Haqiqiy AW*-faktorlarning tuzilishi

Gulrux Rustam qizi Sayliyeva
Savriniso Alisherovna Sharipova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada haqiqiy C*-algebralari va haqiqiy W*-algebralari nazariyasi doirasida haqiqiy AW*-algebralari o‘rganilgan. Haqiqiy AW*-algebralar tushunchasi kiritilgan. Abel haqiqiy AW*-algebralarining ayrim xossalarini isbotlangan va haqiqiy AW*-algebralarning ayrim aniq misollarini muhokama qilingan. Haqiqiy AW*-algebralar va kompleks AW*-algebralar orasidagi farqlar va ularning murakkabligini tadqiq qilingan. Agar haqiqiy C*-algebraning kompleks $A+iA$-algebrasi AW*-ning kompleks $A+iA$-algebrasi bo‘lsa, u holda A ning o‘zi haqiqiy A ning haqiqiy C*-algebrasi ekanligini isbotlangan.

Kalit so‘zlar: C*-algebra, W*-algebra, AW*-algebra, $A+iA$-algebra

Structure of real AW*-factors

Gulrukh Rustam kizi Sayliyeva
Savriniso Alisherovna Sharipova
Bukhara State University

Abstract: This article explores real Aw*-algebras within the theory of real C*-algebras and real W*-algebras. The concept of real aw*-algebras is introduced. Abel proved some properties of real Aw*-algebras, and some specific examples of real aw*-algebras have been discussed. The differences between Real Aw*-algebras and complex Aw*-algebras and their complexity have been researched. If the complex-algebra of a real C*- algebra is a complex-algebra of AW*, then it has been proven that a itself is a real C*- algebra of Real A.

Keywords: C* - algebra, W*-algebra, aw*-algebra,- algebra

A haqiqiy C*-algebra va $M = A+iA$ unung kompleks algebrasi bo‘lsin. U holda *M* murakkab C*-algebra va oldingi paragrafda ko‘rganimizdek, agar *A* haqiqiy AW*-algebra bo’lsa, ma’lumki, *M* (kompleks) AW*-algebradir. Keling, teskari muammosini ko‘rib chiqaylik, agar $M = A+iA$ AW*-algebra bo‘lsa, u holda *A* albatta haqiqiy AW*-algebra bo‘ladimi? Quyidagi tasdiq bu muammoga ijobiy javob beradi.

(cc) BY

1-tasdiq A haqiqiy C*-algebra bo‘lsin va $M = A + iA$ uning kompleks algebrasi bo‘lsin. Faraz qilaylik, M AW*-algebra. U holda A haqiqiy AW*-algebra.

Isbot. Bizga ma’lumki, A qo‘shma chiziqli *-automorfismlarning fiksirlangan nuqtasi to‘plami bilan ustma-ust tushadi, ya’ni $"-": x+iy \mapsto x-iy$ M, bu yerda $x, y \in A$, ya’ni

$$A = \{a \in M : \bar{a} = a\}.$$

Agar S - A ning bo‘sh bo‘lmagan to‘plami bo‘lsa, u holda unung o‘ng yo‘qotuvchisi (M bo‘yicha), u holda

$$R_M(S) = \{a \in M \mid sa = 0 \ for \ all \ s \in S\}$$

va

$$a \in R_M(S) \Leftrightarrow sa = 0, \forall s \in S \Leftrightarrow \overline{sa} = \bar{s}\,\bar{a} = s\bar{a} = 0, \forall s \in S,$$

bo‘ladi. Chunki $\bar{s} = s \in A$. Bu shuni anglatadiki $a \in R_M(S)$ bo‘ladi, faqat va faqat shundaki, agar $\bar{a} \in R_M(S)$ bo’lsa.

