ f(x) = 1,\ \ \mu_1 = 0,\ \ \mu_2 = 0. \tag{4}$$

(1), (2), (4) masala quyidagi ko‘rinishdagi aniq (analitik) yechimga ega:

$$u(x) = x - l\ \frac{\exp(x/k_1) - 1}{\exp(l/k_1) - 1}$$

Konveksiya ustunlik qilgan hol uchun $l = 1$, $k_1 = 0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}03;\ 0{,}01;$ qiymatlarda aniq yechim grafiklarini chizamiz(1-rasm). Grafiklarni chizishda Pythonning NumPy, Matplotlib paketlaridan foydalanildi.



1-rasm. Konveksiya-diffuziya masalasining aniq yechimlari

Diffuziya koeffitsiyentini kamaytirish bilan o‘ng chegarada chegaraviy qatlam hosil bo‘ladi (yechimning katta gradiyentlar sohasi).

Konveksiya-diffuziya masalalari, ularni sonli yechish usullari [1, 2, 3] larda batafsil bayon etilgan. Ba‘zi konveksiya-diffuziya tipidagi masalalari [4, 5] da yechilgan.

Dastlab (1), (2) masalani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-v(x)\frac{du}{dx}=-f(x),\quad 0<x<1, \tag{5}$$

$$u(0)=\mu_1,\qquad u(l)=\mu_2. \tag{6}$$

(5), (6) masalani yechish uchun $D=\{0\le x\le l\}$ sohada to‘r kiritamiz [1]:

$$\omega_h=\left\{x_i=ih,\ i=0,1,....,N,\ h=\frac{l}{N}\right\}.$$

(5), (6) masalani ω_h to‘rga o‘ng ayirmali hosilani qo‘llab approksimatsiyalab quyidagi ayirmali masalani hosil qilamiz [1]:

$$\frac{1}{h}\left(k_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-k_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)-v_i\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=-f_i,\quad i=1,2,...,N-1,$$

$$u_0=\mu_1,\quad u_N=\mu_2, \tag{7}$$

bu yerda $k_i=0{,}5(k(x_i)+k(x_{i-1}))$.

(5), (6) masalani markaziy ayirmali hosila bilan ω_h to‘rda approksimatsiyalab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{1}{h}\left(k_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-k_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)-v_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=-f_i,\ \ i=1,2,...,N-1,$$

$$u_0=\mu_1,\quad u_N=\mu_2. \tag{8}$$

(7), (8) ayirmali masalalarni progonka usuli bilan yechamiz. Buning uchun (7) masalani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$A_i u_{i-1}-C_i u_i+B_i u_{i+1}=-f_i,\ \ i=1,2,...,N-1, \tag{9}$$

bu yerda $A_i=\dfrac{k_i}{h^2},\ B_i=\dfrac{k_{i+1}}{h^2}-\dfrac{v_i}{h},\ C_i=\dfrac{k_{i+1}+k_i}{h^2}-\dfrac{v_i}{h}.$

(9) ayirmali masalani progonka usuli bilan yechamiz. Progonka koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishni oladi [1]:

