Определение коэффициента перетока в модели фильтрации Уоррена-Рута на основе решения обратной задаче

Эркин Чоршанбиевич Холияров
e.kholiyarov@mail.ru
Мирзохид Юлдаш угли Эрназаров
ernazarov.mirzohid@mail.ru
Шохрух Азамат угли Умарзода
shoxumarzoda@gmali.com
Термезский университет экономики и сервиса

Аннотация: В работе поставлена и численно решена обратная задача по определению коэффициента перетока в модели Уоррена-Рута для фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах. Для решения задачи использованы методы идентификации первого порядка. Установлено, что коэффициент перетока при различных нулевых приближениях с невозмущенными исходными данными восстанавливаются достаточно хорошо при небольших числах итераций.

Ключевые слова: метод идентификация, обратная задача, фильтрация, трещиновато-пористая среда, устойчивость решения

Determination of the flow coefficient in the Warren-Root filtration model based on the solution of the inverse problem

Erkin Kholiyarov
Mirzokhid Ernazarov
Shohruh Umarzoda
Termez University of Economics and Service

Abstract: In this paper, the inverse problem of determining the flow coefficient in the Warren-Root model for filtering a homogeneous fluid in fractured-porous media is posed and numerically solved. To solve the problem, first-order identification methods were used. It has been established that the flow coefficient at various zero approximations with unperturbed initial data is restored quite well at a small number of iterations.

Keywords: identification method, inverse problem, filtration, fractured-porous medium, solution stability

Введение

Теория фильтрации однородных жидкостей в трещиновато-пористых средах (ТПС) рассмотрены в [1, 2]. Согласно по этой теории ТПС описывается как взаимодействующая среда, состоящая из системы трещин и пористых блоков. Уравнения движения и сохранения массы записываются независимо для каждой среды, т.е. в каждой точке вводятся две проницаемости, пористости, скорости фильтрации и два давления. Переток жидкости из одной среды в другую учитывается введением функции источника-стока в уравнениях сохранения массы. Предполагается, что пласт однороден, изотропен и течение в обеих средах происходит в пределах справедливости закона Дарси. Жидкость слабосжимаема, обе среды - упругие, происходит обмен жидкостью между трещинами и пористыми блоками и масса протекающей из блоков в трещины жидкости q подчиняется соотношению

$$q=\alpha_0\frac{\rho_0}{\mu}\left(p_2-p_1\right), \qquad (1)$$

где α_0 - безразмерный коэффициент, зависящий от геометрических характеристик пористых блоков; ρ_0 - плотность при первоначальном давлении p_0, μ - динамическая вязкость жидкости, p_1, p_2 - давления в трещинах и пористых блоках, соответственно .

При этих предпосылках уравнения фильтрации в одномерном случае принимают вид:

$$\begin{cases}\beta_1^*\dfrac{\partial p_1}{\partial t}=\dfrac{k_1}{\mu}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\dfrac{\alpha_0}{\mu}\left(p_2-p_1\right),\\ \beta_2^*\dfrac{\partial p_2}{\partial t}=\dfrac{k_2}{\mu}\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}-\dfrac{\alpha_0}{\mu}\left(p_2-p_1\right),\end{cases} \qquad (2)$$

где

$$\beta_l^*=\beta_{cl}+m_{0l}\beta_f;\ \ \rho=\rho_0\left[1+\beta_f\left(p_l-p_0\right)\right];$$

$$m_l=m_{0l}+\beta_{cl}\left(p_l-p_0\right);\ \ \mathbf{v}_l=-\frac{k_l}{\mu}\frac{\partial p_l}{\partial x},\ \ l=1,2,$$

k_l - проницаемости, m_l - пористости, m_{0l} - пористости при $p_l=p_0$, v_l - скорость фильтрации, β_f - коэффициент сжимаемости жидкости, β_{cl} - коэффициент сжимаемости среды, ρ - плотность жидкости, индекс $l=1$ соответствует трещинам, $l=2$ - пористым блокам.