Faraz qilamiz, M - AW*-algebra, u holda $R_M(S) = gM$ ga mos $g \in M$ proyektor mavjud. Yuqorida aytilgan fikrlardan, $g \in R_M(S)$ kelib chiqadi va $\bar{g} \in R_M(S)$. Shuning uchun $\bar{g}$ - proektor va $\bar{g} \in gM$ doim o‘rinli, ya’ni $\bar{g} = g\bar{g}$. Shunday qilib,

$$(\bar{g})^* = (g\bar{g})^* = (\bar{g})^* g^* = \bar{g}g = \bar{g} = g\bar{g} \text{ т.ye. } g = \bar{\bar{g}} = \overline{g\bar{g}} = \bar{g}g = \bar{g}.$$

Bu shuni anglatadiki $g \in A$. U holda

$$R_M(S) = R_M(S) \cap A = gM \cap A = gA,$$

ya’ni A - haqiqiy AW*-algebra.

1-natija A Abel C*-algebra bo‘lsin, ya’ni $A \cong C_0(\Omega, -)$, bu yerda Ω-A ning spektral fazosi. Agar Ω Stonean fazo (ya’ni ajralgan kompakt fazo) bo‘lsa, u holda A-AW∗-algebra bo‘ladi.

Isbot. $A \cong C_0(\Omega, -)$ Abel haqiqiy C*-algebra kompleks $A + iA$ algebra $C_0(\Omega) = C(\Omega)$ bilan bir vaqtda mos keladi, bundan Ω - kompakt. U holda [1] $C(\Omega)$ - AW*-algebra bo‘ladi va 1-tasdiqqa ko‘ra $A = C_0(\Omega, -) = C(\Omega, -)$ haqiqiy AW*-algebra bo‘ladi.

Endi 1-tasdiqqa murojaat etib, haqiqiy AW*-algebra bo‘lmagan AW*-faktorni quramiz.

1-misol. 1-misoldagi (kompleks) AW*-faktorni ko‘rib chiqing. W*-faktor holatiga o‘xshash (ya’ni ergodik avtomorfizmi bilan Abel W*-algebrasining chalishtirma ko‘paytmasi) 2-davr bilan *-antiavtomorfizm mavjud ekanligini ko‘rsatish qiyin emas $M(Z, G)$ U holda

(cc) BY

$$A=\left\{a\in M\left(Z,G\right):\alpha(a)=a^*\right\}=A\left(Z,G\right)$$

to‘plam haqiqiy C*-algebra va $M=A+iA=M\left(Z,G\right).$ Shunisi aniqki, "–" operatsiya M da $\bar{a}=\alpha(a^*),\ a\in M$ ga mos keladi. Ma’lumki, 1-tasdiqdan boshlab M - AW*-faktor va birinchi bobdan boshlab A - haqiqiy W*-faktorni tashkil etadi.

Yuqoridagi fikrdan quyidagi natijani olamiz.

2 - tasdiq. Haqiqiy W*-faktor bo‘lmagan haqiqiy AW*-faktor mavjud.

Yuqoridagi tasdiqni quyidagi umumiyroq alohida holat sifatida ko‘rib chiqish mumkin. W*-algebralar uchun ma’lumki ([2] ga qarang) berilgan haqiqiy A-W*-algebralar va uning kompleks $A+iA$ algebralari, bu algebralarning tiplari mos keladi. Endi umumiy Baer *-halqa tiplariga ajralishi asosida [3, 15-paragraf, 3-teorema] va shu tariqa haqiqiy va kompleks AW*-algebralar quyidagi tasdiqda berilgan qonuniyatlarni shakllantirish tabiiy [1-2].

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, AW*-algebra W*-algebra bo‘lishi shart emas. (2-misolga qarang). Ba’zi bir ishlar esa shu masalani yechimini topishga bag‘ishlangan. Xususan, J. Dixmier [4] yilda Abel AW*-algebra bo‘lishi uchun W*-algebra bo‘lishi kerakligini isbot qildi. Ushbu muammoning eng umumiy natijasi G. Pedersen [5] ga tegishli bo‘lib, u shuni isbotladiki, AW*-algebra W*-algebra bo‘lishi uchun qo‘shimcha izning ajratuvchi oilasiga ega bo‘lishi kerak. Quyidagi Pedersen teoremasining haqiqiy analogi bo‘lgan haqiqiy AW*-algebraning haqiqiy W*-algebra bo‘lishi uchun bitta teoremani keltiramiz [3-7].

