O‘zgarmas koeffisientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemalarining holatlar tekisligi

Dilmurod Toxir o‘g‘li Xusenov
Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya: Uslubiy maqolada muxtor oddiy differensial tenglamalar sistemalari trayektoriyasining muhim xossalari, muxtor sistemaning holatlar fazosi, chiziqli o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi, muvozanat holati va turg‘unligi o‘rganilgan. Bir nechta misollar yechib ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: chiziqli o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli sistema, xos son, maxsusmas almashtirish, qo‘shma kompleks son, Dekart koordinatasi, vektorl, trayektoriya, parabola, muvozanat nuqta, fazali portret

State plane of systems of linear homogeneous differential equations with invariant coefficients

Dilmurod Toxir oglu Xusenov
Bukhara State University

Abstract: The methodological article examines the essential properties of the trajectories of systems of autonomous ordinary differential equations, the state space of an autonomous system, the state plane, the equilibrium state and stability of a homogeneous system with linearly invariant coefficients. Several examples have been solved.

Keywords: homogeneous system with linear invariant coefficients, eigenvalue, nonspecific replacement, conjugate complex number, Cartesian coordinate, vector, trajectory, parabola, equilibrium point, phase portrait

Ushbu

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{cases} \quad (1)$$

chiziqli o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli sistema berilgan bo‘lsin. Bu sistemaning determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bo‘lib, (1) sistema uchun koordinata boshi (0,0) muvozanat nuqta bo‘ladi. Ammo undan boshqa muvozanat holatlar ham bo‘lishi mumkin. Agar $D \neq 0$ bo‘lsa,

(1) sistemaning koordinata boshidan boshqa muvozanat nuqtasi bo‘la olmaydi. Agar $D \neq 0$ bo‘lsa, ravshanki, $A = \left(a_{ij}\right), i, j = 1,2$ matritsaning har ikki xos sonlari noldan farqli bo‘ladi.

Hozir biz A matritsaning xos sonlariga qarab, (1) sistemaning ko‘rinishini soddalashtirishni ko‘ramiz [1-15].

a) *A matritsaning xos sonlari haqiqiy, har xil va noldan farqli.* Ularni λ_1 va λ_2 deylik. Bu (1) sistemani maxsusmas almashtirish yordamida

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad (2)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Shu munosabat bilan quyidagi almashtirishni bajaraylik:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Hosilalarni hisoblab, (1) dan foydalanamiz, x_1 va x_2 lar oldidagi koeffisientlarni tenglashtirsak, ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{21}\beta = 0, \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

va

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)\gamma + a_{21}\delta = 0, \\ a_{12}\gamma + (a_{22} - \lambda_2)\delta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

sistemalarni hosil qilamiz. Ravshanki, λ_1 va λ_2 uchun

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0, i = 1,2,$$

bunda

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

(4) va (5) sistemalar α, β va γ, δ larga nisbatan trivial bo‘lmagan yechimlarga ham ega. Xususan,

$$\alpha = a_{21}, \beta = -(a_{11} - \lambda_1); \; \gamma = a_{21}, \delta = -(a_{11} - \lambda_2) \quad (6)$$

deb tanlasa bo‘ladi. Agar (6) tengliklardan foydalansak, (3) almashtirish maxsusmas bo‘la oladimi? Shuni tekshiramiz:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -a_{21}(a_{11} - \lambda_2) + (a_{11} - \lambda_1)a_{21} = a_{21}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Bundan $a_{21} \neq 0$ bo‘lganda $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ekani kelib chiqadi. Agar $a_{21} = 0$ bo‘lsa, $a_{12} = 0$ bo‘lganda (1) sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{21}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases}$$

ko‘rinishda, ya’ni (2) ko‘rinishida yozilgan bo‘ladi. Endi agar $a_{21} = 0$ bo‘lib, $a_{12} \neq 0$ bo‘lsa, u holda (1) sistema ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 \end{cases}$$

ko‘rinishni ega bo‘ladi. Bunda x_1 va x_2 lar rolini almashtirsak

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{22}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{12}x_1 + a_{11}x_2 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu (2) sistema ko‘rilayotgan holda (1) sistemaning kanonik ko‘rinishi deyiladi.

b) *A matritsaning xos sonlari qo‘shma kompleks*. Ularni $\lambda_1 = \mu - i\nu, \nu \neq 0$ deylik. Avvalo (6) qiymatlardan foydalansak, (3) almashtirishni bunday yozish mumkin:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_1)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \lambda_2)x_2. \end{cases}$$

