

Nolga bo'lish mumkinmi savoli haqida

Mohinur Umarovna Muzaffarova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada nolga bo'lish masalasi va uni o'quvchilarga tushuntirish oddiy misollar yordamida bayon qilingan. Shuningdek, masalani ayrim xorijiy davlatlarda qanday o'qitilishi haqida ma'lumotlar keltirilgan. Oliy ta'lim muassasalari talabalari uchun nolga bo'lish masalasi matematik analiz fani elementlari yordamida tushuntirilgan.

Kalit so'zlar: bo'luvchi, bo'linma, arifmetik amal, nol, komponent, cheksizlik

To the question about is it possible to divide by zero

Mohinur Umarovna Muzaffarova
Bukhara state university

Abstract: This article presents the problem of division by zero and its explanation to readers using simple examples. Information is also provided on how this issue is taught in some foreign countries. For students of higher educational institutions, the problem of division by zero is explained using elements of the discipline mathematical analysis.

Keywords: divisor, divisor, arithmetic operation, zero, component, infinity

Maktabda hammamizning ustozlarimiz eng oddiy qoidaga qat'iy rioya qilishni o'rgatishadi: «nolga ko'paytiriladigan har qanday son nolga teng!». «Nega?» degan savolga javob topmasdan, biz hammamiz buni yaxshi eslab qolganmiz. Fikrimcha bu savolga javob topishning ayni vaqti. Biz buni nol nima ekanligini tushunishdan boshlaymiz.

Bu raqam atrofida har doim ko'p tortishuvlar bo'lgan. «0» raqami matematikada alohida o'rin tutadi, garchi u so'zma-so'z «hech narsa», «bo'shliq» degan ma'noni anglatasa ham. Nol - bu butun son, o'nlik sanoq tizimidagi raqamlardan biri. Boshqa raqamning o'ng tomoniga qo'yilgan nol raqami chap tomonda joylashgan barcha raqamlarning raqamli qiymatini o'n, yuz va hokazo darajaga oshiradi. Masalan, agar biz «5» ning yoniga «0» qo'ysak, biz 50 ni olamiz, agar 50 ning yoniga «0» qo'ysak, biz 500 ni olamiz. Nol - bu musbat sonlarni son o'qidagi manfiy sonlardan ajratib turadigan raqam. Nolning o'zi «+» yoki «-» belgisiga ega emas.

Matematikada nol bilan barcha arifmetik amallar bajariladi: qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish. Nol bilan qo'shish va ayirishni amalga oshirishda odatda hech qanday muammo va qiyinchiliklar bo'lmaydi. Bu yerda hamma narsa oddiy.

Agar biron bir raqamga «0» qo'shilsa, bu unga hech narsa qo'shilmaganligini anglatadi. Qo'shiluvchiga necha marta nol qo'shishdan qat'iy nazar, o'zgarishsiz qoladi.

Sondan nolni ayirish ham shunday bo'ladi.

$A - A = 0$	$A + 0 = A$
$A - 0 = A$	$0 + A = A$
$0 - A = -A$	

Nolga ko'paytirish qoidasi

Sonni nolga ko'paytirish boshqa sonlarni bir-biriga ko'paytirishdan qanday farq qilishini tushunish uchun avval ko'paytirishning ta'rifini tushunishimiz kerak. Ko'paytirish matematikadagi asosiy amallardan biridir. Ko'paytirish - bu bir xil sonlarni kerakli miqdorda qo'shish asosida sodir bo'lganda arifmetik amal. Ushbu arifmetik amalda ikkita komponent ishtirok etadi - multipli va multiplikator. Ularning ko'payishi natijasi ko'paytma deb ataladi. Shunday qilib, a sonini b soniga ko'paytirish uchun a ni b marta qo'shish kerak:

$$a \times b = (a + a + \dots + a)b.$$

Shunday qilib, $4 \times 3 = 12$ misolini quyidagi ifoda bilan almashtirish mumkin: $4 + 4 + 4 = 12$. Ya'ni, 4 raqami 3 marta olingan.

Nolga ko'paytirish mumkinmi? Bu mumkin, faqat bu ma'nosiz va foydasiz. Zero, nol hech narsa, bo'shliq emas va bo'shliqqa ko'paytirishning nima uchun kerak? Bu yerda, nima deyishidan qat'iy nazar, siz hali ham nolga ega bo'lasiz.

