Квадратик стохастик операторлар ва уларнинг қўлланилиши ҳақида

Мафтуна Ҳошим қизи Ҳикматова
hikmatovamaftuna771@gmail.com
Бухоро давлат университети

Аннотация: Ушбу мақолада квадратик стохастик операторлар ва уларнинг қўлланилиши бўйича фикрлар келтирилган. Уларнинг келиб чиқиш тарихи ҳақида сўз юритилган. Шу йўналишда олиб борилган илмий изланишлар таҳлил қилинган ва айрим олимларнинг фаолияти ҳақида маълумотлар айтиб ўтилган. Квадратик стохастик операторларнинг ривожланиш тарихида асосий рол ўйнаган «ўлжа-йиртқич» модели ёритилган.

Калит сўзлар: динамик система, квадратик оператор, аниқлаштирилган модел, стохастик модел, математик генетика, бистохастик квадратик оператор, синергетика

About quadratic stochastic operators and their application

Maftuna Hoshim kizi Hikmatova
hikmatovamaftuna771@gmail.com
Bukhara State University

Abstract: This article provides an overview of quadratic stochastic operators and their applications. The history of their origin is discussed. The scientific research conducted in this direction was analyzed and information about the works of some scientists was mentioned. The «prey-predator» model, which played a key role in the history of the development of quadratic stochastic operators, is highlighted.

Keywords: dynamic system, quadratic operator, model, stochastic model, mathematical genetics, bistochastic quadratic operator, synergetics

Квадратик стохастик операторлар физик, биологик ёки механик каби баъзи жараёнларнинг математик моделини ифодалайди. Шу муносабат билан маълумот учун баъзи квадратик операторларнинг қўлланилишини ҳақида маълумотларни тақдим этамиз.

Квадратик стохастик операторларни ўрганишда асосий вазифалардан бири ўрганилаётган жараённинг эволюцион ҳолатини ўрганишдир. Масалан, одатда тизим ҳолатининг «авлодлари» баъзи қонунлар билан белгиланади. Математик генетикада юзага келадиган ушбу қонунларни тавсифлаш учун квадратик (стохастик) операторлар қўлланилади.

Турли соҳалардаги бир қатор муаммолар чизиқли бўлмаган ўзгаришлар такрорланишининг эргодик ва асимптотик хусусиятларини ўрганиш зарурлигига олиб келади. Масалан, кўпайиш ва тарқалиш зарралари ўртасидаги ўзаро таъсир билан шуғулланадиган асосий вазифалар:

- ёпиқ генетик тизим популяциясининг динамикаси тўғрисидаги биологик вазифалар;

- жамоавий ҳатти-ҳаракатлар моделларида барқарорлик бўйича иқтисодий вазифалар ва бошқалар.

Энг аввало, динамик системанинг таърифини келтирайлик. Динамик система - бу ҳақиқий система (физик, биологик, иқтисодий ва бошқалар) эволюциясининг математик модели бўлиб, ҳар қандай вақтда ҳам ҳолати ўзининг дастлабки ҳолати билан ифодаланади. Динамик системаларнинг эволюция қонунининг берилиши турлича бўлади: чизиқли ёки ночизиқли дифференциал тенгламалар, дискрет акслантиришлар, графлар назарияси, Марков занжирлари назарияси, мувозанатда бўлмаган термодинамика назарияси, динамик хоссалар назарияси, синергетика ва бошқалар. Шу ўринда айтиб ўтиш лозимки, мувозанатда бўлмаган термодинамика. Динамик системалар орқали қуйидагилар ўрганилади:

- термодинамик мувозанат ҳолатидан ташқаридаги системаларни ва қайтариб бўлмайдиган жараёнлар;

- динамик хоссалар назарияси эса маълум бир чизиқли бўлмаган динамик системаларнинг ҳатти-ҳаракатларини тавсифловчи математик аппарат бўлиб, маълум шароитларда хос деб номланувчи ҳодисага боғлиқ ҳоллар;

- синергетика (қадимги юнон тилидан олинган бўлиб, «фаолият» деган маънони билдиради) - бу термодинамик мувозанатдан узоқ бўлган, моделларнинг шаклланиши ва ўзаро ташкил топиши ҳамда очиқ системалардаги структураларни ўрганадиган фаннинг фанлараро йўналиши бўлиб ҳисобланади.

