Maktab matematika kursida sonning butun qismiga oid masalalarni yechish metodlari

N.Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Maqolada sonning butun qismi qatnashgan *y=[x]* funksiya va ularning xossalari, ayniyatlar va tenglamalarni yechishga oid masalalar, turli hil matematik turnirlar va olimpiadalarda taklif etilgan ba’zi masalalar va ularning yechimlari keltirib o‘tilgan.

Kalit so‘zlar: sonning butun qismi, ta’rif, funksiya, xossa, isbot, masala va yechim

Methods of solving problems related to the whole part of a number in a school mathematics course

N.Rakhimov
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: In the article, the function *y=[x]* in which the whole part of the number is involved and their properties, problems related to solving equations and equations, some problems offered in various mathematical tournaments and Olympiads and their solutions are mentioned.

Keywords: whole number, definition, function, property, proof, problem and solution

Hozirgi kunda o‘quvchilarga berilayotgan axborotlar hajmi, mazmuni keng bo‘lib, ularning ichidan bevosita o‘ziga va kelajakda kerak bo‘ladigan axborotlarni ajratib olish metodi, madaniyati yetarli emasliklari, ularning matematik mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish va uni kerakli yo‘nalishlarga olib o‘tish lozim ekanligi hozirgi davrning dolzarb muammolaridan hisoblanadi. Ayniqsa, bu borada axborotlarning modellashtirilishi, hayotiy masalalar modelini qurish, yechilish algoritmini topish, o‘qitishni takomillashtirishning muhim garovidir. Shu bois o‘quvchilarning tadqiqiy ko‘nikmalarini shakllashtirish, algebra va geometriya darslarini o‘qitishni yangi sifat darajasiga chiqarish zarurligi bugungi kunning asosiy muammolaridan biridir. Ma'lumki, bugungi kunda mavjud o‘quv qo‘llanmalari, darsliklar o‘zining mazmuni, tuzilishi va funksiyasi jihatdan yuqorida keltirilgan fikr

(cc) BY

va faktlarga to'liq javob bera olmaydi hamda o'quvchilarni akademik litseylar, matematika chuqurlashtirilib o'qitiladigan ixtisoslashgan ta'lim muassasalarida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish va ularni tadqiqiy ko'nikmalari shakllanishida yetarli darajada emasligi hammamizga ma'lum. Umumta'lim maktablarida, akademik litseylarda mumkin bo'lgan imkoniyatlarning tahlil qilinishi, nazariy va amaliy bilimlar orasidagi bog'liqlikning qanday darajada amalga oshirilayotganligini e'tiborga olsak, u holda biz tadqiq etayotgan mavzuning dolzarb ekanligini ko'rish mumkin.

Ta'rif. Haqiqiy x sonidan oshmaydigan eng katta n butun soniga, x sonining butun qismi deyiladi va $[x]$ kabi belgilanadi, $x-[x]$ miqdorga esa x sonining kasr qismi deyiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifdan foydalanib, har qanday haqiqiy x soni uchun $x=[x]+\{x\}$ tenglikni yozish mumkin.

Masalan, 1) x=0,015 bo'lsa, $[x]$=0; $\{x\}$=0,015; 2) x=–5,034 bo'lsa, $[x]$=–6; $\{x\}$=0,966; 3) $x=\pi$ bo'lsa, $[\pi]$=3; $\{\pi\}$=0,1413... va hokazo.

Sonning butun va kasr qismi haqidagi tushunchalar matematikaning ko'plab sohalarida uchraydi va ba'zi hollarda tushunchalarni ixcham yozilishiga imkoniyat yaratadi.

Sonning butun qismi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $a, b \in Z$ bo'lganda, $[a+b]=[a]+[b]$ bo'ladi.

Misol: $[9+10]=[9]+[10]=19$

2-xossa. $a, b \in R$ bo'lganda, $[a+b] \geq [a]+[b]$ bo 'ladi.

Misol: $[9{,}8+9{,}9] \geq [9{,}8]+[9{,}9];\ [19{,}7] \geq 9+9;\ 19>18.$

3-xossa. $\forall x(x \in R)$ va $\forall a(a \in Z)$ sonlari uchun $[x+a]=[x]+a$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti: $x=[x]+\{x\}$ bo'lgani uchun

$x+a=[x]+\{x\}+a$

shu bilan birga $[x]+\{x\}+a<x+a+1.$

U holda, $[x]+a, x+a$ dan oshmaydigan eng katta butun son. Shunday qilib

$$[x+a]=[x]+a$$

4-xossa. $\forall x(x \in R)$ va $\forall n(n \in N)$ sonlari uchun

$[nx] \geq n[x]$ o'rinli.

