Stereometriya haqida umumiy tushuncha, stereometriya aksiomalari

Alisher Nematilloyevich Ubaydulloyev
Jonibek Mirzoali o'g'li Rajabov
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Maqolada stereometriya bo'limi, fazodagi figura va shakllar ularning xossalari shuning bilan birgalikda stereometriya aksiomalar figuralarning ko'rinishi fazoni tekislik bilan ikkita yarim fazoga ajratish haqida ta'rif va teoremalar keltirilgan. Tekisliklar, kesishuvchi tekisliklar ikki nuqta orasidagi masofani topish va ularga doir misollar yechib tushuntirilgan.

Kalit so'zlar: stereometriya, fazo, tekislik, figura aksioma, kesishuvchi tekisliklar, planimetriya, kesma, ikki nuqta orasidagi masofa

General understanding of stereometry, axioms of stereometry

Alisher Nematilloyevich Ubaydulloyev
Jonibek Mirzoali o'g'li Rajabov
Bukhara State University

Abstract: In the article, the section of stereometry, figures and shapes in space, their properties, together with the axioms of stereometry, the appearance of figures, definitions and theorems about the division of space into two half-spaces by a plane are presented. Planes, intersecting planes, finding the distance between two points and solving examples are explained.

Keywords: stereometry, space, plane, figure axiom, intersecting planes, planimetry, section, distance between two points

Stereometriya-geometriyaning bir bo'limi bo'lib, unda fazodagi figuralar o'rganiladi. Stereometriya ham geometriyaning bir bo'limi hisoblanib undagi geometrik figuralarning xossalari ham planimetriyadagi tegishli teoremalarni isbotlash orqali amalga oshiriladi. Bu teoremalar isbotlalarida aksiomalar bilan ifodalanuvchi asosiy geometrik figuralarning xossalari muhim o'rin tutadi. Fazodagi asosiy figuralar nuqta, to'g'ri chiziq va tekislikdir.Tekislik ham to'g'ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda biz tekislikning bir qisminigina tasvirlaymiz, lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz. Tekisliklar α,β,γ, grek harflari bilan belgilanadi.

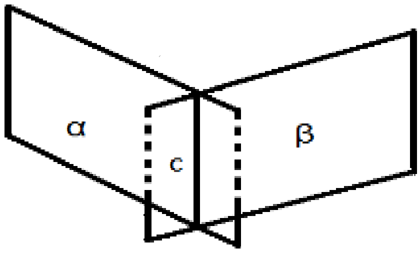
(cc) BY

Geometrik shakl ko'rinishida tekislikning kiritilishi yangi aksiomalar sistemasini paydo qiladi. Shu sabab biz aksiomalarning C gruppasini kiritamiz. Ular tekisliklarning fazodagi asosiy xossalarini ifodalaydi. Bu C gruh quyidagi 3 ta aksiomadan tashkil topgan:

C_1. Tekislik qanday bo'lmasin shu tekislikka tegishli nuqtalar va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.

C_2. Agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular to'gri chiziq bo'yicha kesishadi (1.1.1-chizma).

Bu aksioma ikkita turli α va β tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu tekisliklardan har biriga tegishli c to'g'ri chiziqning mavjudligini tasdiqlaydi. Bunda, agar, biror c nuqta ikkala tekislikka tegishli bo'lsa, u c to'g'ri chiziqqa ham tegishli bo'ladi.



1.1.1-chizma (*Kesishuvchi tekisliklar*)

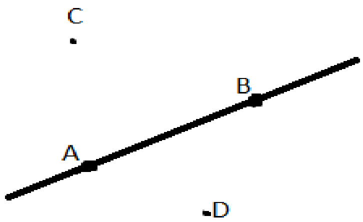
C_3. Agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

Bu esa ikkita turli a, b to'g'ri chiziqlar umumiy c nuqtaga ega bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarni o'z ichiga olgan γ tekislik mavjud, demakdir. Bunday xossaga ega tekislik yagonadir.

Shunday qilib, stereometriyaning aksiomalari sistemasi planimetriya aksiomalaridan va aksiomalarning C gruppasidan iborat.

Planimetriya aksiomalari

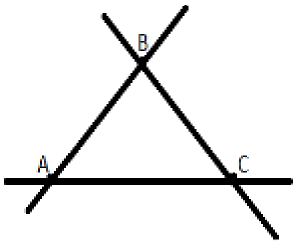
I_1. Har qanday to'g'ri chiziqni olmaylik, shu to'gri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud (1.1.2-chizma).



1.1.2-chizma (*Fazoda to'g'ri chiziq*)

$\boldsymbol{I_2}$. Har qanday ikki nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta (1.1.3-chizma).