Shu almashtirish formulalari λ_1, λ_2 lar kompleks bo‘lganda o‘rinli. λ_1 va λ_2 lar o‘rniga o‘z ifodalarini qo‘yamiz:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu + i\nu)x_2. \end{cases} \quad (7)$$

Bundan, agar

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + iu_2, \\ y_2 = u_1 - iu_2 \end{cases} \quad (8)$$

deb belgilasak,

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = \mu u_1 - \nu u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt} = \nu u_1 + \mu u_2 \end{cases} \quad (9)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Shu (9) sistema berilgan sistemaning xos sonlari kompleks bo‘lgan holda kanonik ko‘rinishidan iborat.

Albatta, (9) sistemani integrallab, (8) formulalar orqali $x_1(t)$ va $x_2(t)$ yechum topiladi.

c) *A matritsaning xos sonlari o‘zaro teng va noldan farqli*. Ko‘rilayotgan holda $\lambda_1 = \lambda_1 \neq 0$. $D(\lambda) = 0$ tenglamadan $\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$ ekani kelib chiqadi. Bu holda ham a) holdagi kabi mulohazalar yuritib, berilgan sistemani uning koeffisientlariga qarab, xususan, ushbu

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1(y_1 + y_2) \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 \end{cases}$$

kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

d) *A matritsaning xos sonlari teng va noldan iborat, ya’ni* $\lambda_1 = \lambda_1 = 0$. Bu holda kanonik ko‘rinish quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = a(x_1 - x_2) \end{cases} \text{yoki} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ y_1 = y_2 = x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{21} = 0, a_{12} \neq 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_2, \\ a_{12} = 0, a_{21} \neq 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{21} = a_{12} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Endi kanonik ko‘rinishda yozilgan ikkinchi tartibli chiziqli sistemalarning trayektoriyalarini holatlar tekisligida o‘rganamiz.

A. *A matritsaning xos sonlari haqiqiy, har xil va noldan farqli.* Xos sonlarni λ_1 va λ_2 desak, ularga mos kelgan chiziqli erkli xos vektorlarni topish mumkin [1]. Shuning uchun (1) sistemaning umumiy yechimi

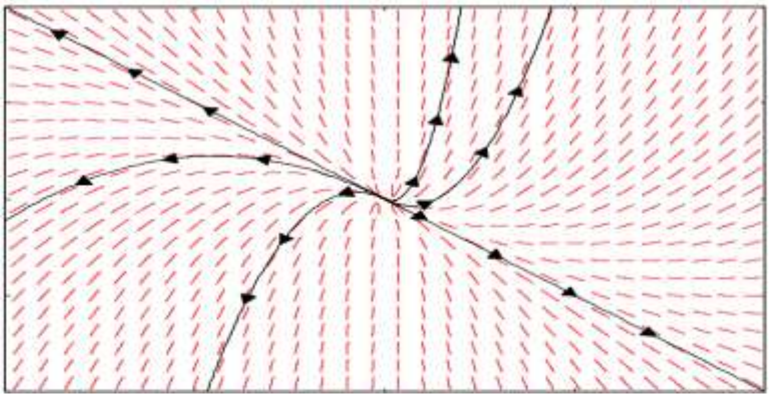
$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \ (11)$$

ko‘rinishda yoziladi. Uni yana

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)} \ (12)$$

(bunda $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$) (13)

ko‘rinishda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo‘yicha yoyib yozish mumkin. ξ_1 va ξ_2 sonlar holat tekisligida to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalaridan iborat bo‘lishi shart emas, bu $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo‘yicha yo‘nalgan o‘qlarga bog‘liq. Holatlar tekisligini P deylik. Unda ξ_1 va ξ_2 o‘qlar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi (1-chizma).



1-chizma

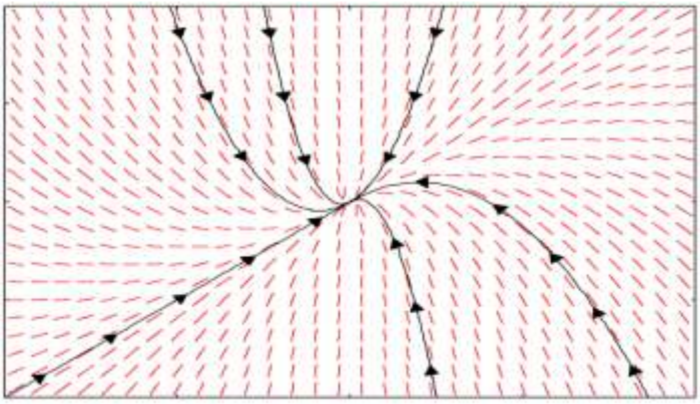
Endi (2) sistemaning trayektoriyalarini tasvirlashga o‘tamiz. Avval $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ yoki $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin. (13) dan ko‘rinib turibdiki, birinchi chorakda chizilgan trayektoriyalar yordamida qolgan chorakdagi trayektoriyalarni ham yozish mumkin [14-25].