Дастлаб, динамик системалар техник ва табиий-илмий масалаларни математик моделларини ўрганишда қўлланилган. Кейинчалик бу каби қонуниятларни метеорологик, иқтисодий, молиявий ва ижтимоий системаларни ҳолатини аниқлашда ҳам фойдаланилиши мумкинлиги аниқланган. Мураккаб хўжалик системалар ушбу айтиб ўтилган барча йўналишларни қамраб олади. Масалан, энергетика аппаратларини динамик ҳолати уларнинг техник жиҳатларини, энергия узатиш системасини, метеорологик вазиятни ўзаро боғликлигини ўз ичига олади. Агарда вазиятни ўрганишда хатоликка йўл қўйилса, ижтимоий муҳитдаги турғунликни йўқолишига олиб келиши мумкин.

Динамик системалар турли таснифларга бўлинади. Турли динамик системалар ва уларга мос келувчи оддий дифференциал тенгламалар системалари асосидаги математик моделларни кўриб чиқамиз. Динамик системалар орқали ифодаланувчи жараёнларнинг турли хил классификациялари мавжуд.

Аниқлаштирилган модел деб, барча ўзгарувчилари аниқ бўлган моделга айтилади; функциялар ўзларининг аргументлари орқали аниқлаштирилган бўлади. Табиийки, бу каби моделларда аниқлаштирилган функциялар қатнашади. Жуда кўп ҳолларда шундай бўлсада, айрим ночизиқли системаларнинг ечимлари маълум бир шароитларда ўзини тасодифий функциялар каби тутади.

Ташқи таъсир ва параметрлари тасодифий функциялардан иборат бўлган динамик системалар стохастик моделлар деб айтилади.

Динамик системалар, динамик жараёнларга қўшиладиган ўзгарувчилар сонига қараб бир даражали эркин, кўп даражали эркин ва чексиз даражали (континиум) эркин системаларга бўлинади. Қуйида мумкин бўлган моделлар таснифини келтирамиз.

Динамик системалар моделларини классификацияси

Ночизиқлилик характерига кўра	чизиқли квази чизиқли чизиқсиз
Моделлаштирилувчи жараёнларнинг характерига кўра	ўтувчи жараён циклик жараён мажбурий тебраниш автотебраниш параметрли тебраниш аралаш характердаги тебраниш
Эркинлик даражаси сонига кўра	бир даражали эркин кўп даражали эркин чексиз даражали (континуал) эркин
Системани энергияни сақлаш аломатига кўра	консерватив ноконсерватив автотебратувчи диссипатив
Стохастик аломатига кўра	аниқлаштирилган стохастик
Ўраб турувчи муҳит билан ўзаро таъсирига кўра	автоном автоном бўлмаган

Юқорида айтиб ўтилганидек, турли эволюцион жараёнлар динамик системалар орқали математик моделлаштирилади. Хусусан, биологияда популяция эволюциясининг математик модели квадратик стохастик операторлар орқали ифодаланади.

Динамик системалар ўрганилаётган жараёндан келиб чиқиб, дискрет вақтли ва узлуксиз вақтли системаларга бўлинади. Анъанавий равишда каскадлар деб аталадиган дискрет вақтли системаларда системанинг ҳаттиҳаракатлари (ёки бир хил бўлса, фазали фазосидаги системанинг траекторияси) ҳолатлар кетма-кетлиги билан ифодаланади. Анъанавий равишда оқим деб аталадиган узлуксиз вақтли динамик системаларда системанинг ҳолати вақтнинг ҳар бир лаҳзаси учун аниқланади. Каскадлар ва оқимлар рамзий ва топологик динамикаларда кўриб чиқиладиган асосий мавзудир.

Динамик системалар назариясининг асосчилари бўлиб - А.Пуанкаре ва А.М.Ляпуновлар ҳисобланади. Улар XIX асрнинг охирлари XX асрнинг бошларида осмон механикаси, айланувчи суюқликларнинг турғунлиги шакли назарияси ва шу каби масалаларни ўрганиш жараёнида оддий дифференциал тенгламалар системасининг ечимини топишга ҳаракат қилишади. Шунда оддий дифференциал тенгламалар системаси ечимининг алоҳида берилган бир вақтдагисини ўрганишга эмас, балки системанинг (масалан физик жараённи) барча (жуда кўп ечимлар) турли хил бошланғич ҳолатига мос келадиган ечимларини топишга дуч келишади.

