Subfaktorial haqida ayrim mulohazalar

Mohinur Baxromovna Baxadurova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada kombinatorika masalalarining kelib chiqish tarixi va sehrli kvadratlar to‘g‘risida ma’lumotlar berilgan. Faktorial va subfatorialga olib keluvchi masalalar muhokama qilingan. Subfaktorialning xususiy holdagi bir nechta qiymatlaridan tuzilgan jadval keltirilgan. Unga oid bir qator formulalar yozilgan va ayrim misollar yechib ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: kombinatorika, sehrli kvadratlar, faktorial, subfatorial, ustun, dioganal, naturalsonlar, «Xat haqida masala»

Some considerations about subfactorial

Mohinur Bakhromovna Bakhadurova
Bukhara State University

Abstract: The article provides information on the history of the origin of combinatorics issues and magic squares. Issues leading to factorial and subfatorial have been discussed. A table is given compiled from several values of the subfactorial in private. A number of formulas have been written on it and some examples have been solved.

Keywords: combinatorics, magic squares, factorial, subfatorial, column, dioganal, naturalsons, «matter about Letter»

Klassik kombinatorika masalalari turli xil qiziqarli boshqotirmalardan iborat bo‘lib, bunda to‘plamdan elementlarni tanlab olish va ularni har xil usulda joylashtrish masalalarni qaraladi. Bunday masalalardan biri qadim Sharqda paydo bo‘lgan sehrli kvadrat haqidagi quyidagi masaladan iborat: n^2dona dastlabki natural sonlardan shunday nxn kvadrat jadval yasangki,uning satrlari, ustunlari va dioganalida joylashgan sonlarning yig‘indisi bir xil songa teng bo‘lsin. Masalan, 9 ta, ya’ni 1 dan 9 gacha natural sonlardan $3x3$ kvadrat jadval tuzinki uning satrlari, ustunlari va diognallarida turgan sonlarning yig‘indisi 15 ga teng bo‘lsin. Bu quyidagi ko‘rinishdagi kvadrat jadval bo‘ladi:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Hozirgi kunda bu turdagi masalalarning $n < 4$ hol uchun yechimlarini topish usullari topilgan. Sehrli kvadrat satrlari (yoki ustunlari) sonini uning tartibi deb ataladi. Ixiyoriy tartibli sehrli kvadrat satrlari, ustunlari yoki diagonallari bo‘yicha xosil bo‘lishi kerak bo‘lgan yig‘indi uning doimiysi deb ataladi. Tartibi n bo‘lgan sehrli kvadrat doimiysi D quydagi formla bilan topiladi:

$$D = (n^3 + n)/2.$$

Masalan, 3 $-$tartibli sehrli kvadrat doimiysi

$$D = (3^2 + 3)/2 = 15.$$

Xuddi shuningdek 4 tartibli sehrli kvadrat doimiysi

$$D = (4^2 + 4)/2 = 34$$

bo‘lib, bu sehrli kvadratning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Bunda har bir satr, ustun va diagonallarda joylashgan sonlarning yig‘indisi 34 ga teng.

Umuman elementlarning turli konbinatsiyalari va ularning sonni topish bilan bog‘liq masalalar konbinatorika masalalari deyiladi. Bunday masalalar amaliyotda ko‘plab uchraydi. Bunda ko‘plab ob’ektlar to‘plami elementlaridan uning qism to‘plamlarini, qandaydir to‘plam elementlarini u yoki bu ko‘rinishda joylashtirish masalalari ko‘zda tutiladi. Masalan, fermer o‘z ishchilari orasida turli ishlarni taqsimlashi, zobitning zavoddagi askarlaridan zaryadtanlashi, shaxmatchining bir qancha yurishlar seriyasidan eng yaxshisini tanlashi vah.k. Bu masalalarda ishlarning turli xil kombinatsiyalarini tanlash, askarlarni tanlash, yurishni tanlash haqida so‘z boradi.

Kombinatorik masalalar matematika fanining tarmog‘i - kombinatorikada o‘rganiladi. Kombinatorikada chekli to‘plamlar, ularning qismi to‘plamlari, akslantirishlar va chekli to‘plamlardan tuzilgan kortejlar o‘rganiladi. Shuning uchun kombinatorikani cheklito‘plamlar nazariyasining qisimi deb qarash mumkin.

Ko‘plab kombinatorik masalalarni yechish ikkita asosiy qoidaga, ya’ni yig‘indi va ko‘paytma qoidalariga asoslanadi. Biz ushbu maqolada ko‘paytirish qoidasidan foydalanamiz.

