Chiziqli normalangan va vektor fazolarning tadbiqlari haqida (differensial va Shryodinger operatorlari misolida)

Sarvinoz Ismoil qizi Ikromova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada matematikaning muhim bo'limlaridan bo'lgan vektor fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid fazolari va Hilbert fazolari haqida umumiy ma'lumotlar keltirilgan. Xususan, ularning ta'riflari, o'zaro bog'liqlari va ularga doir misollar bayon qilingan. Shu fazolarda o'rganilgan amaliy masalalar (olmos panjarada aniqlangan diskret Shryodinger operatorining spektral xossalari va differensial operatorlarning tadbiqlari) tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: chiziqli fazo, kompleks sonlar, element, kommutativlik, assotsiativlik, kompleks chiziqli fazo, aksioma, izomorf fazolar, funksional, metrika, Evklid fazosi, Koshi-Bunyakovskiy tengsizli, Hilbert fazosi, separabel Hilbert fazosi, qism fazolar

On applications of normalized linear and vector spaces (as examples of differential and Schrodinger operators)

Sarvinoz Ismoil qizi Ikromova
Bukhara State University

Abstract: The article provides general information about vector spaces, linear normalized spaces, Euclidean spaces, and Hilbert spaces, which are important branches of mathematics. In particular, their definitions, interrelationships, and related examples are described. The practical problems studied in these spaces (spectral properties of the discrete Schrodinger operator defined in the diamond grid and applications of differential operators) were analyzed.

Keywords: linear space, complex numbers, element, commutativity, associativity, complex linear space, axiom, isomorphic spaces, functional, metric, Euclidean space, Cauchy-Buniakovsky inequality, Hilbert space, separable Hilbert space, partial spaces

Ma'lumki, zamonaviy matematikada vektor fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid fazolari va Hilbert fazolari muhim o'rin tutadi. Xususan, olmos panjarada aniqlangan diskret Shryodinger operatorining spektral xossalari va biologik jarayonlarning matematik modellari bo'lgan xususiy hosilali differensial operatorlarni o'rganishda shu fazolar keng qo'llaniladi. Ushbuni inobatga olib, fazolar va ularga doir misollarni hamda shu fazolarda o'rganilgan ilmiy ishlar tahlilini bayon qilamiz.

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushunchalardan hisoblanadi. Quyida C bilan kompleks sonlar, R bilan haqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

Ta'rif 1. Agar elementlari $x,y,z,\dots$ bo'lgan L to'plamda quyida berilgan ikki amal aniqlangan bo'lsa:

I. Ixtiyoriy ikkita $x,y \in L$ elementga ularni yig'indisi deb ataluvchi aniq bir $x+y \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x,y,z \in L$ elementlar uchun

1) $x+y=y+x$ (kommutativlik xossasi),

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (assotsiativlik xossasi),

3) L da shunday θ elementlar mavjud bo'lib, $x+\theta=x$ (nolni mavjudligi),

4) shunday $-x \in L$ element mavjud bo'lib, $x+(-x)=\theta$ (qarama-qarshi elementni mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;

II. Ixtiyoriy $x \in L$ elementlar va ixtiyoriy bo'lgan α sonlar ($\alpha \in R$ yoki $\alpha \in C$) uchun x elementni α songa ko'paytmasi deb ataladigan aniq bir $\alpha x \in L$ elementlar mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy bo'lgan $x,y \in L$ elementlar va ixtiyoriy α,β sonlar uchun:

5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,$

6) $1\cdot x=x$,

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

aksiomalari bajarilsa, L to'plamni chiziqli fazo deb ataladi.

Ushbu ta'rifda kiritilgan birinchi va ikkinchi amallar mos ravishda yig'indilar va sonlarga ko'paytirish amallari deb ataladi.

Ta'rifda foydalanilgan sonlar zaxirasida (xaqiqiy bo'lgan sonlarni R yoki kompleks sonlarni C) bog'liq holda chiziqli fazo haqiqiy bo'lgan yoki kompleks bo'lgan chiziqli fazo deb ataladi.

Chiziqli bo'lgan fazolarga bir qator misollar keltiramiz.