Ушбу ҳолда $x(t)$ ни фазода мумкин бўлган барча ҳолатларнинг эгри чизиғи сифатида тасаввур қилиш ва эгри чизиқларнинг геометрик хоссасидан фойдаланиб, у тўғрисида тўлиқ маълумотга эга бўлиш мумкин. Бу эгри чизиқлар фазали траекториялар деб аталади.

XX асрнинг биринчи чорагига келиб динамик системалар назарияси бошқа бир қатор математиклар томонидан ҳам ривожлантирилди. А.А.Андронов аниқ мисоллар орқали табиатда ва лабораторияларда чизиқсиз жараёнларнинг ўрганишда динамик системалар ролининг самарадорлигини кўрсатиб берган. Бу динамик системалар назариясининг ривожланишига катта туртки бўлган. Чунки, мавжуд чизиқли математик моделлар ҳақиқий жараёнларни тўлиқ ифодалаб бера олмаслиги, бунинг учун чизиқли бўлмаган математик моделлар зарурлиги намоён бўла бошлаган.

А.А.Андронов А.Пуанкаренинг чегаравий цикллари ёрдамида автотебранишни тасвирлайди ва фанга янги йўналиш чизиқли бўлмаган динамика назарияси сиртини (контури) чизиб берган.

С.Л.Понтрягин билан ҳамкорликда параметрларнинг кичик ўзгаришларига таъсирчан бўлмаган «қўпол» система (понятие «грубой» системы) тушунчасини киритган. Бу система параметрларни кичик ўзгаришларида ўзининг хоссасини кескин ўзгартирмайди, яъни унинг ҳолати параметрларни ўзгаришидан олдин ва кейин ҳам топологик эквивалентлигича қолади. «Қўпол» системалар барча динамик системалар функционал фазосинининг очиқ соҳаларини тўлдиради. Бу соҳалардан ташқарида, жумладан, уларнинг чегарасида «қўпол» системалар ётади. Чегаралардан ўтиш бифуркация - динамик системаларнинг шакли алмашиши ҳолати билан кузатилади.

Параметрнинг бошланғич қийматларида динамик системаларнинг шакли ва барча бифуркацияларини билган ҳолда параметрнинг чекли қийматларида параметрга боғлиқ динамик системалар оиласининг шаклини олдиндан айтиб бериш мумкин.

XX асрнинг иккинчи ярмида Д.В.Аносов, В.И.Арнолд, Р.Боуен, Р.Мане, Я.Г.Синай, С.Смейл, С.Хаяси, Л.П.Шилников ва бошқалар А.А.Андронов назариясини ривожлантириб, чуқур ва изчил динамик ситемалар назариясини яратишди.

Бу назария ёрдамида ҳақиқий системалар моделларини кенг қамровли ўрганиш ва аниқ тасаввурларга эга бўлиш мумкин.

Квадратик стохастик операторларнинг траекторияларининг ҳатти-ҳаракатларини (яъни итерациялар кетма-кетлигини) ўрганиш вазифаси биринчи марта С.Улам ва унинг ходимларининг асарларида учрайди. Ушбу ишларда компьютерлар ёрдамида икки ўлчовли симплексда берилган ҳар хил турдаги квадратик стохастик операторлар учун траекторияларнинг рақамли таҳлили ўтказилган.

Станислав Мартин Улам ҳақида қисқача маълумотлар келтирамиз. У 1909 йил 13 апрелда Лемберг (ҳозирги Львов) да дунёга келган. Станислав Улам - математика ва ядро физикаси соҳасида фаолият юритган польшалик-америкалик олим. Бу олим launched матемтика, механика, физика, ядро физикаси, квант механикаси фанларига ўз ҳиссасини қўшган бўлиб, бир қанча илмий лойиҳаларда иштирок этган. Станислав Улам ядро қуролини ишлаб чиқариш бўйича тадқиқот олиб борилган Манхеттен лойиҳасида иштирок этди, термоядровий қуролларнинг Теллер-Улам дизайнини яратди, уяли автомат тушунчасини кашф қилди. Ундан ташқари, Монте-Карло ҳисоблаш усулини ихтиро қилди ва ядро импульсларини ҳаракатга келтиришни таклиф этди. Амалий ва соф математикада баъзи теоремаларни исботлади ва бир нечта фаразларни таклиф этди.