Yig‘indi qoidasi ikki chekli to‘plam birlashmasi elementlarining sonini topishga, ko‘paytrish qoidasi esa ularning dekart ko‘paytmasi elementlarining sonini topishga yordam beradi.

Quyidagi masalani qaraymiz. Masala. $n$elementli X to‘plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin? Masalani yechishdan oldin tartiblangan to‘plam tushunchasini keltiramiz.$n$elementli$X$to‘plami berilgan bo‘lsin. Uning elementlarini biror usul bilan raqamlab chiqilgan bo‘lsa, uni tartiblangan to‘plam deymiz va $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ ko‘rinishda yozamiz.

Bitta to‘plamni turli xil usullar bilan tartiblash mumkin. Masalan, autoriyadagi talabalarni yoshiga, bo‘yiga, og‘irligiga, familiyalarining bosh harfiga qarab tartiblash mumkin. Masalani yechish uchun$X$to‘plamining elementlarini tartiblashni (raqamlashni) quyidagicha amalga oshiramiz: 1 - raqamni$n$ta elementining istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun 1- elementni n usul bilan, 2 - elementni 1 - element tanlanib bo‘lgandan so‘ng $n - 1$ usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos. Tartiblashlarning umumiy soni ko‘paytma qoidasiga ko‘ra $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ gateng.

U ni $n!$ orqali belgilanadi va u dastlabki n ta natural sonning ko‘paytmasi yoki n faktorial deb o‘qiladi. Uni P_n orqali belgilanadi. Demak, n elementli X to‘plamni $P_n = n!$ usul bilan tartiblash mumkin ekan. P_n $-$ni n elementdan takrorlanmaydigan o‘rin almashtrishlar soni deb ataladi.

Ma’lumot sifatida aytib o‘tamiz: faktorial - lotincha factorialis-harakat qiluvchi, ishlab chiqaruvchi, ko'paytiruvchi ma’nolarini bildiradi.

Misol. 10 ta mehmoni 10 ta stulga necha xil usul bilan o‘tqazish mumkin?

Yechish. Bu 10 elementdan takrorlanmaydigan o‘rin almashtrishlar sonini topish masalasi bo‘lib$P_{10} = 10! = 3628800$ga teng. Demak, 10! Usul bilan mehmonlarni o‘tqazish mumkin.

Endi asosiy masalani bayoniga o‘tamiz. Masala. O‘qituvchi5nafar o‘quvchidan yozma ish oldi. Yozma ishlarni o‘zi tekshirmasdan, uni o‘quvchilar yordamida tekshirmoqchi bo‘ldi. Bu yerda asosiy shart, o‘quvchi o‘zining yozma ishini tekshirmasligi kerak. Yozma ishni necha xil usulda tekshirish mumkin?

Yozma ishlar soni kam bo‘lganligi uchun tekshirish usullarini hisoblab chiqsak 44ga teng bo‘ladi. Demak, yozma ishlarni 44 usul bilan tekshirish mumkin ekan.

Agar o‘quvchilar soni ko‘p bo‘lsa yoki umumiy holda $n$nafar o‘quvchidan yozma ish olinib, uni tekshirishlar soni aniqlamoq chibo‘lsak, uni yuqoridagi usul (o‘quvchilar soni 5 nafarga teng bo‘lgan hol) bilan yechib bo‘lmaydi.

Agar to‘plamning elementlarini raqamlash masalasiga qaytsak, biz tomondan o‘rganilayotgan masala uning teskarisi hisoblanadi. Ya’ni, birinchi masalada to‘plam elementlarini tartiblashlar soni aniqlansa, ikkinchi o‘rganilayotgan masalada esa uni tartibsiz holga keltirishlar soni o‘rganiladi. Buni quyidagi misol orqali oson tushuntiramiz: bizga n ta konvert va$n$ta xat berilgan. Hech bir xat mos konvertga tushmasligi sonini topishimiz kerak. Boshqacha qilib aytganda, tartibsizliklar sonini aniqlashimiz kerak. Bu «Xat haqida masala» deb ataladi.

Masalaning yechimi

$$n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ ...+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

ga teng bo‘lar ekan.

Ushbu formula n subfaktorial deb ataladi va! n deb belgilanadi, ya’ni:

$$!n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ ...+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

U 1713 yilda shveysariyalik huquqshunos va matematik Nikolay Bernulli tomonidan topilgan [https://ru.wikipedia.org/wiki/Bernulli,_Nikolay_(1695-1726)].