Isboti: $x=[x]+\{x\}$ foydalanamiz. U holda, $nx=n[x]+n\{x\}$

$n[x]$ butun son bo'lgani uchun $[nx]=[n[x]+n\{x\}]$.

n va $\{x\}$ lar nomanfiy sonlar bo'lgani uchun $[n\{x\}] \geq 0$ bo'ladi, bundan esa

$[nx] \geq [n[x]]=n[x]$

kelib chiqadi.

5-xossa. Agar $[a]=[b]$ $a \in R, b \in R$ bo'lsa, $-1<a-b<1$ bo 'ladi.

(cc) BY

Isboti: $a = [a] + \{a\}$ va $b = [b] + \{b\}$ bo'lganidan

$a - b = ([a] + \{a\}) - ([b] + \{b\}) = ([a] - [b]) + (\{a\} - \{b\}) = \{a\} - \{b\}$.

keyin,

$$0 \le \{a\} < 1$$
$$1 > \{b\} \ge 0$$

bunda biz ikkinchi tengsizlikni -1 ga ko'paytirib ikkala tengsizlikni qo'shib yuboramiz. Natijada

$$-1 < \{a\} - \{b\} < 1$$

munosabat kelib chiqadi. Bundan $-1 < \ a - b \ < \ 1$ bo'ladi.

6-xossa. Agar $x \in R, n\epsilon N$ bo'lsa $[x] = n$ bo'lsa, $n \le x < n + 1$ tengsizlik bajariladi.

Agar $[x] = -$n bo'lsa, $-n - 1 < x \le -n$ tengsizlik bajariladi

Bularga qo'shimcha ravishda yana ushbu xossalarini kiritish mumkin.

1) Ta'rifdan $[a] \le a < [a] + 1$ asosiy tengsizlik kelib chiqadi.

2) Agar $[x] = [y]$, u holda $-1 < [x - y] < 1$ bo'ladi.

3) Agar $x \in Z \ n \in N$ bo'lsa, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

4) Ixtiyoriy haqiqiy x son uchun $\big[[x]\big] = [x]$.

5) Agar $x < y$ bo'lsa, $[x] \le [y]$ bo'ladi.

6) Agar $x \in R$ bo'lsa $[\{x\}] = 0$; $\{[x]\} = 0$; $\big[[x]\big] = [x]$; $\big\{\{x\}\big\} = \{x\}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Biz bu tipdagi ilmiy - uslubiy maqolalarimiz orqali kelajakda sonning butun va kasr qismi qatnashgan *y=[x]* funksiyalar va ularning xossalari, asosiy teoremalar, ayniyatlar, tenglama va tengsizliklarni yechishga oid masalalar, turli hil matematik turnirlar va olimpiadalarda taklif etilgan masalalarni jamlab bitta o'quv-uslubiy qo'llanma tayyorlashni maqsad qilganmiz. Quyida mavzuga oid ba'zi masalalar yechimlarini keltirib o'tamiz:

1-misol. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2020$ ko'paytma nechta nol bilan tugaydi.

Yechim. Berilgan ko'paytmaning kanonik shakli $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot \ldots \cdot p^{a_n}$ bo'lsin. Bundan a_1 va a_3 larni topamiz.

$$a_1 = \left[\frac{2020}{2}\right] + \left[\frac{2020}{4}\right] + \left[\frac{2020}{8}\right] + \left[\frac{2020}{16}\right] + \ldots + \left[\frac{2020}{1024}\right] = 2013$$

$$a_3 = \left[\frac{2020}{5}\right] + \left[\frac{2020}{25}\right] + \left[\frac{2020}{125}\right] + \left[\frac{2020}{625}\right] = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2020 = 2^{2013} \cdot 5^{503} \cdot A = B \cdot 10^{503}$$

(cc) BY

Demak, berilgan ko‘paytma 503 ta nol bilan tugaydi (N.Raximov, O‘quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o‘qitish metodikasi. , February 2023.).

2-misol. Ushbu $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{2024}\right]$ yig‘indini hisoblang. Bu yerda $\left\lfloor\sqrt{a}\right\rfloor$ ifoda *a* sonining butun qismi.