1-teorema. Haqiqiy AW*-algebra A haqiqiy W*-algebra bo‘ladi, faqat va faqat shundaki, agar

(i) A normal izlarning ajratuvchilar oilasiga ega;

(ii) uning kompleks $M=A+iA$ algebrasi AW*-algebradan iborat bo‘lsa.

Isbot. Zarurligi aniq, ya’ni agar A - haqiqiy W*-algebra bo‘lsa, u holda $M=A+iA$ - (kompleks) W*-algebra bo‘ladi [2]. Shuning uchun M - AW*-algebra bo‘ladi va oddiy izlarning ajratuvchilar oilasiga ega bo‘ladi. A dagi cheklovlar normal izlarning ajralib turadigan oilasini A ga beradi.

Yetarliligi. $M=A+iA$ - AW*-algebra va A da normal izlarning ajralib turadigan oilasi mavjud, biz uni $\left\{f_\gamma\right\}$ ko’rinishida belgilab olamiz, ya’ni ixtiyoriy $a\in A,\ a\geq 0,\ a\neq 0$ uchun $f\in\left\{f_\gamma\right\}$, $f(a)=0$ mavjud.

Biz faraz qilgan edikki, $\alpha(x)=a^*+ib^*,\quad x\in a+ib\in M,\quad a,b\in A.$ To‘g‘ridan to‘gri hisoblashlar shuni ko‘rsatadiki, α - M da involyutiv (ya’ni, 2 davr bilan) *-antiavtomorfizm va $A=\left\{a\in M:\alpha(a)=a^*\right\}.$

(cc) BY

f_γ da kengaytmani va M da chiziqlilikni f_γ^0 orqali belgilaymiz va $\{f_\gamma^0\}$ shu oilani M da normal izlarning ajralib turadigan oilasi ekanligini ko‘rsatamiz.

$x = a + ib \in M_s = \{x \in M : x^* = x\}$ bo‘lganligidan, $a^* = a,\, b^* = -b$ ga ega bo‘lamiz. f_γ - ermit oilasi ekanligidan, biz quyidagiga

$$f_\gamma^0(x) = f_\gamma(a) + if_\gamma(b) = f_\gamma(a),$$

ega bo‘lamiz, ya’ni $f_\gamma(b) = 0$. Shunday qilib, $x \in M_s$ uchun

$$f_\gamma^0(x) = \frac{1}{2} f_\gamma(x + \alpha(x)),$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ya’ni $x + \alpha(x) \in A,\; x + \alpha(x) = 2a.$

Agar $x \geq 0$, u holda $\alpha(x) \geq 0$, ya’niki α - *-antiavtomorfizm. Shuning uchun, $x + \alpha(x) \geq 0,$ ya’ni, $x + \alpha(x) \in A^+$ va $f_\gamma^0(x) = \frac{1}{2} f_\gamma(x + \alpha(x)) \geq 0$, ya’ni f_γ^0 dagi hamma funksionallar M da musbat aniqlangan. Bundan tashqari, bizda shunday $f_\gamma^0(1) = f_\gamma(1) = 1$ tenglik borki, ya’ni $\{f_\gamma^0\}$ - M da izlar oilasidir.

Ehdi har bir f_γ^0 izning normal ekanligini ko‘rsatamiz. Agar $\{x_\nu\} \subset M$ ixtiyoriy tarmoq $x_\nu \square\ 0$ bo‘lsa, u holda α - M tartibli izomorfizn ekanligidan, $\alpha(x_\nu) \square\ 0$ va $x_\nu + \alpha(x_\nu) \square\ 0$ $x_\nu + \alpha(x_\nu) \in A^+$ ega bo‘lamiz. f_γ - normal ekanligidan, quyidagiga

$$f_\gamma^0(x_\nu) = \frac{1}{2} f_\gamma(x_\nu + \alpha(x_\nu)) \to 0,$$

ega bo‘lamiz, ya’ni hamma f_γ^0 funksionallar M da normaldir.