Nikolay Bernulli (nemischa: Nikolaus II. Bernoulli, 1695-1726 shveysariyalik huquqshunos va matematik.

Subfaktorial bo‘yicha bir qator formulalar bor. Jumladan:

- $!n=\frac{\Gamma(n+1,-1)}{e}$, bu yerda Γ - chala gamma funksiya.

- $!n=\left[\frac{n!}{e}\right]$, bu yerda $[x]$ qaysiki x ga eng yaqing son.

- $!n=\left[\frac{n!+1}{e}\right]$ Mehdi Hassani formulasiga ga ko‘ra $[x]$ sonning butun qismini anglatadi.

- $Q^n=(P-1)^n\ va\ P^n=(Q+1)^n$ ayniyatga ko‘ra bu formula o‘rinli; bu yerda $P^k\ -$ ni «$k!$» faktorial deb, $Q^k\ -$ ni «$!\,k$» deb tushuniladi.

N sonining faktorial (belgilash: $!n$) n tartibidagi tartibsizliklar soni, ya'ni ko'chmas nuqtalarsiz n tartibidagi almashtirishlar soni sifatida aniqlanadi. Subfaktorial nomi almashtirishlarning umumiy sonini belgilaydigan faktorialga o'xshashlikdan kelib chiqadi.

Kombinatorikada tartibsizlik ko'chmas nuqtalarsiz almashtirish deb ataladi.

Ba'zi hollarda, ma'lum bir xususiyatlar to'plamiga ega bo'lgan ob'ektlar soni faqat ushbu xususiyatlar soniga bog'liq. Keyin tanlangan xususiyatlarning hech biriga ega bo'lmagan ob'ektlar sonini hisoblash formulasi soddalashtiriladi.

Ixtiyoriy n bilan bizda:

$$N(\bar{n})=N-\ C_n^1\ \cdot N(1)\ +\ C_n^2\ \cdot N(2)-\ ...+\ (-1)^n\ \cdot N(n)$$

Oldingi paragrafning so'nggi misolida biz kombinatorikaning asosiy teoremasining ushbu alohida holatidan foydalandik. Umuman olganda, n ob'ektlarni almashtirishda hech qanday ob'ekt o'z o'rnida bo'lmagan tartiblar soni:

$$N(\bar{n}) = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - \ldots + (-1)^n \cdot 0! = D_n$$

Olingan ushbu qiymat D_n ba'zan to'liq tartibsizlik formulasi yoki subfaktorial deb ataladi. Subfaktorial D_n ni quyidagicha tasavvur qilish mumkin:

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right],$$

ifoda qaerda [...] cheksiz o'sish bilan e^{-1}ga intiladi n.

Subfaktorial oddiy faktorialga o'xshash xususiyatlarga ega. Masalan:

- $n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]$— oddiy faktorial uchun,
- $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$— subfaktorial uchun.

Subfaktoriallarni formula bo'yicha hisoblash oson formulasi

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Subfaktoriallarning ba'zi boshlang'ich qiymatlari:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	0	1	2	9	44	255	1784	1427	128476

Formulaga ko'ra, subfaktorial har doim faktorialdan kichik bo'ladi, chunki qavslarda qiymat har doim $n > 3$ uchun $1/2$ dan kattadir. Ajablanarlisi shundaki, faktorial va subfaktoril Eyler konstantasi orqali qisqacha bog'langan. Subfaktorial uchun quyidagi formulalar va qiymatlar mavjud:

$-!n = \left[\frac{n!}{e}\right];$

$-n = 7 \rightarrow n! = 5040,$ shunda

$-!n = \left[\frac{5040}{2{,}718}\right] = [1854{,}3 \ldots.];$

$-!n = 1854$, bu uerda olinadigan natijaga eng yaqin butun sonni hisoblash kifoya.

Va yana bir ajoyib tasodif − matematikada ma'lum bo'lgan yagona raqam-subfaktorion:

$$148349 = !1 + !2 + !8 + !3 + !4 + !9.$$

Matematikada o'nga yaqin turli xil shu kabi formulalar mavjud, ularni ko'rib chiqamiz:

2. Ikkilik faktorial:

Masalan: $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.

Umumiy holatda, ya'ni $n!!$ − juft bo'lsa, $n!! = n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2$, agar toq bo'lsa $n!! = n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$.