$$u_i=\alpha_{i+1}u_{i+1}+\beta_{i+1},\quad i=N-1,N-2,....,1,0, \tag{10}$$

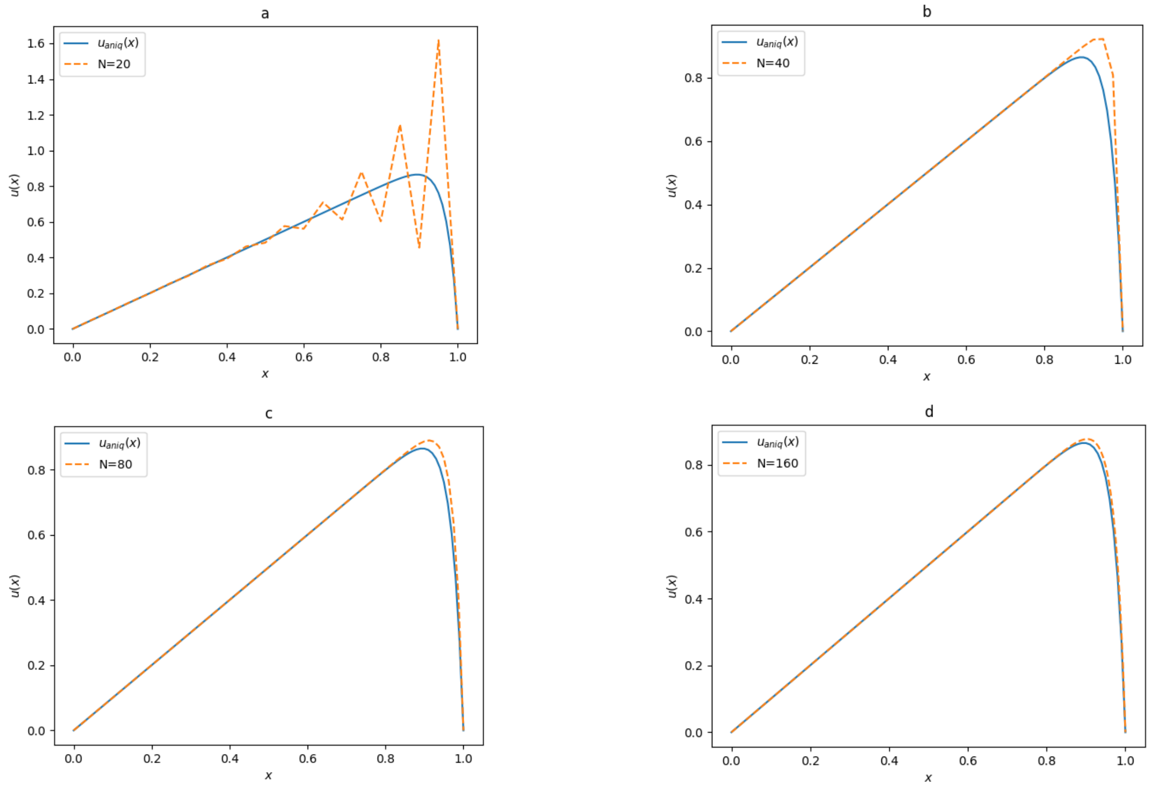
$$\alpha_{i+1}=\frac{\beta_i}{C_i-A\alpha_i},\quad \beta_{i+1}=\frac{A_i\beta_i+f_i}{C_i-A\alpha_i},\ \ i=1,2,....,N-1, \tag{11}$$

Dastlabki α_1, β_1 progonka koeffitsiyentlarini chegaraviy shartdan aniqlaymiz:

$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=\mu_1. \tag{12}$$

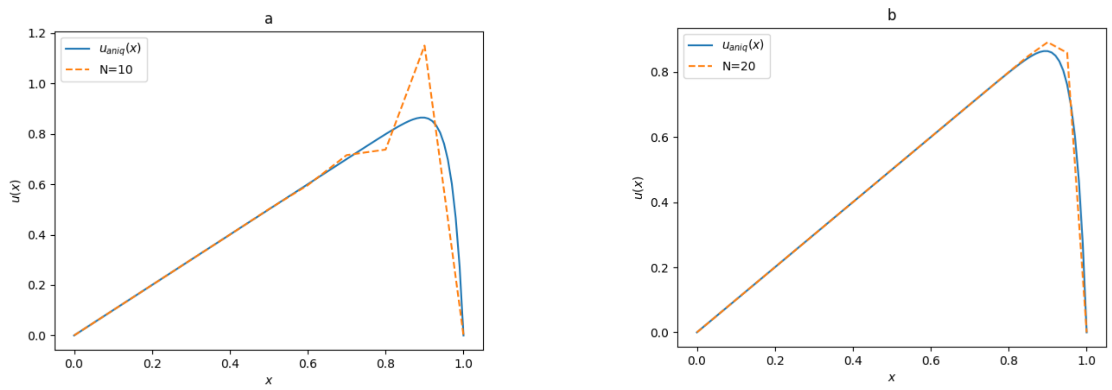
Markaziy ayirma qo‘llangan (8) ayirmali masalani progonka usuli bilan yechish (7) ayirmali masalani yechishga o‘xshash bo‘ladi.