Vanihoyat, $x \in M,\, x \geq 0$ va $f_\gamma^0(x) = 0$ hamma γ lar uchun mavjud. U holda $x + \alpha(x) \in A^+$ va $\{f_\gamma\}$ - izlarning ajralib turadigan oilasi, bundan $x + \alpha(x) = 0$. Shuning uchun

$$x = -\alpha(x) \in M^+ \cap (-M^+) = \{0\},$$

ya’ni $x = 0$. Shunday qilib, M - AW*-algebra $\{f_\gamma^0\}$ da normal izlarning ajralib turadigan oilasi. Pedersen [39] teoremasidan M - W*-algebradir. Shuning uchun, [2, 6-bob]) dan A - haqiqiy W*-algebra.

1-izoh. Kompleks holdan farqli ravishda (i) shart haqiqiy AW*-algebraning A haqiqiy W*-algebra bo‘lishi uchun yetarli emas. Aslida yuqorida qaralgan misollarda B va E haqiqiy AW*-algebralari normal izlarning ajratuvchi oilalariga ega, chunki B_s va E_s haqiqiy Abel W*-algebralaridir. Lekin B va E lar haqiqiy W*-algebralar emas,

(cc) BY

chunki ularning $B+iB$ va $E+iE$ kompleks AW*-algebralari ham W*-algebralar emas.

2-izoh. (ii) shart ham haqiqiy AW*-algebraning *A* haqiqiy W*-algebra bo‘lishi uchun yetarli emas. 1 va 2-misollardagi haqiqiy AW*-algebralar haqiqiy AW*-algebralar emas, balki ularning (kompleks) AW*-algebralardir [6-11].

Xulosa qilib aytganda, bu teoremani umumlashmasi qiziqarli bo‘lishi kerak, deb 1-teorema va Pedersenning teoremasining haqiqiy holda analogini olish mumkin.

M - (kompleks) AW*-faktor, α - esa unung involyutiv *-antiavtomorfizmi. U holda, yuqorida aytilganidek $A=\{\alpha\in M:\alpha(a)=a^*\}$ to‘plam haqiqiy C*-algebradir va 1-tasdiqdan *A* - haqiqiy AW*-faktor. Ma’lumki, ikki haqiqiy W*-algebralar, xuddi shu narsani yaratadigan (kompleks) W*-algebralar izomorf bo‘ladi faqat va faqat shundaki, agar ularga mos involyutiv *- antiavtomorfizmlar o‘zaro qo‘shma bo‘ladi. Xuddi shunday natijalar ham haqiqiy AW*-algebralar uchun ham amal qiladi:

2-tasdiq. α va β - M - AW* - (kompleks) faktorning involyutiv *-antiavtomorfizmi bo‘lsin. U holda haqiqiy AW*-faktorlar

$$A=\{x\in M:\alpha(x)=x^*\} \text{ и } B=\{x\in M:\beta(x)=x^*\}$$

haqiqiy *-izomorfdir, faqat va faqat shundaki, agar α va β involyutiv *-antiavtomorfizmlar o‘zaro qo‘shma bo‘lsa, ya’ni $\beta=\theta\alpha\theta^{-1}$ - M - AW*-faktorga mos *-avtomorfizmdir.

Isbot. *A* va *B* - haqiqiy *-izomorf $\theta_0:A\mapsto B$ *-izomorf bilan. U holda θ_0 tabiiy ravishda (kompleks) *-θ izomorfizmiga ularning kompleks $A+iA$, $B+iB$ ko‘rinishiga keltirish mumkin va ikkalasi ham *M* bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun θ - *M* ning *-avtomorfizmi va $\theta(A)=B$, ya’ni $\alpha(x)=x^*$ faqat va faqat shundaki, agar $\beta(\theta(x))=(\theta(x))^*=\theta x^*$. Shunday qilib, $x\in A$ uchun

$$\beta(\theta(x))=(\theta(x))^*=\theta(x^*)=\theta\alpha(x) \text{ , т.ye. } \beta=\theta\alpha\theta^{-1}\alpha(x),$$

ga ega bo‘lamiz. $\theta^{-1}\beta^{-1}\theta\alpha$ - *M* ning *-avtomorfizm ekanligidan, A har qanday haqiqiy *-avtomorfizm bilan bir xil bo‘ladi va albatta *M* dagi kompleks *-avtomorfizmgacha uzaytirilishi mumkin. Bundan kelib chiqadiki, $\theta^{-1}\beta^{-1}\theta\alpha=id$ va *M* ning hamma yerida o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $\theta\alpha=\beta\theta$ va $\beta=\theta\alpha\theta^{-1}$, ya’ni α va β o‘zaro qo‘shma.

