Funksiyaning uzluksizligini o’qitishning zamonaviy usullari haqida

Moxinur Baxrom qizi Baxodurova
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada funksiyaning uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, monoton funksiyaning uzilish nuqtasining tasnifini topish va ta’rifini o’quvchilarga soddaroq tushuntirish yo’llari bayon qilingan. Funksiya uzluksizligini Geyne va Koshi ta’riflari keltirilgan. Yangi o’rganilgan materiallarni mustahkamlash uchun savollar (kartochka shaklida) va testlar keltirilgan.

Kalit so’zlar: to‘plam, nuqta, segment, o‘ng va chap limitlar, orttirma, birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari

About modern methods of training continuity of function

Mohinur Bakhrom kizi Bakhodurova
Bukhara State University

Abstract: In this article, in a simpler form, readers are explained how to find the classification of the continuity of a function, determine the discontinuity of a function, and the discontinuity point of a monotonic function. The Heine and Cauchy definitions of continuity of a function are given. To consolidate the studied material, questions (in the form of cards) and tests are provided.

Keywords: set, point, segment, right and left limits, increment, discontinuity points of the first and second type

KIRISH

Oliy o‘quv yurtlarida matematik analiz fanida funksiyaning uzluksizligi, uzilish nuqtalari, monoton funsiyalar va ularning uzluksizligi haqida mavzu o‘qitiladi [1-4]. Mavzuni o‘zlashtirishda talabalar bir qator qiyinchilikka uchraydilar. Shuning uchun ushbu maqolada mavzuning soddalashtirilgan matnini keltirishga harakat qilamiz.

Odatda dars jarayonida mavzuga tegishli bo‘lgan asosiy elementlar aytib o‘tiladi. Bu o‘z navbatida talabalarga qiyinchiliklar keltirib chiqaradi. Chunki shu vaqtga qadar talabalar abiturietlik vaqtlarida o‘qishga kirish uchun tayyorlanganlarida, asosan misol va masalalarni yechishda uning javobini topishga harakat qilishadi, lekin uning kelib chiqish mohiyatiga e'tibor qaratishmaydi. Natijada masalaning mohiyati gapirilganda uni anglab olishda talabalar qiynalishadi. Shu sababli, ushbu mavzuni talabalar osonroq tushunishlari uchun uni o‘qishga kirish vaqtida tayyorlanganliklaridagi muhitdan kelib chiqib tushuntirishga harakat qilindi.

ASOSIY QISM

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ (1)$$

bo‘lsa, $f\ (x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Demak, $f\ (x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ushbu

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ning mavjudligi;

- va uni $f(x_0)$ bo‘lishi shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Misol 1. Ushbu

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

Misol 2. Ushbu

$$f(x) = (signx)^2 = \begin{cases} 1, agar\ x \neq 0\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x = 0\ bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani qaraylik.

Ravshanki, $\forall x_0 \in R$ nuqtada, ya’ni $x_0 \neq 0$ da $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ bo‘ladi. Demak, qaralayotgan funksiya $\forall x_0 \in R,\ x_0 \neq 0$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Ammo $f(0) = 0$ bo‘lganligi sababli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(0)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz bo‘lmaydi.

Funksiya limitining Geyne va Koshi ta’riflariga binoan funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ta’riflash mumkin.

2-ta’rif (Geyne). Agar $n \to \infty$ da $x_n \to x_0 (x_n \in X, n = 1,2, \dots)$ bo‘ladigan ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to f(x_0)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

*3-ta’rif (*Kosh). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Odatda, $x - x_0$ ayirma argument orttirmasi, $f(x) - f(x_0)$ esa funksiya orttirmasi deyilib, ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Unda funksiya uzluksizligining 1-ta’rifidagi (1) munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \; (2)$$

ko‘rinishga keladi.

Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta’rifi sifatida qarash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqta X to‘plamning o‘ng (chap) limit nuqtasi bo‘lsin.

4-ta’rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \; (\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz bo‘lganda funksiyaning o‘ng (chap) limiti uning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo‘ladi:

$$f(x_0+0) = f(x_0) \; (f(x_0-0) = f(x_0).$$

Keltirilgan ta’riflardan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham o‘ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo‘lishini topamiz.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham unga ko‘ra shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \Longrightarrow f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$

bo‘lishini bildiradi.