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ bo‘lgan holda $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ bo‘lsa, $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \xi_2 = 0$ ya’ni ξ_1 o‘qiga egamiz. Unda $C_1 > 0$ bo‘lganda harakat o‘ngdan chapga, $C_1 < 0$ bo‘lganda esa chapdan o‘ngga bo‘ladi. Boshqacha aytganda, $t \to +\infty$ da C_1 ishorasidan qat’iy nazar, $\lim\limits_{t\to+\infty} \xi_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} = 0$ va koordinata boshidan ikki tomonda harakat shu nuqtaga yo‘nalgan bo‘ladi. Xuddi shu xususiyat ξ_2 o‘qiga ham tegishli (2-chizma).

Bundan 1-chorakda trayektoriyalarning qavariqligi pastga qaraganligi kelib chiqadi. Ushbu

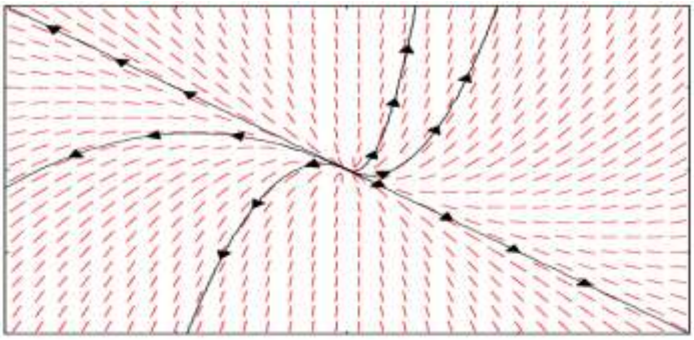
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = 0$$

munosabatdan $t \to +\infty$ da trayektoriyalar abtsissa o‘qiga urinishi chiqadi. 1-chorakda $\frac{d\xi_1}{dt} = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} < 0$, $\frac{d\xi_2}{dt} = C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} < 0$ bo‘lgani uchun ξ_1 va ξ_2 lar t ortishi bilan kamayadi va demak, harakat yuqoridan pastga hamda o‘ngdan chapga yo‘nalgan bo‘ladi (2-chizma).



2-chizma

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ bo‘lganda ham xuddi shu usul bilan trayektoriyalar chiziladi. Trayektoriyalar avvalgisidan farq qilmasa-da, ularda yo‘nalish teskari bo‘ladi (3-chizma).



3-chizma

Xos sonlarning $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ qiymatlariga mos manzara (2-chizma) *turg‘un tugun*, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ qiymatlariga mos manzara esa (3-chizma) *noturg‘un tugun* deyiladi.

Eslatib o‘tamizki, trayektoriyalar $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ bo‘lganda esa $t \to +\infty$ da, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ bo‘lganda esa $t \to -\infty$ da P^* tekislikda ξ_1 o‘qiga urinadi. P tekislikda bu hol λ_1 ga mos kelgan xos vektorning yo‘nalishi bilan bog‘liq bo‘ladi. Aytilgan xossalar misollarni ko‘rishda qulaylik tug‘diradi.

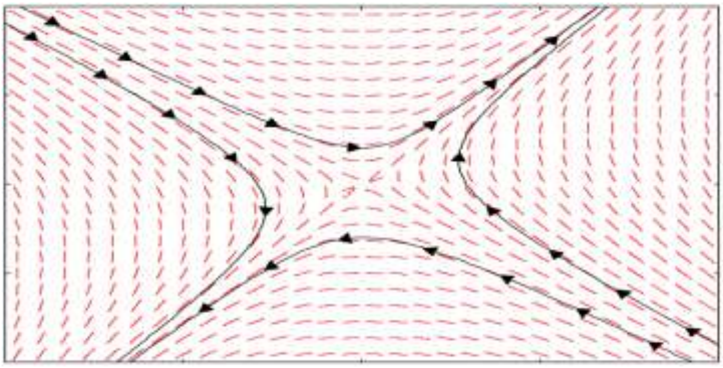
Xos sonlar uchun $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $(\lambda_1 < 0 < \lambda_2)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin deylik. Bu holda xos sonlar turli ishoralarga ega, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ bo‘lganda o‘q bo‘yicha harakat koordinata boshiga yo‘nalgan bo‘lib, ξ_2 o‘qi bo‘yicha harakat koordinata boshidan uzoqlashadi. Trayektoriyalarni qurish uchun ularni 1-chorakda qurish yetarli. Avval, qavariqlikni tekshiraylik, $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ bo‘lgani uchun $\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} > 0$ bo‘ladi. Demak, 1-chorakda qavariqlik pastga qaragan. Shunga o‘xshash ushbu