Из обобщенной модели (2) в условиях $m_1 << m_2$, $\beta_{c1} << \beta_{c2}$, $k_2 << k_1$, получается упрощенная система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{\mu\beta_2^*}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_2^*}\left(p_2 - p_1\right) = 0, \\ \beta_2^*\dfrac{\partial p_2}{\partial t} + \dfrac{\alpha_0}{\mu}\left(p_2 - p_1\right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Уоррен и Рут [3] учитывали сжимаемости трещин, но пренебрегали движением жидкости в пористых блоках. В этих соображениях из (2) получается следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \beta_1^*\dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{k_1}{\mu}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \dfrac{\alpha_0}{\mu}\left(p_2 - p_1\right), \\ \beta_2^*\dfrac{\partial p_2}{\partial t} + \dfrac{\alpha_0}{\mu}\left(p_2 - p_1\right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В некоторых источниках система уравнений (4) называется «усеченной».

Модели (2), (3), (4) широкое применяется в анализе процессов разработки залежей нефти с трещинными и трещиновато-пористыми коллекторами [4-6].

Некоторый анализ моделей движения жидкостей в ТПС можно найти в работах [4, 7]. Постановка задач для упрощенных и «усеченных» систем уравнений (3), (4) имеет ряд особенностей, этими сведениями можно ознакомиться в [7, 8].

Некоторые коэффициентные обратные задачи фильтрации жидкости в пористых и трещиновато-пористых средах решались в [9, 10, 11, 12, 13].

В этой работе используя систему уравнений (4) решается коэффициентная обратная задача по определению параметра перетока α_0. В качестве исходных данных для обратной задачи принимается решение прямой задачи в определенных точках области исследования. Следовательно, проводиться квазиреальный вычислительный эксперимент.

Постановка обратной задачи

Система уравнений фильтрации однородной жидкости в ТПС (4), называемой уравнениями Уоррена-Рута, записываем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{k_1}{\mu\beta_1^*}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_1^*}\left(p_2 - p_1\right) = 0, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} + \dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_2^*}\left(p_2 - p_1\right) = 0, \quad 0 < x < L, \ \ 0 < t \le T. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения системы уравнений (5) задается началные и граничные условия в виде

$$p_1(0,x)=p_2(0,x)=p_0,\ \ p_0=\text{const},\ \ 0\le x\le L, \tag{6}$$

$$-\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}=v_0=\text{const},\quad p_1(t,L)=p_0,\quad 0<t\le T. \tag{7}$$

Задача (5), (6), (7) соответствует прямой постановке. Для решения обратной задачи по определению α_0 необходимо задать дополнительные условия, в качестве которых используем решение задачи (5), (6), (7) при известном α_0 в заданных точках области. Пусть такая информация дается в точке $x=0$ как решение $p_1(t,0)$, которого обозначим как $z(t)$.

Обратная задача ставится следующим образом: определить коэффициент перетока α_0 из условия минимума следующего функционала

$$J(\alpha_0)=\int_0^T\left[p_1(t,0)-z(t)\right]^2dt, \tag{8}$$

где $p_1(t,0)$ - решение задачи (5) - (7) при заданном α_0.

Решение обратной задачи

Условие стационарности функционала (8) $dJ(\alpha_0)/d\alpha_0$ запишется в виде

$$\frac{dJ(\alpha_0)}{d\alpha_0}=2\int_0^T\left[p_1(t,0)-z(t)\right]w_1(t,0)dt\equiv F(\alpha_0)=0, \tag{9}$$

где $w_1=\dfrac{\partial p_1}{\partial\alpha_0}$ - функция чувствительности [14, 15] по коэффициенту α_0.

Разложим в ряд функцию p_1 в окрестности $\overset{s}{\alpha}_0$ с точностью до членов второго порядка [14]

$$\overset{s+1}{p}_1(t,x)\approx\overset{s}{p}_1(t,x)+\left(\overset{s+1}{\alpha}_0-\overset{s}{\alpha}_0\right)\overset{s}{w}_1(t,x). \tag{10}$$

где $\overset{s}{\alpha}_0$ - s-ое приблежение α_0, $\overset{s}{p}_1$, $\overset{s+1}{p}_1$ - приближения, соответствующие $\overset{s}{\alpha}_1$ и $\overset{s+1}{\alpha}_1$.