5-ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.

6-ta’rif. $X \subset R$ to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalardan iborat to‘plam uzluksiz funksiyalar to‘plami deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x) \in C[a,b]$ bo‘lishi, $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentining har bir nuqtasida uzluksiz, ya’ni $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz, a nuqtada o‘ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo‘lishini bildiradi.

Misol 3. $f(x) = sinx$ bo‘lsin. U holda $f(x) \in C(R)$ bo‘ladi.

Yechish. $x_0 \in R$ nuqtani olib, $\forall \varepsilon > 0$ ga ko‘ra $\delta = \varepsilon$ deymiz. Unda $\forall x, |x - x_0| < \delta$:

$$|sin\, x - sinx_0| = 2\left|cos\frac{x+x_0}{2} \cdot sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash $f(x) = cosx$ funksiya R da, $f(x) = tgx$ va $f(x) = ctgx$ funksiyalarning esa o‘z aniqlanish to‘plamlarida uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Misol 4. $f(x) = a^x, a > 0$ bo‘lsin. U holda $f(x) \in C(R)$bo‘ladi.

Yechish. Ravshanki,

$$\lim_{x-x_0 \to 0} (a^{x-x_0} - 1) = 0.$$

Unda

$$0 = \lim_{x-x_0\to 0}(a^{x-x_0}-1) \Leftrightarrow \lim_{x-x_0\to 0} a^{x_0}(a^{x-x_0}-a^{x_0}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^{x}-a^{x_0}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} a^{x} = a^{x_0}$$

bo‘ladi.

Misol 5. Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} -1, agarx < 0\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x = 0\ bo'lsa, \\ 1, agar\ x > 0\ bo'lsa, \end{cases}$$

bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$f(+0) = 1, f(-0) = -1$$

bo‘lib, berilgan funksiya $X = R\ \{0\}$ to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

Funksiyaning uzilishi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ bo‘lsin. Ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap limitlari

$$f(x_0+0), f(x_0-0)\ (3)$$

mavjud bo‘lib,

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)\ (4)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lar edi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi.

7-ta’rif. Agar (3) limitlar mavjud va chekli bo‘lib, (4) tengliklarning birortasi o‘rinli bo‘lmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Bunda

$$f(x_0-0) - f(x_0+0)$$

ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, $f(x) = [x]$ funksiya $x = p(p \in Z)$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki $f\ (p\ +\ 0) =\ p\ , f\ (p_0 - 0) = p - 1$ bo‘lib, $f\ (p\ +\ 0) \neq f\ (p_0 - 0)$ bo‘ladi.

Agar hech bo‘lmaganda (3) limitlarning birortasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksiz bo‘lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, agar\ x \neq 0\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x = 0\ bo'lsa, \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘ladi, chunki bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud emas.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda, $u = F(y)$ funksiya esa Y_f to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ular yordamida $u = F\big(f(x)\big)$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Teorema 1. *Agar* $y = f\ (x)$ *funksiya* $x_0 \in X$ *nuqtada,* $u = F(y)$ *funksiya esa* $y_0 \in Y_f$ *nuqtada (*$y_0 = f(x_0)$*) uzluksiz bo'lsa,* $F\big(f(x)\big)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Teoremani isbotlash uchun quyidagicha mulohaza yuritaiz. $u = F(y)$ funksiya $y_0 \in Y_f$ nuqtada ($y_0 = f(x_0)$) uzluksiz bo'lgani uchun

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\sigma > 0, \forall y, |y - y_0| < \sigma: |F(y) - F(y_0)| < \varepsilon \ (5)$$

ya'ni, $\big|F\big(f(x)\big) - F\big(f(x_0)\big)\big| < \varepsilon$ bo'ladi.

Shartga ko'ra $y = f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz. U holda yuqoridagi $\sigma > 0$ ga ko'ra

$$\exists\delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \sigma$$

ya'ni,

$$|y - y_0| < \sigma \ (6)$$

bo'ladi.

(5) va (6) munosabatlardan

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta: \big|F\big(f(x)\big) - F\big(f(x_0)\big)\big| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $F\big(f(x)\big)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz.