Misol 1. Ushbu $\mathrm{L}=R$ haqiqiy sonlarni to'plami odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallarida nisbatan haqiqiy chiziqli fazoni tashkil qiladi. $\mathrm{L}=\mathrm{C}$ kompleks sonlar to'plamini ham kompleks sonlarni ham qo'shish va ko'paytirish amallarga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

Misol 2. $\mathrm{L}=R^n \equiv \{x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\, x_i \in R,\, i=1,2,\dots,n\}-n$ ta haqiqiy sonlarni tartiblangan guruxlari to'plami bo'lsin. Bu yerda, elementlarini qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy bo'lgan $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $y=(y_1, y_2, ..., y_n)\in R^n$ lar uchun

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n), \quad (1)$$

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n). \quad (2)$$

R^n - to'plamni (1) va (2) tengliklari bilan aniqlangan qo'shishni va songa ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy bo'lgan chiziqli fazo tashkil qiladi va uni n − o'lchamli haqiqiy bo'lgan chiziqli fazo deb ataladi.

Misol 3. $L=C^n\equiv\{z=(z_1, z_2, ..., z_n),\ z_k\in C,\ k=1,2,...,n\}$. Ushbu yerda ham elementlarni songa ko'paytirish va qo'shish amallarini (1) va (2) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi. C^n - to'plam kompleks chiziqli fazodir va u n- o'lchamli kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

Misol 4. $L=C[a,b]-[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz bo'lgan funksiyalar to'plami. Funksiyani qo'shish va funksiyalarni sonlarga ko'paytirish amallarini mos ravishda

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad (3)$$

hamda

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x) \quad (4)$$

ko'rinishida aniqlanadi. (3) va (4) tenglik bilan aniqlangan songa ko'paytirish va qo'shish amallarini chiziqli fazoni 1-8 aksiomalarni qanoatlantiradi. Bundaan kelib chiqadiki, $C[a,b]$ bu to'plam chiziqli fazo tashkil qilar ekan.

Ta'rif 2. Bizlarga L va L^* chiziqli bo'lgan fazolar berilgan bo'lsin va agar bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli mosliklar o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x\leftrightarrow x^* \quad \text{va} \quad y\leftrightarrow y^*, \quad (x,y\in L,\ x^*,y^*\in L^*)$$

ekanligidan esa

$$x+y\leftrightarrow x^*+y^* \quad \text{va} \quad \alpha x\leftrightarrow \alpha y^*, \quad (\alpha-\text{ixtiyoriy son})$$

bo'lishi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolarni o'zaro izomorf bo'lgan fazolar deyiladi.

Izomorf bo'lgan fazolarni bitta fazoning turli xil ko'rinishlari deb qarash mumkin.

Chiziqli fazolarda elementlarni bir-biriga yaqinligi degan tushunchalar yo'q. Ko'pgina amaliy masalalar xal qilishga elementlarni qo'shish hamda ularni songa ko'paytirish amallaridan tashqari, elementlari orasidagi masofa va ularni yaqinligi tushunchasini kiritishga to'g'ri keladi. Bu normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keldi. Normalangan fazolar nazariyasi Banax S. va boshqa bir qator olim matematiklar tomonidan keng ko'lamli rivojlantirilgan.

Ta'rif 3. L - chiziqli fazo va unga aniqlangan p funktsional berilgan bo'lsin. Agar p quyida keltirilgan uchta shartlarni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

1) $p(x)\geq 0,\ \forall x\in L;\quad p(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta;$

2) $p(ax)=|a|p(x),\ \forall a\in C,\ \forall x\in L$;

3) $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\ \forall x,y\in L$.

Ta'rif 4. Norma kiritilgan chiziqli fazo L chiziqli normalanngan fazo deyiladi va $x\in L$ elementni normasi $\|x\|$ kabi belgilanadi.

L - normalangan fazoda $x,y\in L$ elementlarni jufti uchun

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

son mos qo'yilsa va ρ funktsional ushbu metrikaning birinchi-uchinchi aksiomalarini qanoatlantiradi (yuqorida keltirilgan ta'rifga qarang). Metrika aksiomalarini bajarilishi normani birinchi-uchinchi shartlardan bevosita kelib chiqqadi. Demak, xar qanday chiziqli normalanngan fazoni metrik fazo sifatiga qarash mumkin bo'ladi. Metrik fazolarda o'rinli barcha tasdiq (ma'lumot) chiziqli normalanngan fazolarda xam o'rinli.

Chiziqli bo'lgan fazolarda norma kiritishni chuqur o'rganilgan usullaridan biri bu, unda skalyar ko'paytmani kiritish hisoblanadi.