Подставляем разложение (10) в соотношение (9) получим следующие соотношение:

$$\int_0^T\left[\overset{s}{p}_1(t,0)+\left(\overset{s+1}{\alpha}_0-\overset{s}{\alpha}_0\right)\overset{s}{w}_1(t,0)-z(t)\right]\overset{s}{w}_1(t,0)dt=0,$$

из последнего выражения можно вычислить приближение α_0^{s+1}, если функции $\overset{s}{p}_1(t,0)$ и $\overset{s}{w}_1(t,0)$ известны

$$\alpha_0^{s+1}=\frac{\int_0^T\left[\alpha_0^s\overset{s}{w}_1(t,0)-\overset{s}{p}_1(t,0)+z(t)\right]\overset{s}{w}_1(t,0)dt}{\int_0^T\left[\overset{s}{w}_1(t,0)\right]^2dt}. \tag{11}$$

Дифференцировав систему уравнений (5) по коэффициенту α_0 получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial t}=\dfrac{k_1}{\mu\beta_1^*}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_1^*}(w_2-w_1)+\dfrac{1}{\mu\beta_1^*}(p_2-p_1)=0,\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+\dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_2^*}(w_2-w_1)+\dfrac{1}{\mu\beta_2^*}(p_2-p_1)=0,\quad 0<x<L,\ 0<t\le T,\end{cases} \tag{12}$$

где $w_1=\dfrac{\partial p_1}{\partial\alpha_0},\ w_2=\dfrac{\partial p_2}{\partial\alpha_0}$ - функции чувствительности [14, 15] по коэффициенту α_0.

Начальные и граничные условия для системы уравнений (12) получаются из условий (6), (7) дифференцированием по α_0:

$$w_1(0,x)=w_2(0,x)=0,\ 0\le x\le L, \tag{13}$$

$$-\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial w_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\quad w_1(t,L)=0,\quad 0<t\le T. \tag{14}$$

Численный алгоритм определения коэффициента α_0 можно построить следующим образом:

1) Выбирая начальное приближение α_0^0 (полагая $s=0$);

2) Решается задачу (5) - (7) от $t=0$ до $t=T$ и определяется функцию p_1. Вычисляется значение функционала (8). После этого решается задачу (12) - (14) от $t=0$ до $t=T$ и определяется функцию w_1;

3) По формуле (11) вычисляется приближение α_0^{s+1};

4) Повторяется этапы 2), 3) до выполнения условия

$$\frac{\left|J^{s+1}-J^s\right|}{J^s}\le\varepsilon_1,\quad \frac{\left|\alpha_0^{s+1}-\alpha_0^s\right|}{\left|\alpha_0^s\right|}\le\varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ - допустимые погрешности.

В рамках квазиреального эксперимента [16] сначала рассматривается прямая задача (5) - (7) с известным $\alpha_0^{\text{exact}} = 3{,}6 \cdot 10^{-16}$. Эта задача решается численно методом конечных разностей [17]. По результатам численных расчетов определяется сеточная функция $z^j = z\left(t_j\right),\ j = 0,1,\ldots,M.$ Кроме того, при решении обратной задачи сеточная функция $z(t)$ зашумляется случайными погрешностями [16] следующим образом:

$$z_\delta^j = z^j + 2\delta\left(\sigma^j - \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

где σ^j - случайная функция, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$, δ - уровень погрешности.

Для численного решения задачи (5) - (7) использованы следующие исходные значения параметров: $T = 2000$ с, $L = 60$ м, $k_1 = 1 \cdot 10^{-12}$ м^2, $p_0 = 10$ МПа, $\mu = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ МПа·с, $\beta_2^* = 1 \cdot 10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $v_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с. График $z_\delta(t)$ представлен на рис.1.

Разностные задачи

Задачи (5) - (7), (12) - (14) при $\alpha_0 = \alpha_0^s$ решаются численно с помощью метода конечных разностей [17]. В области $D = \left\{0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\right\}$ введем равномерную сетку

$$\Omega_{h\tau} = \left\{\left(x_i, t_j\right),\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N,\ h = L/N,\ t_j = j\tau,\ j = 0,1,\ldots,M,\ \tau = T/M\right\},$$

где h - шаг сетки по координате x, τ - шаг сетки по времени t. Вводим обозначения $p1_i^j = p_1\left(t_j, x_i\right)$, $p2_i^j = p_2\left(t_j, x_i\right)$, $w1_i^j = w_1\left(t_j, x_i\right)$, $w2_i^j = w_2\left(t_j, x_i\right)$, $\omega1_i^j = \omega_1\left(t_j, x_i\right)$, $\omega2_i^j = \omega_2\left(t_j, x_i\right)$.