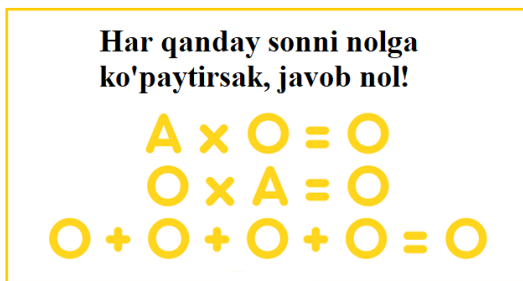
Ushbu qoidani bolalarga qanday tushuntirish mumkin? Keling, buni shunday sinab ko'raylik:

- agar besh marta ikkitadan olma iste'mol qilinsa, $2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$, ya'ni, oxirida 10 ta olma iste'mol qilinadi;

- agar uch marta ikkitadan olma iste'mol qilinsa, $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$, natijada 6 ta olma iste'mol qilinadi;

- agar siz nol marta ikkitadan iste'mol qilinsa, $2 \times 0 = 0 \times 2 = 0 + 0 = 0$, natijada, bitta ham olma iste'mol qilinmaydi.

Axir, nol marta olma iste'mol - bu hech nima yemaslikni anglatadi. Nol - bu hech narsa va agar sizda hech narsa bo'lmasa, uni qancha ko'paytirsangiz ham nol bo'ladi.



To'g'ri, ba'zida quyidagi e'tirozlar ilgari suriladi: aytaylik, odamning qo'lida 2 ta olma bor. Agar u ularni yemagan bo'lsa, unda olma yo'qolmaydi, ular uning qo'lida qoladi. Nima uchun natija nolga teng? Ha, olma haqiqatan ham qo'ldan chiqmaydi. Ammo misolda biz aynan iste'mol qilingan olmani, ya'ni, boshqacha qilib aytganda, odamning oshqozonida bo'lgan olmani hisoblaymiz. Oxirgi holda, ular u yerga yetib bormadi. Shunday qilib, nol ta olma iste'mol qilindi.

Shunday qilib, asosiy qoida quyidagicha: sonni nolga ko'paytirganda va nolni songa ko'paytirganda, javobda har doim nol bo'ladi:

$$a \times 0 = 0$$

$$0 \times a = 0$$

Matematikada nolga ko'paytirishning ushbu qoidasi har qanday sonlar uchun amal qiladi: ijobiy, salbiy, butun sonlar, kasrlar, ratsional, irratsional. Qanday bo'lmasin, ko'paytma nolga teng bo'ladi.

Qoidani yaxshiroq eslab qolish uchun nolga ko'paytirish misollarini keltiramiz:

$$0 \times 3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 \times 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$756 \times 0 = 0$$

$$293 \times 0 = 0$$

Nolga bo'lish qoidasi

«0» ga bo'lish haqida nima deyish mumkin? Biz maktabdan: «nolga bo'lish mumkin emas», - degan qoidani eslaymiz. Bularning barchasi keraksiz dalillarni talab qilmasdan yodlanadi. Bu mumkin emas. Aksariyat odamlar, bu qoidaga asoslanib, haqiqatdan ham nolga bo'lib ko'rmaganlar. Aslida, bu nima uchun mumkin emas?



8:4 yozuvini sakkizta ob'yektni to'rtta teng bo'lakka bo'lish natijasi sifatida tushunish mumkin. Aslida bu $4 \cdot x = 8$ tenglamani yozishning qisqartirilgan shakli.

Aynan shu yerda nima uchun nolga bo'lish mumkin emasligi (aniqrog'i imkonsizligi) aniq bo'ladi. $5:0$ yozuvi $0 \cdot x = 5$ uchun qisqa yozuv. Ya'ni, bu «0» ga ko'paytirilganda ko'paytma 5 bo'ladigan sonni topishdir. Ammo biz bilamizki, «0» ga ko'paytirilganda har doim ko'paytma «0» bo'ladi. Bu nolning ajralmas xususiyati, qat'iy aytganda, uning ta'rifining bir qismidir. Ya'ni, bizning vazifamiz bajarilmaydi. Bu shuni anglatadiki, $5:0$ yozuvi ma'lum bir songa mos kelmaydi va u shunchaki hech narsani anglatmaydi va shuning uchun mantiqiy emas. Ushbu yozuvning ma'nosizligi nolga bo'lish mumkin emasligini aytib, qisqacha ifodalanadi.