Бадавлат польшалик яҳудий оиласида туғилган бўлиб, Львов политехника институтида математика фани бўйича таҳсил олган ва шу ерни ўзида 1933 йилда Казимиерз Куратовски ва Влодзимеж Стосек раҳбарлигида докторлик диссертациясини ҳимоя қилган. Улам 1935 йилда Варшавада Жон Нейман билан учрашган. Жон Нейман Уламни бир қанча вақтга Нью-Жерси штатидаги Принстон шаҳридаги Илғор тадқиқотлар институтига таклиф қилади. 1936 йилдан 1939 йилгача Станислав Улам ёзни Полшада ва ўқув йилларини Массачусетс штати Кембриждаги Гарвард университетида ўтказади ва шу ерда катта натижаларга эришиш мақсадида ишлайди. 1939 йилда Улам ўн етти ёшли укаси Адам Улам билан АҚШга сузиб кетади. 1940 йилда Висконсин-Мадисон университетида доцент бўлиб, 1941 йилда эса АҚШ фуқароси бўлади.

1943 йил октябрь ойида у Hans Betheden Nyu-Meksiko Los Amoc махфий лабораториясида Манхеттен лойиҳасига қўшилиш учун таклиф олади. У ерда портлаш типидаги қуролга керак бўладиган портловчи линзаларнинг ҳаракатини башорат қилиш учун гидродинамик ҳисоблар устида ишлайди. Улам гуруҳга тайинланиб, бу ерда Теллер ва Енрико Ферми учун Теллернинг «Супер» бомбаси устида иш олиб боради. Урушдан кейин у Жанубий Калифорния университетининг доценти лавозимини тарк этди, аммо 1946 йилда термоядровий қуроллар устида ишлаш учун Лос-Аламосга қайтиб келди. Унинг рафиқаси Француаза Арон «компютерлар» ёрдамида у Теллернинг «Супер» дизайни ишламаслигини аниқлади. 1951 йил январь ойида Улам ва Теллер барча термоядро қуроллари учун асос бўлган Теллер-Улам лойиҳасини ишлаб чиқдилар.

Улам Прожест Ровер томонидан олиб борилган ракеталарнинг ядровий ҳаракатланиш муаммосини кўриб чиқди ва Ровернинг ядро термал ракетасига муқобил сифатида кичик ядровий портлашларни ҳаракатга келтириш учун ишлатишни таклиф қилди, бу эса Прожест Орионга айланди. Ферми, Жон Паста ва Мери Тсингоу билан бирга Улам чизиқли бўлмаган фан соҳаси учун илҳом манбаи бўлган Ферми-Макарон-Улам-Тсингоу муаммосини ўрганди. У, эҳтимол, электрон компьютерлар маълум ечимларсиз функцияларга статистик усулларни қўллашни амалий қилишини англаганлиги ва компьютерлар ривожланиши билан Монте-Карло усулини тушуниши билан машҳур кўплаб муаммоларга умумий ва стандарт ёндашувга айланди.

Кейинчалик С.Улам ва унинг ходимлари томонидан кашф этилган операторларнинг бир қисми тўғрисида далиллар келтирилди. Мураккаб ва ноқулай бўлганлиги сабабли етарлича ривожланган аналитик усулларни яратишнинг мумкин эмаслиги, такрорий траекторияларни ўрганишда ва аниқ квадратик операторларни ўрганишда жуда кўп сонли ҳисоб-китобларни амалга ошириш зарурати бу вазифага қизиқишни рағбатлантирмади.

Қирқинчи йилларда компьютерларнинг яратилиши квадрат операторларнинг траекторияларининг ҳатти-ҳаракатларини ўрганиш муаммосига қизиқишни қайта тиклади. С.Улам ва унинг ходимлари компьютерда кўпроқ квадратик операторлар учун ҳисоб-китобларни амалга оширдилар. Қайта айтиб ўтамиз, квадратик стохастик операторлар математиканинг турли соҳаларида ва унинг қўлланилишида пайдо бўлади: эҳтимоллик назариялари, дифференциал тенгламалар назарияси, динамик тизимлар назарияси, математик биология ва бошқалар.

