Иррациональные уравнения и неравенства

А.Ибрагимов
О.Пулатов
С.Тухтамуродов
Узбекско-Финский педагогический институт

Аннотация: В этой статье используется новый метод решения некоторых иррациональных неравенств, поэтому студентам важно изучить дифференциальное исчисление. Использование дифференциального исчисления позволяет простым способом решать сложные уравнения и неравенства, также этот метод можно использовать для решения некоторых геометрических задач.

Ключевые слова: иррациональное неравенство, уравнение, среднее арифметическое и среднее геометрическое

Irrational equations and inequalities

A.Ibragimov
O.Pulatov
S.Tukhtamurodov
Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Abstract: This article uses a new method for solving some irrational inequalities, so it is important for students to study differential calculus. The use of differential calculus allows you to solve complex equations and inequalities in a simple way, and this method can also be used to solve some geometric problems.

Keywords: irrational inequality, equation, arithmetic mean and geometric mean

1. Если $a, b, c \in N$ и $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}= 3$, $a \cdot b \cdot c$ мы показываем, что это квадрат натурального числа.

Доказательство: Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}=3$ следует, что

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3$ От этого $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ равенство пропорций следует $a^2=b\cdot c$, $b^2=a\cdot c$, $c^2=a\cdot b$

$a^3 = a \cdot b \cdot c,\ b^3 = a \cdot b \cdot c,\ c^3 = a \cdot b \cdot c$ [1]

2. Найдите бесконечное множество естественных решений следующего уравнения.

$x^{2000} + y^{2000} + z^{2000} = u^{2001}$ (1)

Решение: (x=y=z=u=3) , x=y=z=3^k, u=3^n

$3^{2000k}+3^{2000k}+3^{2000k} = 3\times 3^{2000k} = 3^{2000k+1}$

Степень 2000k+1 = 2001n 2000k=2001n-1 будет.

Левая часть этого уравнения четная n=2m+1, n- нечетное число должно быть. 2000k=2001(2m+1)-1 2000k=4002m+2000 если мы найдем k отсюда: k = 2m + 1 + $\frac{m}{1000}$ у нас будет следующее.

Отсюда видно, что уравнение (1) имеет бесконечное число решений множества натуральных чисел, то есть m раз по 1000, при каждом значении находится n, а затем находится и k.

Это показывает, что данное уравнение имеет бесконечно много решений.

Дело доказано.

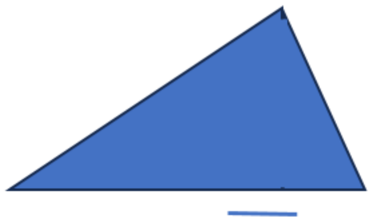
3. Его поверхность в произвольном треугольнике с периметром 6 sm.

Покажите, что S $\leq \sqrt{3}$.

Доказательство: (метод 1) пусть x,y,z — стороны треугольника

x+y+z $\geq 3\sqrt[3]{x \times y \times z}$, $\sqrt[3]{x \times y \times z} \leq 2$ если возвести обе части неравенства в 3-ю степень, x×y×z ≤ 8.

S = $\frac{1}{2}$xysinμ = $\frac{1}{2}$xzsinβ = $\frac{1}{2}$yzsinα



$S^3 = \frac{1}{8}(xyz)^2$×sinα×sinβ×sinμ ≤ ≤ $\frac{1}{8}$×8^2×sinα×sinβ×sinμ = =8×sinα×sinβ×sinμ.

α+β+μ =180^0 , sinα×sinβ×sinμ ≤ ≤ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, мы доказываем это.

sinα×sinβ×sinμ = $\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \times sin$μ = $\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + 1 - 1 + cos$μ]×sinμ = $cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2})$×sinμ - $sin^2(\frac{\mu}{2})$×sinμ ≤ sinμ - $sin^2\frac{\mu}{2}$×sinμ = sinμ(1-$sin^2\frac{\mu}{2}$) = $2cos^3\frac{\mu}{2}$×sinμ = $2(1-sin^2\frac{\mu}{2})^2$ × sin$\frac{\mu}{2}$.

f(x) = 2×$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ ×x находим максимальное значение функции.

f'(x) = $\sqrt{1-x^2}$×(2-8x^2), f'(x) = 0,

[1] A. Ibragimov, O. Pulatov, A. Qo'chqorov, Qiziqarli tenglama va tengsizliklar https://openscience.uz/index.php/sciedu/issue/view/54

x = 1, x = -1, x = ½, x = -1/2

$\sin(\frac{\mu}{2}) = x \geq 0$ потому что f(1) = 0 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ так sinα×sinβ×sinμ $\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $S^3 \leq (\sqrt{3})^3$ $S \leq \sqrt{3}.$

Способ 2. Треугольники с постоянным периметром. Покажем, что это равносторонний треугольник с наибольшей площадью внутри.