(cc) BY



1.1.3-chizma (*Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar*)

II_1. To'g'ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.

II_2. To'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi.

III_1. Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarning yig'indisiga teng.

III_2. Har bir burchak noldan katta tayin gradus o'lchovga ega.Yoyiq burchak 180^0ga teng.

IV_1. Istalgan yarim to'g'ri chiziqqa uning boshlang'ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo'yish mumkin.

IV_2. Istalgan yarim to'g'ri chiziq hosil qilgan tayin yarim tekislikka berilgan gradus o'lchovi 180^0dan kichik yagona burchakni qo'yish mumkin.

IV_3. Istalgan uchburchak uchun unga teng shunday uchburchak mavjudki, u berilgan yarim to'g'ri chiziqqa nisbatan berilgan holatda joylashadi.

V. Berilgan to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali tekislikda berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Stereometriya aksiomalarining ba'zi natijalari

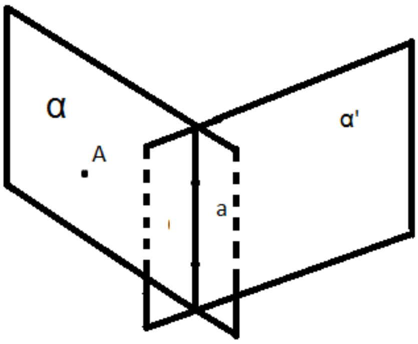
1.1.1-teorema. To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

Isbot. a to'g'ri chiziq va B esa unda yotmagan nuqta berilgan bo'lsin. a to'g'ri chiziqda biror A nuqtani belgilaymiz. I_1 aksiomaga ko'ra bunday nuqta mavjud. I_2 aksiomaga ko'ra A va Bnuqtalardan b to'g'ri chiziq o'tkazamiz. a va b to'g'ri chiziqlar turlicha, chunki b to'g'ri chiziqning Bnuqtasi a to'g'ri chiziqda yotmaydi. A va B nuqtalar to'g'ri chiziqlar umumiy A nuqtaga ega. a, b to'g'ri chiziqlar orqali α tekislik o'tkazamiz (C_3aksioma).Bu tekislik a to'g'ri chiziqdan va Bnuqtadan o'tadi. Endi a to'g'ri chiziq va B nuqtadan o'tuvchi α tekislikning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq va B nuqta orqali o'tuvchi boshqa α' tekislik mavjud bo'lsin. C_2 aksiomaga ko'ra turli α va α' tekisliklar a to'g'ri chiziqda yotadi. Ammo α, α' tekisliklarning umumiy B nuqtasi a to'g'ri chiziqda yotmaydigan qilib olingan edi. Biz zidlikka duch keldik (Teorema to'la isbotlandi).

To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishishi

1.1.2-teorema. To'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning o'zi ham tekislikka tegishli bo'ladi.(1.1.4-chizma).

CC BY



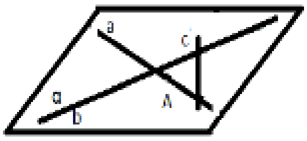
1.1.4-chizma (*Kesishuvchi tekisliklar*)

Isbot. a-berilgan to'g'ri chiziq va α berilgan tekislik bo'lsin. I aksiomaga ko'ra a to'g'ri chiziqda yotmaydigan A nuqta mavjud. a to'g'ri chiziq va A nuqta orqali α' tekislikni o'tkazamiz.Agar α' tekislik α tekislik bilan ustma-ust tushsa, u holda α tekislik a to'g'ri chiziqni o'z ichiga oladi, buni teorema tasdiqlaydi.Lekin α'tekislik α tekislikdan farq qilsa, bu tekisliklar a to'g'ri chiziqning ikkita nuqtasini o'z ichiga olgan a' to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. I aksiomaga ko'ra a' to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushadi va demak a to'g'ri chiziq α tekislikda yotadi. (Teorema isbotlandi.)

Xulosa. Tekislik va unda yotmaydigan to'g'ri chiziq yo kesishmaydi yoki bitta nuqtada kesishadi.

1.1.1-masala. A nuqtada kesishuvchi ikkita turli chiziq berilgan. Berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesib o'tadigan va A nuqtadan o'tmaydigan hamma to'g'ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishini isbotlang (1.1.5-chizma).

Yechish: Berilgan a, b to'g'ri chiziqlar orqali α tekislik o'tkazamiz.