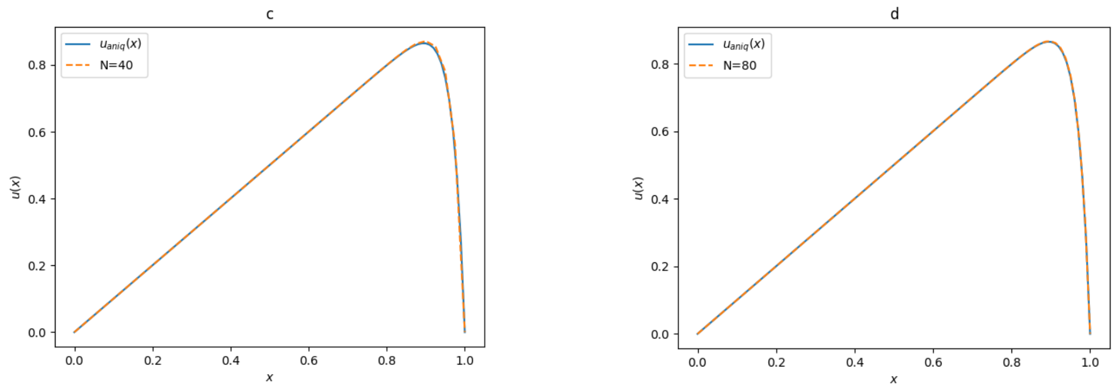
Sonli natijalar va xulosalar. (7), (8) ayirmali masalalarni sonli yechish uchun Python tilida dastur tuzilgan. Python tilida sonli usullar [6] da yaxshi yoritilgan. Endi sonli natijalarni tahlil qilamiz. 2-rasmda chap ayirmali hosila qo‘llangan (7) ayirmali masala yechimi tasvirlangan. Tugunlar soni $N = 20$, $k_1 = 0{,}03$ bo‘lganda (2-rasm, a) sonli yechim aniq yechimdan keskin farq qiladi. Tugunlar soni oshib borishi bilan ($N = 40, 80, 160$) sonli yechimning aniq yechimga yaqinlashib borishi kuzatiladi (2-rasm, b, c, d). $k_1 = 0{,}01$ da (7) sxema yordamida olingan sonli hisoblashlar tugunlar soni katta bo‘lganda ham aniq yechimdan keskin farq qiluvchi natijalarni berdi.



2-rasm. (7) ayirmali sxema yordamida olingan sonli yechimlar ($k_1 = 0{,}03$)