Teskarisi, agar α va β o‘zaro qo‘shma bo‘lsa, ya’ni $\beta=\theta\alpha\theta^{-1}$ *M* dagi mos θ kompleks * - avtomorfizm uchun, u holda $\theta\alpha=\beta\theta$ bo‘ladi va faqat va faqat shundaki, agar $\beta(\theta(x))=\theta x^*=(\theta x)^*$, $\alpha(x)=x^*$, ya’ni $\theta(A)=B$. Shuning uchun θ *A*

(cc) BY

ning hamma yerida chegaralangan, *A* va *B* - AW*-faktorlar orasida kerakli *-izomorfizmni beradi [4-8].

Shuning uchun haqiqiy W*-algebralar holatiga oʻxshash haqiqiy AW*-faktorni izomorfizmgacha klassifikasiyalash muammosini keltirib chiqaradi (kompleks algebra sifatida) va shu kompleks AW*-faktorni vujudga keltiradi.

Shu oʻrinda aytish joizki, ushbu mavzuni ilgʻor pedagogik texnologiyalar asosida talabalarga oʻtish ijobiy samara beradi [12-16].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Giordano T. Antiautomorphismes involutifs des factors de von Neumann injectifs. II, J.Funct. Anal. 1983. 51. pp. 326-360.

2. Li Bing-Ren. Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003. 241p.

3. Berberian S.K. Baer *-rings. Springer-Verlag, BerlinHeidelbergN.Y. 1972.

4. Dixmier J. Sur certains espaces consid.er.es par M. H. Stone. Summa. Bull. London Math. Soc. 1972, 4, pp. 171-175.

5. Pedersen G. Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras.

6. Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. (2020). Analysis of the spectrum of a 2x2 operator matrix. Discrete spectrum asymptotics. Nanosystems: Phys., Chem., Math., 2(11), 138-144.

7. Расулов Т.Х., Бахронов Б.И. (2015). О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. Молодой учёный. № 9, С. 17-20.

8. Тошева Н.А., Исмоилова Д.Э. (2021). Икки каналли молекуляр-резонанс модели хос қийматларининг мавжудлиги. Scientific progress. 2:1, 111-120.

9. Rasulov T.H., Tosheva N.A. (2019). Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices.

10. Латипов Ҳ.М., Ҳайитова М.А. (2021). Компакт тўпламда узлуксиз функция хоссалари ёрдамида ечиладиган айрим масалалар. Scientific progress. 2:3, 77-85-betlar.

11. Sayliyeva G.R., Sharipova S.A. (2022), Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanida «Daraxt koʻrki» va «Talaba hayoti va ehtimolliklar». Образование и наука в XXI веке. Центр научных публикаций (buxdu. uz). 8 (8), 25(4), 1493-1502.

12. Sayliyeva G., Sharipov I. Kompleks sonlar mavzusini o'qitishda "bumerang" texnologiyasi, Образование и наука в XXI веке. 25(4).

13. Сайлиева Г.Р. (2022), Использование метода «Определения, теоремы, дока-зательства, формулы, примера». Образование и наука в XXI веке, Центр научных публикаций (buxdu. uz). 8 (8), 25(4), 1569-1579 с.

(cc) BY

14. Sayliyeva G.R., Yahyoyeva Sh.M. (2022). Interfaol usullarni qo‘llab funksiyaning differensiali va uni taqribiy hisoblashga doir misollar yechish. Образование и наука в XXI веке. Центр научных публикаций (buxdu. uz) 8 (8). 25(4), 1580-1590.

15. Сайлиева Г.Р. (2021). Использование новых педагогических технологий в обучении «Аналитическая геометрия». Вестник науки и образования. 68-71.

16. Сайлиева Г.Р. Использование метода «математический рынок» в организации практических занятий по «дискретной математике», Проблемы педагогики. 53(2), 27-30.

(cc) BY