Для разностной аппроксимации задачи (5) - (7) используем чисто неявную разностную схему:

$$\frac{p1_i^{j+1} - p1_i^j}{\tau} = \chi\,\Lambda p1_i^{j+1} + \frac{\alpha_0^s}{\mu\beta_2^*}\left(p2_i^j - p1_i^{j+1}\right) = 0,$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1,\quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$\frac{p2_i^{j+1} - p2_i^j}{\tau} + \frac{\alpha_0^s}{\mu\beta_2^*}\left(p2_i^{j+1} - p1_i^{j+1}\right) = 0,\ i = 0,1,\ldots,N,\quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

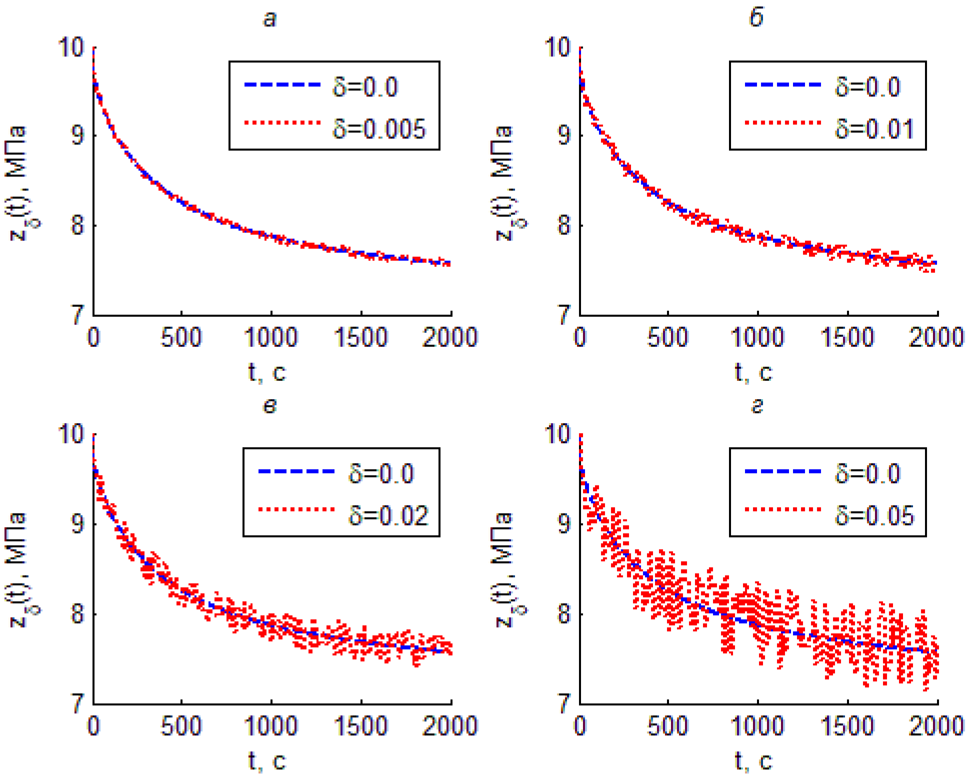

Рис.1. График функции $z_\delta(t)$

$$p1_i^0 = p_0, \quad p2_i^0 = p_0, \quad i = 0,1,\dots,N,$$

$$-\frac{k_1}{\mu}\frac{p1_0^{j+1} - p1_1^{j+1}}{h} = v_0, \quad p1_N^{j+1} = p_0, \quad j = 0,1,\dots,M-1, \tag{16}$$

где

$$\Lambda p1_i^j = \frac{1}{h^2}\left(p1_{i-1}^j - 2p1_i^j + p1_{i+1}^j\right), \quad \chi = \frac{k_1}{\mu\beta_2^*}.$$