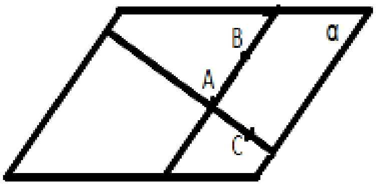


1.1.5-chizma (*Tekislik*)

Buni C_3 aksiomaga asosan bajarish mumkin.Berilgan to'g'ri chiziqlarni kesuvchi c to'g'ri chiziq α tekislikbilan ikkita M va N umumiy nuqtaga ega.(berilgan to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari).1.1.2-teoremaga ko'ra bu to'g'ri α tekislikda yotishi kerak.

Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislikning mavjudligi

1.1.3-teorema. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.(1.1.6-chizma)



1.1.6-chizma (*Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik*)

cc BY

Isbot. A, B, C bir to'g'ri chiziqda yotmagan berilgan uchta nuqta bo'lsin. AB va AC to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz; ular turli,chunki A, B, C nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. C_3 aksiomaga ko'ra AB va AC to'g'ri chiziqlar orqali α tekislik o'tkazish mumkin. Bu tekislik A, B, C nuqtalarni o'z ichiga oladi.

A, B, C nuqtalardan o'tuvchi α tekislikning yagonaligini isbotlaymiz. Haqiqatan, 2-teoremaga ko'ra A, B, C nuqtalardan o'tuvchi tekislik AB va AC to'g'ri chiziqlarni o'z ichiga oladi. C_3 aksiomaga ko'ra esa bunday tekislik yagonadir. Teorema isbotlandi.

1.1.2-masala. Bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqtadan tekislik o'tkazish mumkinmi?

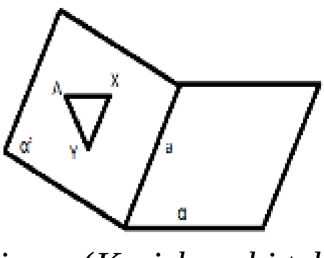
Yechish. A, B, C -$a$to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqta bo'lsin. a to'g'ri chiziqda yotmaydigan D nuqtani olamiz (I aksioma). A, B, D nuqtalar orqali tekislik o'tkazish mumkin (1.1.3-teorema). Bu teorema tekislikda a to'g'ri chiziqning ikkita A, B nuqtasini o'z ichiga oladi, demak, shu to'g'ri chiziqning c nuqtasini ham o'z ichiga oladi (1.1.2-teorema). Demak, bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqta orqali har doim tekislik o'tkazish mumkin ekan.

Fazoni tekislik bilan ikkita yarim fazoga ajratish

1.1.4-teorema. Tekislik fazoni ikkita yarim fazoga ajratadi. Agar $X\ va\ Y$ nuqtalar bitta yarim fazoga tegishli bo'lsa, u holda XY kesma tekislikni kesib o'tmaydi.Agar $X\ va\ Y$nuqtalar turli yarim fazolarga tegishli bo'lsa,u holda XY kesma tekislikni kesib o'tadi.

Isbot. Faraz qilaylik, α berilgan tekislik bo'lsin. α tekislikda yotmaydigan A nuqtani belgilaymiz. C_1aksiomaga ko'ra bunday nuqta mavjud. Fazoning α tekislikda yotmaydigan hamma nuqtalarini ikkita yarim fazoga quyidagi tarzda ajratamiz. Agar AX kesma α tekislikni kesib o'tmasa, X nuqta birinchi yarim fazoga tegishli, agar ,AX kesma α tekislikni kesib o'tsa, X nuqta ikkinchi yarim fazoga tegishli deymiz. Fazoni bunday ajratish (bo'lish) teoremada ko'rsatilgan xossalarga ega ekanini ko'rsatamiz.

X va Y nuqtalar birinchi yarim fazoga tegishli bo'lsin. A, X va Y nuqtalar orqali α' tekislik o'tkazamiz. Agar α' tekislik α tekislikni kesib o'tmasa, u holda XY kesma ham bu tekislikni kesib o'tmaydi. Faraz qilaylik, α' tekislik α tekislikni kesib o'tsin (1.1.7-chizma).



1.1.7-chizma (*Kesishuvchi tekisliklar*)

Tekisliklar turli bo'lgani uchun ular biror a to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.

(cc) BY

a to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. a to'g'ri chiziq α' tekislikni ikkita yarim tekislikka bo'ladi. X va Y nuqtalar bitta yarim tekislikka tegishli. Shuning uchun XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi.