Мураккаб математик воситаларни биологияда қўллаш мумкинми? Агар биологлар мураккаб динамик тизимларни ўргансалар, масалан: турли хил ҳайвонларнинг табиий муҳитда ўзаро таъсирини. Америкалик Алфред Лотка ва

Италиялик Вито Волтерра йиртқичлар ва уларнинг ўтхўр ўлжалари сони турли хил шароитларга қараб қандай ўзгаришини тасвирлаш учун моделни ишлаб чиқдилар.

Дастлаб Алфред Лотка ҳеч қандай математик моделларни яратишни режалаштирмаган. У янги фан соҳасини - «физик биология» ни ишлаб чиқмоқчи эди ва шунинг учун 1902 йилдан бошлаб ушбу мавзуга бағишланган кичик мақолаларни нашр эта бошлади. Шу билан бир қаторда, у биологияда математик усулларни қўллашга қизиқиб қолган. Бироқ, ўша пайтда ғоялари кенг тарқалмаган америкалик олим илмий муҳитда кенг алоқаларга эга бўлмаган ва ёлғиз ишлаган. Бу 1920 йилда Лотканинг мақолалари биолог ва статистик Раймонд Пирлнинг эътиборини жалб қилганида ўзгарди, у уларда ўзига яқин ғояларни топди: Пирл популяциянинг бир тур ичида ўсиши билан қизиқди. Лотка яна бир мақола ёзди ва Pirl uni Proceedings of The National Academy of Sciences (турли соҳаларда оригинал илмий тадқиқотларни нашр этиш учун Американинг етакчи журнали) да тарғиб қилишга ёрдам берди. Ушбу мақолада Лотка ўсимлик ва ўтхўр ҳайвонларнинг ўзаро таъсирини мисол қилиб тасвирлаб берган ва у учун кутилмаган натижага эришди: уларнинг ўзаро таъсири икки популяцияда чексиз циклик тебранишга олиб келади.

Кейинчалик Лотка ушбу кузатувни «йиртқич-ўлжа» ўзаро таъсирининг умумий ҳолатига кенгайтирди. Италиялик олим Вито Вольтерра, Алфред Лотка сингари ушбу моделга аниқ фанлар томонидан келган. У болалигидан математикага бўлган иштиёқини ривожлантирган ва бутун умри давомида фан билан шуғулланган ва 1900 йилларда биология ва ижтимоий фанларда математикадан фойдаланиш имконияти билан қизиққан. Биринчи жаҳон уруши тугаганидан сўнг, Вольтерра биологияга қизиққан ва ўзи билмаган ҳолда Алфред Лотканинг илгари қилган хулосаларига ўхшаш хулосаларга келган. Бироқ, математик ҳамжамиятнинг эътиборини тортган Вольтерранинг асарлари эди. Натижада, 1926 йилда Вольтерра Лотка қонунларининг устуворлигини тан олди. Аммо ўз асарлари маъносиз кўринмаслиги учун Вольтерра вазиятни кўриб чиққанини таъкидлади: икки турдан ортиқ ўзаро таъсирни тавсифловчи ва уларнинг ўтмишдаги алоқаларини ҳисобга оладиган тенгламаларни чиқарди.

Лотка-Вольтерра тизими «йиртқич-ўлжа» моделини, яъни йиртқичлар популяциясини ва маълум бир муҳитда ўзаро таъсир қилувчи ўлжа популяциясини тавсифлаш учун асл ва энг оддий тизимдир (мураккаб тизимлар қуйида муҳокама қилинади): ўлжалар ўсимликларни истеъмол қиладилар, ўлжаларни эса йиртқичлар:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x, \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x)y, \end{cases}$$

бу ерда:

$x -$ қурбонлар сони (ўтхўрлар);

$y -$ йиртқичлар сони;

$\alpha -$ ўтхўр ҳайвонларнинг кўпайиш эҳтимоли;

$\beta -$ ўтхўр ҳайвонни йиртқич ҳайвон ейиши эҳтимоли;

$\gamma -$ йиртқичнинг очликдан ўлиш эҳтимоли;

$\delta -$ йиртқичнинг кейинги кўпайиши учун етарли озиқ-овқат бўлиши эҳтимоли.

Энди, квадратик операторларнинг биологияда қўлланилишини батафсилроқ кўриб чиқамиз.

Шундай қилиб, динамик тизим-бу маълум бир вақт нуқталарида характеристикалар тўплами сифатида унинг ҳолати билан тавсифланадиган объект ёки жараён ва вақт ўтиши билан динамик тизим ҳолатининг эволюция қонуни аниқланади.