Shu savolga javob Hindiston maktablarida quyidagi tushuntiriladi: agar limonni ikki qismga emas, balki cheksiz bo'lakka ajratsak, har bir bo'lakning o'lchami qanday bo'ladi?

Ehtimol, biz deyarli «nolga teng» cheksiz bo'lakchalarga duch kelamiz. Teskarisi, ya'ni, agar limonni cheksizlikka bo'lsak, bo'lakning o'lchami nol bo'ladi.

Boshqa bir misol keltiramiz.

Biz qancha vaqtda 10 kilometr yuramiz?

Vaqtни topish uchun bizning holatlarimizda, masofani tezlikka bo'lamiz. Agar tezlik nolga teng bo'lsa nima bo'ladi? Javob cheksizlik chiqadi, bu esa mantiqsiz.

Yana boshqa bir misol:

$$a \times 0 = 0;$$

$$b \times 0 = 0,$$

demak $a \times 0 = b \times 0 \Rightarrow a = b$.

Shunday qilib, har qanday son boshqa bir songa teng bo'lib chiqadi va bu mumkin emas.

Agar biz 10 ta olmani 2 tadan qilib qutiga solsak, nechta quti kerak bo'ladi?

Javob: 5 ta quti.

Ammo, agar 10 ta olmani nol tadan qilib qutiga solsak, nechta quti kerak bo'ladi? Ma'lum bo'lishicha, buning uchun qutilarni hojati yo'q, chunki ularga qo'yish uchun hech narsa yo'q.

Endi eng oddiy usulda tushuntirishga harakat qilamiz: $12:2 = 6$, $12:4 = 3$. Sonning maxraji qancha katta bo'lsa, natija shunchalik kichik bo'ladi. Bu qoida aksincha ham ishlaydi. Maxrajdagi son qancha kichik bo'lsa, natija shunchalik katta bo'ladi: $12:1,5 = 8$, $12:1 = 12$.

Juda kichik sonlar bilan nima bo'ladi? Masalan, 1 ni 0,0000001 ga bo'lsak, 100000000 chiqadi. Maxrajni nolgacha kamaytirganda, javob juda katta bo'lishi kerak, aniqrog'i cheksizlik. Shunday qilib, algebra doirasida nolga bo'lish mumkin emas, chunki «cheksizlik» tushunchasi yo'q.

Nolga bo'lish mumkin emasligi va ma'nosiz ekanligini matematik analiz fani elementlaridan foydalanib ko'rsatishga harakat qilamiz.

Shunday qilib, biz matematik nuqtai - nazardan nolga bo'lish mumkin emasligini aniqladik. Ammo matematikada «mumkin emas» degan narsa yo'q. Masalan, funksiyalar limitlarini hisoblashda nolni nolga «bo'lish» mumkin. Agar siz matematik tahlil dunyosiga kirsangiz, unda Bernulli usuli asosida Lopital qoidasi $0 \div 0$ yoki $\frac{0}{0}$ kabi noaniqliklarning yechimini ochib beradi.

Biroq, teorema su'rat va maxrajda ifodalar limitlari nolga teng bo'lgan misollar ko'rib chiqiladi. Aniq nolga emas, balki nolga juda yaqin raqamlarga.

1-misol. Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}.$$

Yechish.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

2-misol. Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 3)}.$$

Yechish.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 3)} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(\ln(x^2 - 3))'} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x - 3}{\frac{2x}{x^2 - 3}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 3)(x^2 - 3)}{2x} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Shu o'rinda quyidagi misolni ko'rib chiqamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ va } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ushbu misollardan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right) \text{ va } \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right). \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right) = +\infty \text{ va } \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Ushbu misollardan ham ko'rinib turibdiki, natijalar ikki xil, ya'ni biror sonni limiti nolga teng bo'lgan qiymatlarga bo'lishda ham limitlar mavjud bo'lmas ekan. Bu hollar nolga bo'lish mumkin emasligini bildiradi.

Izoh.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

bo'lgani bilan $\frac{1}{n}$ ning qiymati hech qachon nolga teng bo'lmaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Чарльз Сейфе. Ноль: Биография опасной идеи // Москва, АСТ, 2013, 144 с.
2. William Kahan. Desperately Needed Remedies for the Undebuggability of Large Floating-Point Computations in Science and Engineering // <https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/Boulder.pdf>.