Yechim. Bunda $\left[\sqrt{x}\right]=k,\ k\in N$ deb olaylik, bunda $k\le\sqrt{x}<k+1\ \Rightarrow k^2\le x<(k+1)^2,\ \ x\in\left[k^2;\ k^2+2k\right]$ shu kesmada $2k$+1 ta *x* bor va har bir $\sqrt{x}$ larning butun qismi *k* ga teng. Masalan: $k=1\to x\in[1;3]\ \ x=1,2,3$ qiymatlar qabul qiladi va $\left[\sqrt{1}\right]=\left[\sqrt{2}\right]=\left[\sqrt{3}\right]=1$ ga teng. Endi yechimga qaraylik $44^2=1936<2024<2025=45^2$, 2024-1936+1=89 ta sonning butun qismi 44 ga teng.

$$S=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{2024}\right]=$$
$$1(2\cdot1+1)+2(2\cdot2+1)+3(2\cdot3+1)+...+43(2\cdot43+1)+44\cdot89=$$
$$2(1+2^2+3^2+...+43^2)+1+2+3+...+43+44\cdot89=59730$$

3-misol. $\left[\dfrac{x^2-x+2}{4}\right]=1$ tenglamani yeching.

Yechim. Bu tenglamani quyidagi qo‘sh tengsizlik shaklida yozib olamiz:

$$1\le\frac{x^2-x+2}{4}<2$$

Keyingi qadamda 4 ni tengsizlikni ikkala tomoniga ko‘paytiramiz

$$4\le x^2-x+2<8\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{cases}x^2-x-2\ge0\\ x^2-x-6<0\end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemasini yechimi $-2<x\le-1\ \cup\ 2\le x<3$ ga teng bo‘ladi. (N.Raximov, Maktab o‘quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko‘nikmasini shakllantirish. , 2022/3/26).

4-misol. Tenglamani yeching. $x^2-8[x]+7=0$.

Yechim. Berilgan tenglamaning ildizi *x* bo‘lsin. $n=[x]$ deb olsak, $x^2+7=8n$ bo‘ladi. Demak, *n*>0. Endi $n=[x]$ belgilashdan $n\le x<n+1$ ni yoza olamiz. Oxirgi musbat hadli tengsizlikni kvadratga ko‘tarib 7 ni hadma-had qo‘shsak, $n^2+7\le x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$ ni hosil qilamiz, $x^2+7=8n$ ekanligidan,

(cc) BY

$n^2+7\le 8n<n^2+2n+8$ tengsizlikni hosil qilamiz. Endi bu tengsizlikka teng kuchli bo'lgan quyidagi tengsizliklar sistemasini yozamiz va yechimni topamiz:

$$\begin{cases} n^2+7\le 8n \\ 8n<n^2+2n+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le n\le 7 \\ n<2 \text{ va } n>4 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le \text{n}<2 \text{ yoki } 4<\text{n}\le 7.$$

Oxirgi natijadan va n-butun son ekanligidan n=1, 5, 6, 7 holatlar bo'lishi mumkin.

Bu qiymatlarni navbatma-navbat $x^2+7=8n$ ifodaga qo'yib x ning qiymatlarini topamiz(bunda $n\le x<n+1$ ekanidan x>0). Javob: $1;\ \sqrt{33};\ \sqrt{41};\ 7$. (N.Raximov, Methods of solving equations related to whole and fractional part of a number., November, 2022y.)

5-masala. $\int_0^2 [\text{x}^2]dx$ aniq integralni hisoblang.

Yechim. Bu integralni dastlab oraliqlarga ajratib olamiz:

$$I=\int_0^2[\text{x}^2]dx=\int_0^1[\text{x}^2]dx+\int_1^{\sqrt{2}}[\text{x}^2]dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}[\text{x}^2]dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}[\text{x}^2]dx.$$

$$I=\int_0^1 0dx+\int_1^{\sqrt{2}}1dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}3dx=x\,|_1^{\sqrt{2}}+2x\,|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}+x\,|_{\sqrt{3}}^{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)+$$

$$+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+3\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}-1+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6-3\sqrt{3}=5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Javob: $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. (N.Raximov, O'quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o'qitish metodikasi. , February 2023.).

Foydalanilgan adabiyotlar

1. N.Raximov, B.Mamasidikov. Methods of solving equations related to whole and fractional part of a number. Eurasian Research Bulletin. Volume 14, November, 2022y. Page:190-192.

2. N.Raximov, B.Mamasidikov. Maktab o'quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko'nikmasini shakllantirish. Science and Education. 2022/3/26. Page: 739-743.

3. N. Rahimov. Matematikadan nostandart masalalar, 1-qism. Uslubiy qo'llanma. Samarqand-2020y.

4. N.Raximov, B.Mamasidikov. O'quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o'qitish metodikasi. "Science and Education" Scientific Journal. February 2023.