Endi $n\underbrace{!!\ldots!}_{m\ ta}$ − bo'lgan holning formulasini keltiramiz:

$$n\underbrace{!!\ldots!}_{m\,ta} = n\cdot(n-m)\cdot(n-2m)\cdot\ldots\cdot(n-rm),$$

bu yerda $r-$ shunday natural sonki, $n-rm>0$ bo'lib, $n-(r+1)m\leq 0$ bo'ladi.

Ushbu faktorial kombinatorikada juda ko'p sonli dasturlarga ega va alohida materialga loyiqdir. U birinchi marta Uollisning natural sonlarning π sonini bog'liqligi asarini chiqarishda ishlatilgan:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\ldots$$

3. Giperfaktorial:

$$H(n) = n^n(n-1)^{n-1}\ldots 2^2\cdot 1^1.$$

Masalan: $H(4) = 4^4\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 1^1$

U oldingi ikkitasiga qaraganda tezroq o'sadi.

4. Primorial:

Berilgan sondan kichik yoki unga teng bo'lgan tub sonlarning ko'paytmasi sifatida aniqlanadi.

$$n\,\# = p\,;|p\leq n|.$$

Masalan: $9\# = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ → tub sonlar.

5. Sloun superfaktoriali:

Bu nom o'ziga xos onlayn butun sonlar ketma-ketligi Ensiklopediyasi (OEIS) yaratuvchisi tomonidan berilgan. Berilgan sondan kichik yoki unga teng bo'lgan sonlar faktoriallarining ko'paytmasi sifatida aniqlanadi.

$$S\oint(n) = \prod_{k=1}^{n}k!\,.$$

Masalan:

$$S\oint(4) = 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!$$

6. Pikover Superfaktoriali:

$$n\$ = n!_{n1}.$$

Masalan:

$4\$ = 4!_{4!} = 24_{24} = 24^{\cdot^{\cdot^{24}}}$, bu yerda darajada 24 ta element bor.

Raqamning yuqori chap qismidagi ko'rsatkich yozuvi maxsus matematik operatsiyani-tetratsiyani aniqlaydi.

$$3^{3^{3^{3}}} = 3^{3^{3^{27}}} = 3^{3^{7625597484987}}.$$

7. Eksponensial faktorial:

Oldingi vakil bilan taqqoslaganda, u «sekin» o'sadi. Masalan, yuqoridagi ifoda uchun bu 262144. Albatta, natijada 6 raqami uchun 10^{183230} nollar.

$$n\$ = n^{n-1^{\cdot^{\cdot^{1}}}}. \text{Masalan}: \ 4\$ = 4^{3^{2^{1}}}.$$

Subfaktorialga doir bir nechta misollar keltiramiz.

1) Tengsizlikni yeching:

$$13x \leq 8!!! + 5!! + 3.$$

Yechish. Ikkilik faktorialda keltirilgan formuladan foydalanamiz. Demak,

$$8!!! = 8 \cdot (8-3) \cdot (8 - 2 \cdot 3) = 8 \cdot 5 \cdot 2 = 80,$$

$$5!! = 5 \cdot (5-2) \cdot (5 - 2 \cdot 2) = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15.$$

Subfaktorial formulasidan foqdalanamiz:

$$!\,3 = 3! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$2x \leq 80 + 15 + 3 \ \Rightarrow$$

$$x \leq 98.$$

2) Kvadrat tenglamani yeching:

$$x^2 + 4!!\,x - !\,4 = 0.$$

Yechish. Eng avval tenglamada ishtirok etayotgan faktoriallarni hisoblaymiz:

$$4!! = 4 \cdot (4-2) = 8,$$

$$!\,4 = 4! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right),$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = 9,$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

$$(x+9) \cdot (x-1) = 0,$$

$$x_1 = -9 \text{ va } x_2 = 1.$$

3) Logarifmni hisoblang: $log_3^{!4} = ?$

Yechish. Misolni yechish uchun subfaktorial formulasidan foqdalanamiz.

$$!\,4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9.$$

Demak,

$$log_3^{!4} = log_3^{4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)} =$$

$$log_3^{9} = log_3^{3^2} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Internet manba. https://studfile.net/preview/1587937/page:2/

2. I.L. Yerosh. Diskret matematika. Kombinatorika // Sankt-Peterburg 2001 Yil.

3. Internet manba. https://famous-mathematicians.com/images/swiss-mathematicians/nicolaus-bernoulli.jpg.

4. Internet manba. https://intellect.icu/faktorial-superfaktorialy-giperfaktorial-primorial-4266.