Функционал (8) после аппроксимации принимает вид

$$J = \sum_{j=0}^{M-1} \tau\left(p1_0^{j+1} - z^{j+1}\right)^2, \quad z^j = z\left(t_j\right).$$

Аналогично аппроксимируем задачу (12) - (14)

$$\frac{w1_i^{j+1} - w1_i^j}{\tau} = \chi\,\Lambda w1_i^{j+1} + \frac{\alpha_0^s}{\mu\beta_2^*}\left(w2_i^j - w1_i^{j+1}\right) + \frac{1}{\mu\beta_2^*}\left(p2_i^{j+1} - p1_i^{j+1}\right) = 0,$$

$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad j = 0,1,\dots,M-1,$$

$$\frac{w2_i^{j+1} - w2_i^j}{\tau} + \frac{\alpha_0^s}{\mu\beta_2^*}\left(w2_i^{j+1} - w1_i^{j+1}\right) + \frac{1}{\mu\beta_2^*}\left(p2_i^{j+1} - p1_i^{j+1}\right) = 0,$$

$$i=0,1,...,N,\quad j=0,1,...,M-1,$$
$$w1_i^0=0,\ \ w2_i^0=0,\ \ i=0,1,...,N,$$
$$-\frac{k_1}{\mu}\frac{w1_0^{j+1}-w1_1^{j+1}}{h}=0,\ \ w1_N^{j+1}=0,\quad j=0,1,...,M-1. \qquad (17)$$

После аппроксимации приближение α_0^{s+1} (11) вычисляется следующим образом

$$\alpha_0^{s+1}=\frac{\sum_{j=0}^{M-1}\left[\alpha_0^s w1_0^{j+1}-p1_0^{j+1}+z^{j+1}\right]w1_0^{j+1}}{\sum_{j=0}^{M-1}\left[w1_0^{j+1}\right]^2}.$$

Системы разностных уравнений (16), (17) решаются методом прогонки [17], и находятся разностные решения $p1_i^j$, $p2_i^j$, $w1_i^j$, $w2_i^j$.

Результаты численных расчетов

Сетка разбивала координатный отрезок $[0,60]$ на 120 интервалов, временный отрезок $[0,2000]$ - на 4000 интервалов. «Данные измерения» z_δ^j (15) подготовлены на основе этого решения в 200 точках «время». Результаты расчетов восстановления коэффициента α_0 с невозмущенными исходными данными при различных начальных приближениях представлены на Рис. 2-3.

В случае, когда начальное приближение до три раза больше (или четыре раза меньше) чем точное значение искомого коэффициента, для восстановления параметра α_0 достаточно 5-7 итераций (Рис.2.а., Рис.2.б.). В случае, когда начальное приближение в 3-5 раза больше чем точное значение искомого коэффициента, требуется 10-23 итераций (Рис.2.в., Рис.2.г.). А в случае, когда начальное приближение от пяти до шести раза больше чем точное значение искомого коэффициента, требуется 28-75 итераций (Рис.3.а., Рис.3.б.). Чем больше начальное приближение удаляется от точки равновесия, требуется тем большее число итерации.