Ta'rif 5. L xaqiqiy chiziqli fazo berillgan bo'lsin. Agarda $L\times L$ Dekart ko'paytmada aniqlangan p funktsional quyida keltirilgan 4 ta shartlarni qanoatlantirsa:

1) $p(x,x)\geq 0,\ \forall x\in L;\quad p(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta;$

2) $p(x,y)=p(y,x),\quad \forall x,y\in L;$

3) $p(\alpha x,y)=\alpha\, p(x,y),\ \forall\alpha\in R,\ \forall x,y\in L$;

4) $p(x_1+x_2,\ y)=p(x_1,y)+p(x_2,y),\quad \forall x_1,x_2,\ y\in L$,

bunga skalyar ko'paytma deb ataladi.

Ta'rif 6. Skalyar ko'paytma kiritillgan chiziqli fazo- Evklid fazosi deb ataladi va x,y elementlarni skalyar ko'paytmasi $p(x,y)=(x,y)$ kabi belgilanadi.

Evklid fazosida x elementni normasi

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu funktsional norma aksiomalarini ,archasini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmani birinchi-to'rtinchi shartlaridan normani birinchi-ikkimchi shartlari bevosita kelib ham chiqadi. Uchburchak aksiomasini bajarilishi esa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (6)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi ushbu (6) tengsizlikni, ya'ni Koshi-Bunyakovsskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda \in R$ ni barcha qiymatlarida nomanfiy kvadrat uchhadlarni qaraymiz:

$$\phi(\lambda)=(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y)=\lambda^2\|x\|^2+2\lambda(x,y)+\|y\|^2.$$

Bu kvadrat uchhadni diskriminanti esa musbat emas, ya'ni

$$D=4[(x,y)]^2-4\|x\|^2\cdot\|y\|^2\leq 0.$$

Demak

$$[(x,y)]^2\leq\|x\|^2\cdot\|y\|^2, \text{ ya'ni } |(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|.$$

Endi (5) da norma uchun uchburchak aksiomasini bajarilishini ko'rsatib o'tamiz:

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)\leq$$
$$\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Bundan

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

Shuni qayta ta'kidlaymizki, Evklid fazossida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \to x,\ y_n \to y$ (norma bo'yicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \to \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$x_n+y_n\to x+y,\quad \alpha_n x_n\to\alpha x,\quad (x_n,y_n)\to(x,y).$$

Bizlarni asosan to'la bo'lgan Evklid fazosi qiziqtiradi.

Ta'rif 7. Ushbu E Evklid fazosi $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ normaga nisbbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazolari deyiladi.

To'la Evklid fazolarini qarashni davom ettiramiz. Bizlarni asosan cheksiz o'lchamli bo'lgan Evklid fazolari qiziqtirradi, chunki chunki chekli o'lchamli Evklid fazolari R^n fazoga izomorf.

Ta'rif 8. Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosiga Hilbert fazosi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy bo'lgan tabiatli $f,g,\varphi,\ldots$ elementlarni H to'plami Hilbert fazosi bolsa, u quyidagi keltirilgan uchta shartlarni qanoatlantiradi:

1) H - bu Evklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo bo'ladi;

2) $\rho(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$ metrika ma'nosida H fazo - to'la fazo;

3) H fazo - cheksiz o'lchamlii, ya'ni bunda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjuddir.

Odatda separabel bo'lgan Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Bundan keyin biz asosan, faqat va faqat separabel bo'lgan Hilbert fazolarni qaraymiz.

Misol 5. $C_2[a,b]$ Evklid fazosi to'la emas (yuqorida keltirilgan misollarga qarang), shu uchun $C_2[a,b]$ Hilbert fazosi bo'lolmaydi.

Misol 2. ℓ_2 va $L_2[a,b]$ fazolar cheksiz o'lchamli to'la separabel Evklid fazolari hisoblanadi (bo'lgan misollarga qarang). Shu uchun ular Hilbert fazolari bo'la oladi.

Ta'rif 9. Agar R va R^* Evklid fazolarii o'rtalarida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \; x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad va \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, u holda R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, Evklid fazolarini izomorffligi shundan iboratki, ushbu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli mosliklar mavjud bo'lib, ushbu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ikkita Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'ladi. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Bunga misol, ℓ_2 va $C_2[a,b]$ fazolari o'zaro izomorf emas, chunki ℓ_2 to'la, $C_2[a,b]$ fazo esa to'la emas.

Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 1. Ixtiyoriy ikkita separabel Hillbert fazolari o'zaro izomorfdir.