Чизиқли бўлмаган динамик тизимларни математик моделлаштириш табиат ва жамиятдаги турли жараёнларни ўрганиш учун фанлараро воситадир. Динамик тизимларни тадқиқ қилишнинг дастлабки натижалари табиий-илмий фанлар - механика, биология, метеорология, синергетика, популяция генетикаси, биофизика ва бошқалар моделларини таҳлил қилишда олинган.

Икки ўлчовли симплекснинг квадратик хариталари траекторияларининг чекланган ҳатти-ҳаракатларини ўрганишга қизиқиш ва уларнинг умумлаштирилиши Э.Ферми, С.Улам, Ж.Паста томонидан бошланган рақамли тажрибалар натижалари тўғрисида хабарлар пайдо бўлиши билан ортди. Ушбу йўналишда, назарий жиҳатдан, энг мазмунли ва фойдали натижалар Г.Кестен, Й.И.Любич, С. С.Валландер, М.И.Захаревич, Н.П.Зимаков, Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.А.Шаҳиди ва бошқалар асарларида олинган.

Квадратик стохастик операторларнинг яна бир синфи - барча бистохастик квадратик операторларнинг йиғиндиси- Ҳарди-Литтлвуд-Поиа мажоризацияси орқали чизиқли икки томонлама стохастик операторни аниқлашга ўхшашлиги билан ифодаланади. Кўпгина назарияларга, хусусан квадратик стохастик операторлар, уни қўллашнинг долзарблигига алоҳида эътибор берилади. Шу сабабли, бистохастик квадратик операторларнинг синфини ўрганиш ҳам траектория назарияси ва кўп ўлчовли матрицалар назарияси нуқтаи-назаридан, ҳам мажоризация назарияси нуқтаи назаридан долзарб вазифага айланади.

Тарихий жиҳатдан квадратик стохастик оператор биринчи марта Бернштейн томонидан киритилган [1]. Квадратик стохастик оператор биология, физика, бошқарув тизимлари каби турли соҳаларда динамик хусусиятларни ўрганиш ва моделлаштириш учун муҳим таҳлил воситаси сифатида қаралди. Кўпгина фиксирланган нуқталар тўпламлари ва Омега чекланган ўлчовли симплексда аниқланган квадратик стохастик операторларнинг чекланган тўпламлари чуқур ўрганилган. Чекланган ўлчовли симплексдаги квадратик стохастик операторларнинг эргодиклиги ва хаотик динамикаси яхшилаб ўрганилди. Квадратик стохастик операторлар ва жараёнлар назариясининг сўнгги ютуқлари ва очиқ муаммоларининг батафсил тақдимоти [2] да ёритилган.

Айтиш жоизки, ҳозирги вақтда дискрет ва узлуксиз вақтли квадратик стохастик операторларни ўрганиш [3-24] ва уларни таҳлил қилишга бағишланган бир қатор илмий ишлар [25-34] нашр қилинган. Бу ҳозирги даврда квадратик стохастик операторлар назариясининг долзарблигидан далолат беради.

Фойдаланилган адабиётлар

1. S. N.Bernstein. The solution of a mathematical problem related to the theory of heredity, The Annals of Mathematical Statistics, 13 (7), 53-61 (1942).

2. Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F. va Rozikov U. «Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems», Inf. Dim. Anal. Quan. Prob. Rel. Top., 2011 y., vol. 14, №2, pp. 279-335.

3. Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Nukus, May 2-3, 2023, Стр.286-287.

4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)

7. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

8. Raupovich, R. X., & kizi, R. M. H. (2023). General Algorithm on Fuzzy Subclasses of K-Valued Logic for Some Issues. European Journal of Higher Education and Academic Advancement, 1(2), 212-215, vol. 1 no. 2 (2023): European journal of higher education and academic advancement.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1-11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

16. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

17. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

18. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

19. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

20. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

21. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

22. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

23. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

24. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

25. Mukhamedieva, D.T., Raupova, M.H. Model of biodiversity and plant sustainability based on quantum variational optimization. E3S Web of Conferences. 2024, 498, 02007.

26. Mukhamedieva, D.T., Raupova, M.H. Model for forest ecosystems based on quantum optimization. E3S Web of Conferences. 2024, 498, 02006.

27. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

28. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

29. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

30. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

31. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

32. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

33. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

34. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).