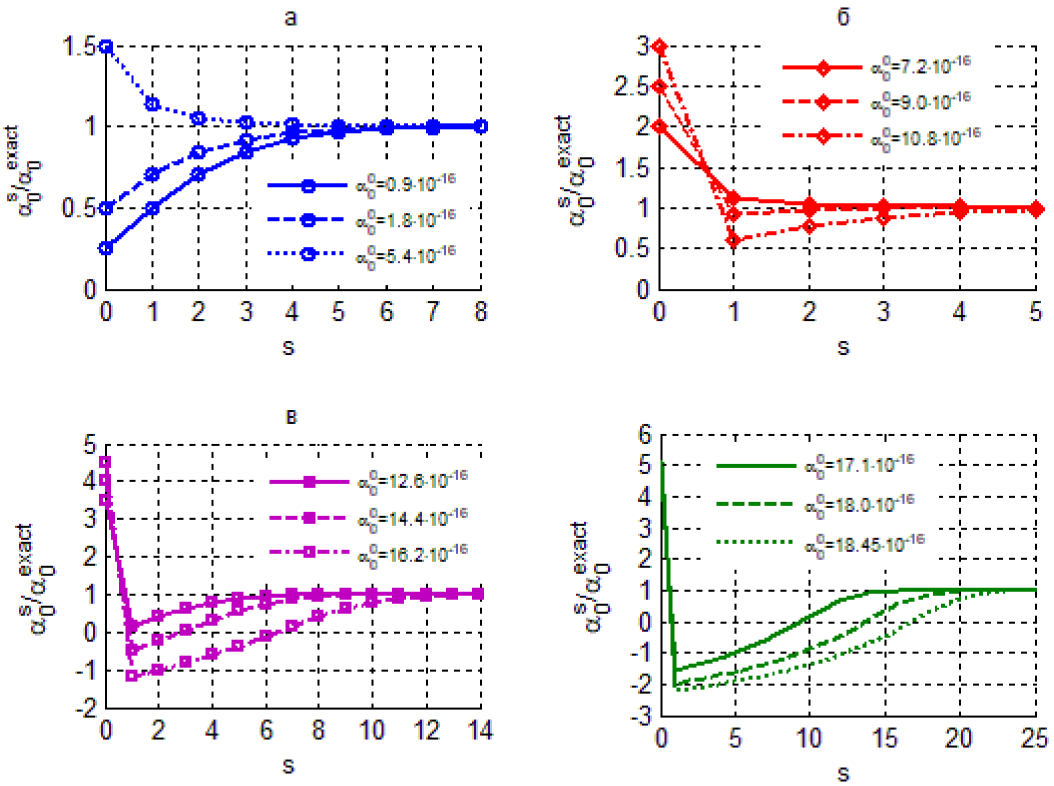

Рис. 2. Восстановление коэффициента α_0 с невозмущенными исходными данными (при $\delta = 0$), α_0^{exact} - использованное при подготовке исходных данных значение параметра α_0 .

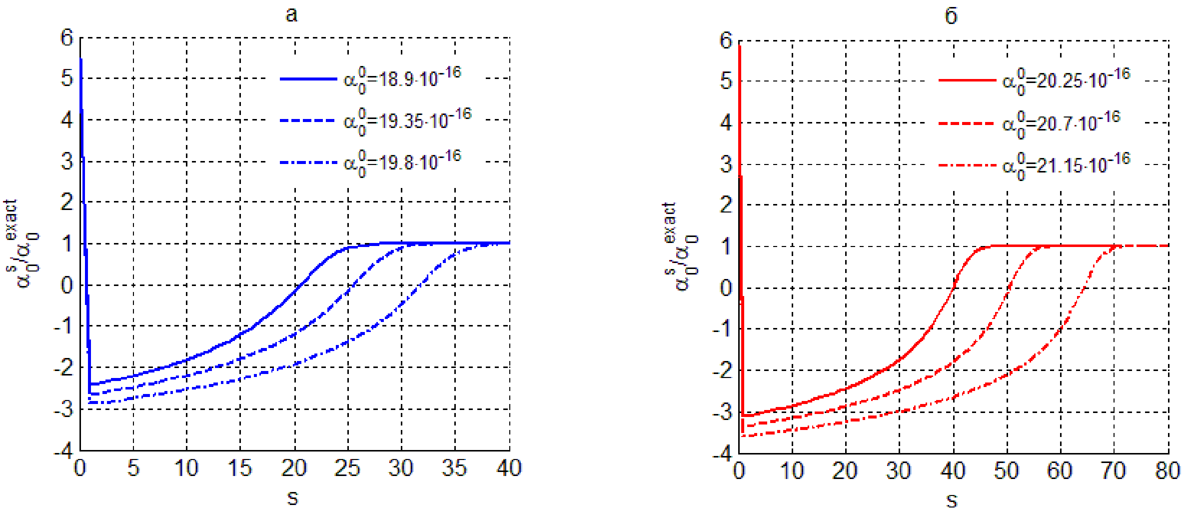

Рис. 3. Восстановление коэффициента α_0 с невозмущенными исходными данными (при $\delta = 0$), α_0^{exact} - как на Рис. 2.

Результаты расчетов с возмущенными исходными данными представлены в табл. 1. Численные расчеты проведены с начальным приближением $\alpha_0^0 = 7{,}2 \cdot 10^{-16}$. Относительные погрешности восстановления коэффициента α_0 изменяется в пределах 0,000028 % до 7,912444 %. Как видно из табл. 1

относительная погрешность определения α_0 с увеличением погрешности исходных данных увеличивается.