Ta'rif 10. Agar ushbu H Hilbert fazosini ixtiyoriy elementi $f \in H$

$$f = h + h', \quad h \in M, \; h' \in M^{\perp}$$

ko'rinishida tasvirlansa, u holda ushbu H Hilbert fazosi o'zaro ortogonal M va $M^{\perp}$ qism fazolarni to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyilib va

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

ko'rinishida yoziladi.

To'g'ri yig'indilarni chekli yoki sanoqli sonlardagi qism fazolar uchun ham umumlashtirilishi mumkin, ya'ni H o'zini $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarini to'g'ri (ta'rif asosida) yig'indisiga yoyilgan deyiladi, agarda quyidagi ikkita shart bajarilsa:

a) M_i qismiy fazolar juft-jufti bilan o'zaro ortogonaldir, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy bo'lgan vektor M_k dagi ixtiyoriy vektorga ortogonal, $i \neq k$;

b) ixtiyoriy $f \in H$ Hilbert fazosi elementi

$$f = h_1 + h_2 + ... + h_n + ..., \quad h_n \in M_n, \;\; n = 1, 2, \dots \qquad (7)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, agarda qo'shiluvchilari soni cheksiz bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Ushbu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishida yoziladi. Osongina ko'rsatish mumkinki, Hilbert fazosidagi f uchun (7) yoyilma mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladi va

$$\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|^2 .$$

Qism fazolarni to'g'ri yig'indisi bilan bir qatorlarda chekli bo'lgan yoki sanoqli sonlardagi Hilbert fazosining to'g'ri yig'indisi xaqida xam gapirsa bo'ladi. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo'lsa, u holda ularning to'g'ri yig'indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagiccha aniqlanadi: H fazoni elementlari barcha $(h_1, h_2), \; h_1 \in H_1, \; h_2 \in H_2$ juftlikdan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ da skalyar ko'paytma esa quyidagicha kiritiladi:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1)_{H_1} + (h_2, h'_2)_{H_2}, \;\; h_1, h'_1 \in H_1, \; h_2, h'_2 \in H_2 .$$

Chekli sonlardagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Hilbert fazosining to'g'ri yig'indisi xam xuddi shuningdek aniqlanadi.

Sanoqli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ Hilbert fazolarini to'g'ri yig'indisi esa $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$ quyidagidek aniqlanadi:

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, ..., h_n, ...), \;\; h_n \in H_n, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \| h_n \|^2 < +\infty \right\} .$$

H Hilbert fazosida skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n), \;\; h = (h_1, h_2, ..., h_n, ...), \; g = (g_1, g_2, ..., g_n, ...), \;\; h_n, g_n \in H_n .$$

Xulosa qilib, shuni aytish mumkinki, yuqorida bayon qilib o'tilgan fazolar olmos panjarada aniqlangan diskret Shryodinger operatorining spektral xossalari va biologik populyatsiyaning matematik modelaridan biri bo’lgan xususiy hosilali differensial tenglamalarni o’rganishda muhim rol’ o’ynaydi. Xususan, [1-3] maqolalarda olmos panjarada aniqlangan diskret Shryodinger operatorining spektral xossalari va [4-32] ilmiy izlanishlarda esa xususiy hosilali differensial tenglamalar o’rganilgan. Aytish joizki, hozirgi zamonaviy matematika maqolada aytib o’tilgan - vektor fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid fazolari va Hilbert fazolarining o’rni kattadir. Chunki, aksariyat o’rganilayotgan amaliy masalalar shu fazolarda ko’rib chiqiladi. Bu esa hozirgi vaqtdagi eng muhim va eng dolzarb masalalardir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. С.Н.Лакаев, Ж.И.Абдуллаев. Спектральные свойства разностного трехчастичного оператора Шрёдингера. Функц. анализ и его прил., 33:2 (1999), С. 84–88.

2. С.Н. Лакаев, З.Э. Муминов. Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного опеатора Шредингера на решетке. Функ. Анализ и его прил. 37:3, (2003), С. 85-88.

3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics. Ann. Henri Poincare, 5, (2004), P. 743-772.

4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical

systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.

7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International

Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

16. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

17. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.

18. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

19. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

20. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

21. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

22. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

23. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

24. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

25. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

26. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo'yicha ba'zi uslubiy ko'rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

27. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

28. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

29. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

30. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to'la o'zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

31. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

32. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).