Это, в свою очередь, опирается на следующее алгебраическое доказательство.

Подтверждение: если сумма неотрицательных чисел x,y,z постоянна, то их произведение является наибольшим, если они равны.

Доказательство : x+y+z ≥3×$\sqrt[3]{x \times y \times z}$ x+y+z = p

если 3×$\sqrt[3]{x \times y \times z} \ \leq p$. Если x = y = z если они равны.

Способ 2. Если сумма двух неотрицательных чисел постоянна, то их произведение наибольшее, поэтому они должны быть равны. x+y = p, x = p-y; Квадратичная функция x×y = (p-y)k принимает максимальное значение при y = p/2, что дает x = p/2. x = y =p/2, x×y = $\frac{p^2}{4}$

Оно будет самым большим.

Теперь мы применим его к подтверждению

x+y+z=p

x+(y+z)=p   y+z=x=p/2

(x+y)+z=p   x+y=z=p/2

(x+z)+y=p   x+z=y=p/2

Это подтверждение было доказательством.

Основываясь на этом подтверждении, мы решаем проблему двумя способами.

Пусть стороны треугольника равны x,y,z p=x+y+z>6; S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p=(a+b+c)/2 ,

S=$\sqrt{p/2(\frac{p}{2}-x)(\frac{p}{2}-y)(\frac{p}{2}-z)}$ =$\sqrt{3(3-x)(3-y)(3-z)}$

$(3-x)+(3-y)+(3-z)$=9-(x+y+z)=3 из этого

$(3-x)(3-y)(3-z)$ 3-x=3-y=3-z является наибольшей, а поскольку x=y=z, т.е. x=y=z=2, равносторонняя поверхность является наибольшей

Проблема доказана:

4. Площадь поверхности. Для произвольного треугольника с числом $\sqrt{3}\ sm^2$ рассмотрим площадь, ограниченную следующим числом. (Доказательство выше)

Решение: Всегда справедливо следующее утверждение:

Доказательство: Если произведение нескольких отрицательных чисел постоянно, то их (+) наименьшее, если эти числа равны.

Вот и все S = $\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{3}$

p(p-x)(p-y)(p-z) = 3 x,y,z стороны треугольника

p-x = p×y = p-z так x = y = z .

p-x = p×y = p-z = 3×p - (x+y+z) = p, p = $\frac{3x}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3z}{2}$ будет самым маленьким.

p$(p-x)^3$ = 3 так p$(p-\frac{2}{3}p)^3$ = p×(p^3/27) = p^4/27 = 3

p^4= 81 отсюда, проведя обе части до корня четвертой степени,

нетрудно видеть, что в результате p = 3.

Пусть треугольник с периметром 6 см (p = 6) равен 6 ≤ p ≤ ∞.

Доказательство доказательства основано на теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом значениях.

Для произвольного n∈N оно определяется формулой a_n = n^2 + n +1

Умножение произвольных двух последовательных членов последовательности, докажите, что эта последовательность равна некоторому члену последовательности.

$a_n = n^2$+n+1, $a_{n+1} = (n+1)^2$ + (n+1) +1;

$a_n \times a_{n+1}$ = (n^2+n+1)*(n^2+3n+3) = $n^4+4n^3+7n^2$+6n+3=

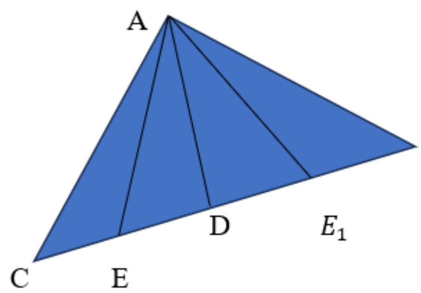
= $n^4+4n^3+6n^2+4n+1+n^2+2n+1+1$

приводим его к виду квадрата определенного числа, как указано выше.

Так, $(n+1)^4+(n+1)^2+1$ следует, что.

5. ΔABC , AD медиана BC/EC = 2/1 в пропорции $\measuredangle ADC$ = ∡BAE

∡BAE = ?



Решение: ∡ABC = ∡OAE и ∡BED, ΔAED и ΔBAE ,ΔAED похожий ΔBAE пусть треугольники будут подобны. CD = 3x, BC =2x, CE = x,

BD = DC = $\frac{3x}{2}$ так ED = ED-BD = 2x - $\frac{3x}{2} = \frac{x}{2}$.

На основании подобия треугольника:

$\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{DE}$ так $(AE)^2 = AE \times DE = 2x \times \frac{x}{2} = x^2$.

AE = x = CE, $\Delta AEC - E$ на стороне DB равносторонний точка и она заключается в следующем ED =DE_1 $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{AD} = 2$. По сходству:

Кроме $\frac{BE_1}{E_1D} = 2$, $\frac{AD}{AB} = \frac{E_1D}{E_1B}$ AE_1 - биссектриса отсюда следует, что это. ED = DE_1 ∠EAD = ∠DAE_1 $=$ ∠E_1AB = β.