Таблица 1.

Восстановление коэффициента α_0 с возмущенными исходными данными

δ	$\alpha_0^0 = 7,2 \cdot 10^{-16}$		
	s	α_0^s, с	Относительная погрешность $\frac{\left\|\alpha_0 - \alpha_0^{exact}\right\|}{\alpha_0^{exact}} \cdot 100$, %
0,0	28	$3,599999 \cdot 10^{-16}$	0,000028
0,005	23	$3,589153 \cdot 10^{-16}$	0,301306
0,01	22	$3,450903 \cdot 10^{-16}$	4,141583
0,02	24	$3,405337 \cdot 10^{-16}$	5,407306
0,05	18	$3,884848 \cdot 10^{-16}$	7,912444

Заключение

В данной работе рассмотрена обратная коэффициентная задача фильтрации однородной жидкости для модели Уоррена-Рута в трещиновато-пористых средах. Искомым параметрам коэффициент перетока находится из решения обратной задачи.

Для того чтобы подготовить дополнительную информацию для решения обратной задачи рассматривалась соответствующая прямая задача с известным значением коэффициента перетока. Таким образом подготавливается «исходные данные» для решения обратной задачи. Проводились также расчеты с возмущенными исходными данными, которые подготовлены путем зашумления данных случайными погрешностями.

Для решения обратной задачи использован метод идентификации первого порядка. Метод идентификации основан путем минимизации функционала невязки. Минимум функционала определяется из условия стационарности по искомому коэффициенту. Результаты расчетов показывают, что если в итерационном процессе начальные приближения близки к точке равновесия, коэффициент перетока восстанавливается достаточно быстро. При удалением начальные приближения от точки равновесия, при восстановление коэффициента перетока требуется больше итераций.

Использованная литература

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ДАН СССР. – 1960. – Т. 132, - №3. – С. 545-548.

2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 852-864.

3. Warren, J.E. and Root, P.J. The behavior of naturally fractured reservoirs // Soc. Petrol. Eng.J. 1963, Sept., - P. 245-255.

4. Van Golf-Racht, T.D., Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Developments in Petroleum Science, Elsevier Scientific, Amsterdam, Oxford, New York. 1982. – 365 p.

5. Майдебор В.Н. Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. – М.: Недра, 1980. – 288 с.

6. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. – М.: Недра, 1980. – 223 с.

7. Chen Z.-X. Transient flow of slightly compressible fluids through double-porosity, double-permeability systems // Transport in Porous Media. 1989. Vol. 4. P. 147-184.

8. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhic V.M. Theory of Fluid Flows through Natural Rocks. London, 1990.

9. Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 172 с.

10. Khairullin M.H, Abdullin A.I., Morozov P.E., Shamsiev M.N. The numerical solution of the inverse problem for the deformable porous fractured reservoir // Matem. Mod. – 2008. Vol. 20. № 11, – P. 35–40.

11. Khuzhayorov B., Kholiyarov E. Inverse problems of elastoplastic filtration of liquid in a porous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. Vol. 8. № 3. – P. 517-525.

12. Khuzhayorov B., Ali Md. F., Sulaymonov F., Kholiyarov E. Inverse coefficient problem for mass transfer in two-zone cylindrical porous medium // AIP Conference Proceedings. – 2016. Vol. 1739. 020028.

13. Нармурадов Ч.Б., Холияров Э.Ч., Гуломкодиров К.А. Численное моделирование обратной задачи релаксационной фильтрации одно однородной жидкости в пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – №2. – С. 12-19.

14. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. – 161 с.

15. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

16. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin: Walter de Gruyter, 2007. – 438 p.

17. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука. 1989. – 616 с.

18. E. Ch. Kholiyarov, M. Y. Ernazarov, O. A. Jurayev, et al. Coefficient inverse problem for a simplified model of filtration of a homogeneous fluid in fractured-porous medium // INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACTUAL PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS - APAM-2021. AIP Conference Proceedings 2637, 040021 (2022); https://doi.org/10.1063/5.0118543