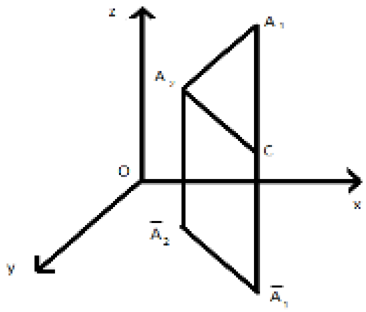
Agar X va Y nuqtalar ikkinchi yarim fazoga tegishli bo'lsa,u holda α' tekislik oldindan α tekislikni kesib o'tadi. X va Y nuqta a to'g'ri chiziq bilan bo'lingan α' tekislikning bitta yarim tekisligiga tegishli. Demak, XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi.

Nihoyat, agar X nuqta bitta yarim fazoga tegishli bo'lsa, Y nuqta esa ikkinchi yarim fazoga tegishli bo'lsa, u holda α' tekislik α tekislikni kesib o'tadi. X va Y nuqtalar esa a to'g'ri chiziqqa nisbatan α' tekislikning turli yarim tekisliklarida yotadi. Shuning uchun XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tadi, demak, α tekislikni ham kesib o'tadi. (Teorema isbotlandi) tengsizlik bilan ifodalanadi.

Ikki nuqta orasidagi masofa

Ikkita $A_1(x_{1,}y_{1\,,}z_1)$ va $A_2(x_{2,}y_{2\,,}z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani bu nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz.

Avval A_1A_2 to'g'ri chiziq z o'qiga parallel bo'lmagan holni qaraymiz. $A_{1,}A_2$ nuqtalar orqali z o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ular xy tekislikni $\overline{A_1}$ va $\overline{A_2}$ nuqtada kesib o'tadi (1.2.5-chizma).



1.1.8-chizma (*Ikki nuqta orasidagi masofa*)

Bu nuqtadan ham $A_1 va\, A_2$ nuqtalar singari x, y koordinatalarga ega, lekin ularning z koordinatasi nolga teng.Endi A_2nuqta orqali xy tekislikka parallel tekislik o'tkazamiz. U $A_1\overline{A_1}$ to'g'ri chiziqni biror C nuqtada kesib o'tadi. Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$A_1{A_2}^2 = A_1C^2 + C{A_2}^2$$

CA_2 va A_1A_2 kesmalar teng va

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

AC kesmaning uzunligi $|z_1 - z_2|$ ga teng. Shuning uchun

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Agar A_1A_2 kesma z o'qiga parallel bo'lsa: $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Hosil qilingan formula ham shu natijani beradi, chunki bu holda $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

cc BY

Shunday qilib, A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofa uchun ushbu formula hosil bo'ladi.

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

1.2.2-masala. (0;0;1),(0,1,0),(1,0,0) nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi va xy tekislikdan 2 birlik masofadagi nuqtalarni toping.

Yechish. 1) Biz topmoqchi bo'lgan nuqtamizni $D(2, y, z)$ deb belgilab olamiz.

$$AD^2 = (2-0)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 5 + y^2 + z^2 - 2 \times z,$$

$$BD^2 = (2-0)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 5 + y^2 - 2 \times y + z^2,$$

$$CD^2 = (2-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1 + y^2 + z^2.$$

Oldingi ikkita tenglikning har birini uchinchisiga tenglashtirib quyidagi ikkita tenglamani hosil qilamiz:

$$1 + y^2 + z^2 = 5 + y^2 + z^2 - 2 \times z \Rightarrow 2 \times z = 4 \Rightarrow z = 2$$

$$1 + y^2 + z^2 = 5 + y^2 - 2 \times y + z^2 \Rightarrow 2 \times y = 4 \Rightarrow y = 2$$

Izlanayotgan nuqta $D(2,2,2)$

1) yz tekislikdan 2 birlik masofada deyilgani uchun bu nuqta koordinatasini $D'(-2, y, z)$ deb olib yuqoridagi tengliklarni $D'(-2, y, z)$ nuqta uchun yozamiz. Yuqoridagi ishlarni qilib $D'(-2, -2, -2)$ nuqtani topamiz.

Javob. $D(2,2,2)$ va $D'(-2, -2, -2)$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. З.Пашаев, И.Исраилов. Геометриядан масалалар тўплами. Тошкент, Ўқитувчи, 2001 й.

2. А.В. Погорелов. Геометрия. (Ўрта мактабларнинг 6-10 синфлари учун дарслик). Тошкент, "Ўқитувчи". 1989 й.

3. Т.Н.Қори-Ниёзий. Аналитик геометрия асосий курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1967 й.

4. A.Y.Narmanov. Analitik geometriya. O'zbekiston Faylasuflari Milliy Jamiyati tashkiloti. Toshkent, 2008 y.

5. R.N.Atabayeva. Geometrik masalalarni koordinata-vektor usulida yechish, Toshkent, O'qituvchi 2001 y.

(cc) BY