Monoton funksiya uzilish nuqtasining tasnifini.

Teorema 2. $[a, b] \subset R$ *da monoton bo'lgan* $f(x)$ *funksiya shu* $[a, b]$ *ning istalgan nuqtasida yoki uzluksiz bo'ladi, yoki birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.*

Ushbu teoremani isbotlash uchun quyidagicha mulohaza yuritaiz. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da o'suvchi bo'lsin. Aytaylik,

$$x_0 \in [a, b], (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b] (\delta > 0)$$

bo'lsin. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \leq f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \leq f(x_0)$$

bo'ladi. Agar

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, agar

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi tur uzilishiga ega bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da kamayuvchi bo'lganda ham tasdiq isbotlanadi.

O'tilgan mavzuni takrorlash va mustahkamlash uchun quyidagi nazorat savollarini berish mumkin. Buning uchun, ilg'or pedagogik texnologiya hisoblangan "Matematik lotto" usuliga o'xshash usulni qo'llashga harakat qilamiz.

1-kartochka

1. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} sin, agar\ x - ratsional\ son\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x - irratsional\ son\ bo'lsa, \end{cases}$$

funksiyaning $x_k = k\pi$ $(k \in Z)$ nuqtalarida uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

2. Funksiyani nuqtadagi uzluksizligi ta’rifini ayting.

3. Ushbu

$$f(x) = [x] \cdot sin\pi x\ (x \in R)$$

funksiya uchun $f(x) \in C(R)$ bo‘lishi ko‘rsatilsin.

4. Funksiyaning uzilish nuqtalari.

2-kartochka

1. Ushbu

$$(x) = \begin{cases} 1, agar\ x - ratsional\ son\ bo'lsa, \\ 0, agar\ x - irratsional\ son\ bo'lsa, \end{cases}$$

Dirixle funksiyasi R ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

2. Funksiyani to‘plamdagi uzluksizligi ta’rifini ayting.

3. Argument orttirmasi haqida ma'lumotlar keltiring.

4. Funksiyaning orttirmasi ta’rifini ayting va misollar keltiring.

Test

1. $f\ (x)\ = [x]$ funksiyaning uzilish nuqtalari to‘plamini aniqlang.

a) Z

b) N

c) R

d) Q

2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ funksiyaning uzilish nuqtalari to‘plamini aniqlang.

a) $\{2; 3\}$

b) $\{-1; 0; 1\}$

c) $\{0; 1\}$

d) $\{1\}$

3. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri butun sonlar o‘qida uzluksiz?

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = tgx$

c) $f(x) = arccos$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang

a) $x = \pm 2$, II tur uzilish nuqtasi

b) $x = \pm 2$, I tur uzilish nuqtasi

c) $x = \pm 1$, I tur uzilish nuqtasi

d) $x = 0$, II tur uzilish nuqtasi

5. a ning qanday qiymatida

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, x \neq -1 \\ a, x = 1 \end{cases}$$

funksiya nuqtada uzluksiz bo‘ladi?

a) $a = \frac{1}{3}$

b) $a = 0$

c) $a = \frac{1}{9}$

d) $a = -\frac{1}{3}$

XULOSA

Mavzuni tushuntirishda ilg‘or pedagogik usullarga tayanilganligi uni tushuntirishni osonlashtiradi. Biroq, mavzuni to‘liq tushunish uchun ushbu maqolada keltirilgan ma’lumotlar juda kam hisoblanadi. Bunda faqat mavzuni tushuntirishda e’tibor qilish lozim bo‘lgan ayrim jihatlar yoritildi xolos. Muallif tomonidan juft va toq sonlarni o‘quvchilarga sodda qilib tushuntirishga doir [5] da ayrim mulohazalar keltirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Tao T. Analysis 1. Hindustan Book Agency, India, 2014.

2. Canuto C., Tabacco A. Mathematical analysis I. Springer-Verlag, Italia, 2008.

3. Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma’ruzalar, I q. T. “Voris-nashriyot”, 2010.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т. М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

5. Баходурова М.Б. (2023). Четные и нечетные числа. Tadqiqotlar, 14(6), 105–111 b.