AE = AE_1 = x = E_1B , ∠ABD = β

∠ACE = μ , 2α + 4β =180 , α = 90- 2β по теореме синусов : $\frac{AE}{sin\beta} = \frac{BE}{sin3\beta}$, $\frac{sin3\beta}{sin\beta}$ = 2.

$\frac{sin\beta(4cos^2\beta-1)}{sin\beta}$ = 2 давайте здесь сокращать sinβ,

Как результат: $4cos^2\beta$ -1 = 2, $4cos^2\beta$ = 3 cosβ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ следует, что Поэтому нетрудно узнать, что β = 30^0.

μ = 30^0 ∠ACE = 30^0

7. 0 $\leq a, b, c, d \leq 1$, ab +bc+abcd - a-b-abc-bcd

Найдите максимальное значение выражения.

Решение: ab+bc+abcd - a- b- abc-bcd = b(a+b+acd) -b(a-1+c(1-a)+cd(a-1)) - a = =b(a-1)(1-c+cd) -a ≤ 0 и a-1 ≤ 0; -a ≤ 0

Таким образом, он равен нулю в своем наибольшем значении..

8. a+b+c = 2 a = 2-b-c выражение $a^2 + \ b^2 + c^2 + +2abc \ \leq 2$ следует из

$$(2-b-c)^2 + \ b^2 + c^2 + 2(2-b-c)bc = 4 + b^{\ 2} + c^2$$

-16bc +2bc +b^2+ c^2+4bc $= 2b^2 + 2c^2 - 2b^2c - 2bc^2 + 6bc - -4b - 4c + 4 = 2b^2 + 2c^2 + 4bc + 2bc - 2b^2c - 2bc^2$ - 4(b+c-1) = $2(b+c)^2 + 2bc(1-c-b) - 4(b+c-1) =$

= $2(b+c)^2 + (b+c-1)(-2bc-4) \ < 2(b+c)^2 \ < 2.$[2]

будет.

(потому что b+c >1, что следует из a,b,c <1.) Неравенство доказано.

Использованная литература

[1] A.V.Pogorelov, Analitik geometriya., T.O'qituvchi,, 1983 y.

[2] Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Джумаев Максуд, «Обучение умениям доказать при изучении курса алгебры,» *Достижения науки и образования,* т. 2 (24), № 24, pp. 52-53, 2018.

[3] Rajabov F.,Nurmatov A.,Analitik, geometriya va chizikli algebra, T.O'qituvchi, 1990y.

[4] OU Pulatov, MM Djumayev, «In volume 11, of Eurasian Journal of Physics,,» *Development Of Students' Creative Skills in Solving Some Algebraic Problems Using Surface Formulas of Geometric Shapes,* т. 11, № 1, pp. 22-28, 2022/10/22.

[2] AM Ibragimov, OU Pulatov, SZ Tokhtamurodov, Using trial equations in proving inequalities, Neo ScientificPeer Reviewed JournalVolume 16, November,2023, UZBEKISTAN-FINLAND PEDAGOGICAL INSTITUTE

[5] Курбон Останов, Ойбек Улашевич Пулатов, Алижон Ахмадович Азимов, «Вопросы науки и образования,» *Использование нестандартных исследовательских задач в процессе обучения геометрии,* т. 1, № 13, pp. 120-121, 2018.

[6] АА Азимзода, ОУ Пулатов, К Остонов, «Актуальные научные исследования и разработки,» МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКА, т. 1, № 3, pp. 297-300, 2017.

[7] OU Pulatov, HS Aktamov, MA Muhammadiyeva, «Development of Creative Skills of Students in Solution of Some Problems of Vectoral, Mixed and Double Multiplications of Vectors,» *Eurasian Research Bulletin,* т. 14, № https://www.geniusjournals.org/index.php/erb/article/view/2659, pp. 224-228, 2022/11/24.

[8] AM Ibragimov, OU Pulatov, SZ Tokhtamurodov, Using trial equations in proving inequalities, Neo ScientificPeer Reviewed JournalVolume 16, November,2023, UZBEKISTAN-FINLAND PEDAGOGICAL INSTITUTE

[9] A. Ibragimov, O. Pulatov, A. Qo'chqorov, Qiziqarli tenglama va tengsizliklar https://openscience.uz/index.php/sciedu/issue/view/54

[10] Джумаев М., Пулатов О. У., Остонов К. Использование сведений о дедуктивном строении математики на уроках //ББК 72 Р101. - 2017., Использование сведений о дедуктивном строении математики на уроках, г.Астана, Казахстан: Научно-издательский центр «Мир науки», 2017.