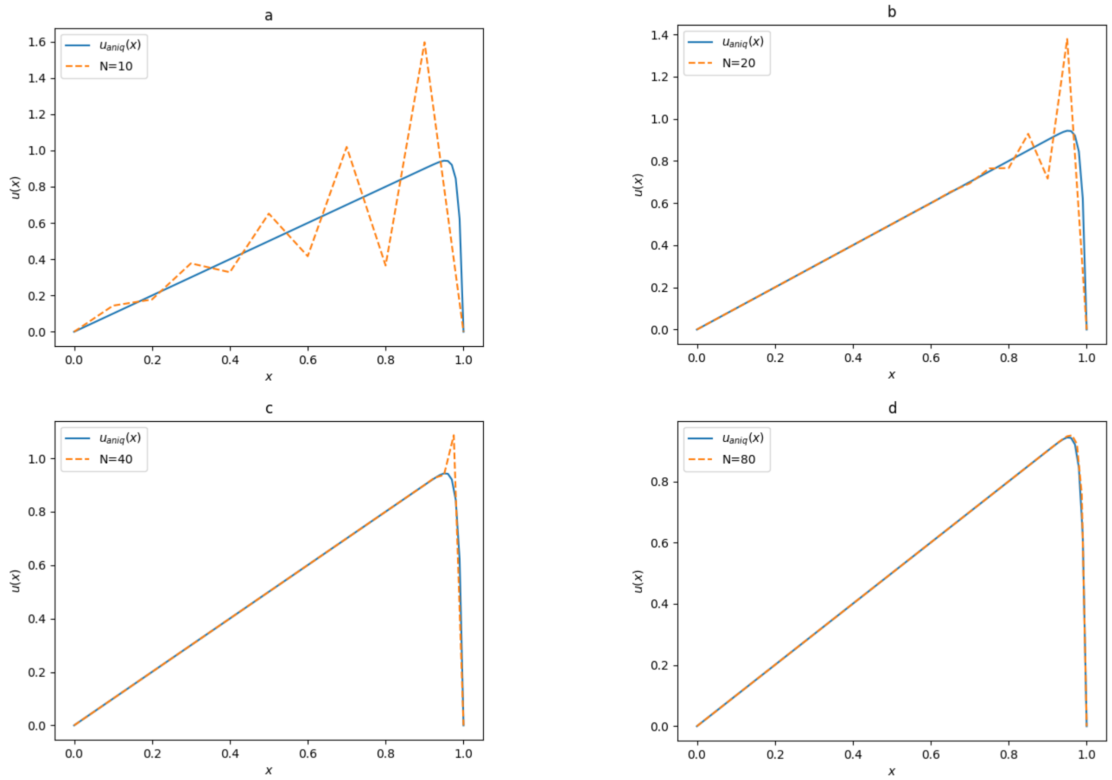
3-rasmda $k_1 = 0{,}03$ da (8) markaziy ayirma qo‘llangan sxema yordamida olingan sonli natijalar tasvirlangan. Tugunlar soni oshishi bilan aniq yechim va sonli yechim orasidagi farq kamayib boradi. $N = 40$ da aniq yechim va sonli yechim deyarli ustma-ust tushgan (3-rasm, c). Bundan ko‘rinadiki, bir-xil parametrlarda (7) ayirmali sxemaga nisbatan (8) ayirmali sxema afzal ekanini sonli natijalar ko‘rsatib turibdi.





3-rasm. (8) ayirmali sxema yordamida olingan sonli yechimlar ($k_1 = 0{,}03$)

4-rasmda konveksiya ancha ustun bo‘lgan $k_1 = 0{,}01$ da (8) ayirmali sxema yordamida olingan sonli natijalar tasvirlangan. Tugunlar soni kichik bo‘lganda ($N = 10,\ 20$) aniq yechim va sonli yechim orasidagi farq o‘ng chegaraga yaqinlashgan sayin oshib boradi (4-rasm, a, b). Ammo tugunlar soni $N = 80$ bo‘lganda aniq yechim va sonli yechim deyarli ustma-ust tushganligini ko‘rishimiz mumkin (4-rasm, d). Bundan ko‘rinadiki, konveksiya kuchaygan holatda konveksiya-diffuziya masalasini yechish uchun markaziy hosilali (8) sxemani qo‘llash yaxshiroq natija berar ekan. Shu bilan birga tugunlar sonini kattaroq olsak yaxshiroq natijaga erishar ekanmiz.



4-rasm. (8) ayirmali sxema yordamida olingan sonli yechimlar ($k_1 = 0{,}03$)

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 248 с.

3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.

4. Normurodov C. et al. Numerical simulation of the inverse problem for the vortex-current equation //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – Т. 2637. – №. 1. – С. 040018.

5. Aliyev S. Statsionar konveksiya–diffuziya masalalarini pythonda sonli modellashtirish // Eurasian Journal of Mathematical Theory and Computer Sciences. – 2022. – Т. 2. – №. 5. – С. 7-11.

6. Вабищевич П.Н. Численные методы: Вычислительный практикум. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 320 с.