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)^2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}, \lim_{t\to+\infty} \xi_1(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \xi_2(t) = 0,$$

munosabatlarga egamiz. Bundan 1-chorakdagi trayektoriyalar parabolalarga o‘xshashligi va ularda harakat o‘ngdan chapga va pastdan yuqoriga yo‘nalganligi kelib chiqadi (4-chizma). Ushbu holda ham hosil bo‘lgan manzara *egar* deyiladi.



4-chizma

Endi shularga doir misollar ko‘rib chiqamiz.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

sistemaning trayektoriyalari va muvozanat nuqtasi atrofidagi fazali portreti tahlil qilinsin.

Yechish. A matritsani yozamiz: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Bu matritsaning xos sonlarini topamiz: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $(3 + \lambda)^2 - 4 = 0$. Bundan $3 + \lambda = \pm 2$ yoki $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$. Ravshanki, $\lambda_2 < \lambda_1, |\lambda_2| > |\lambda_1|$. Xos sonlar har xil va manfiy bo‘lgani uchun biz *turg‘un tugunga* egamiz. Uning uchun xos vektorlarni topish kerak. $\lambda_1 = -1$ ga mos xos vektor $h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$ ushbu $Ah^{(1)} = (-1)h^{(1)}$ yoki $\begin{pmatrix} 3h_1^{(1)} + h_2^{(1)} \\ 4h_1^{(1)} - 3h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}$ sistemadan topiladi. Ravshanki, biz $-2h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0$ tenglamaga egamiz va undan $h_1^{(1)}$ sistema uchun $h_1^{(1)} = 1, h_2^{(1)} = 2$ deb olish mumkin. Agar $h_1^{(1)} = -1, h_2^{(1)} = -2$ desak ham o‘sha yo‘nalish chiqariladi. Shunga o‘xshash $\lambda_2 = -5$ xos songa mos xos vektor topiladi:

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Absolyut qiymati bo‘yicha kichik xos son $\lambda_1 = -1$ bo‘lgani uchun trayektoriyalar shu xos songa mos vektor yo‘nalishiga $t \to +\infty$ da urinadi.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

sistema uchun $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ va xos sonlari $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ tenglamadan topiladi: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. $\lambda_1 = 1$ ga mos vektor $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ va $\lambda_2 = 5$ ga mos xos vektor esa $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan iborat xos sonlar turli va musbat bo‘lgani uchun biz *noturg‘un tugunga* egamiz. Trayektoriyalar $t \to -\infty$ da $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektor yo‘nalishiga koordinata boshida urinadi [24-30].

B. *A matritsaning xos sonlari kompleks*. Bu holda xos sonlar qo‘shma kompleks bo‘lib, ularni $\lambda = \mu + iv, \lambda = \mu - iv, v \neq 0$ deb belgilaymiz. v ni doim $v > 0$ deb qarash mumkin. Shu xos sonlarga mos xos vektorlar ham qo‘shma kompleks bo‘ladi. Agar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ lar haqiqiy vektor bo‘lsa, mos xos vektorlarni $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ deb belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$h = \frac{1}{2}\left(h^{(1)} - ih^{(2)}\right),$$

bunda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ lar chiziqli erkli, aks holda h va $\bar{h}$ lar chiziqli bog‘liq bo‘lar edi. Shuning uchun $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ haqiqiy vektorlarni P tekislikda xos yo‘nalishlar deb qarash mumkin.

Endi P^* tekislikda trayektoriyalarni quramiz. Ko‘rilayotgan holda berilgan sistemaning kanonik shakli ma’lum ((9) ga qarang):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu\xi_1 - v\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = v\xi_1 + \mu\xi_2. \end{cases}$$

Bu sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} \xi_1(t) = Ce^{\mu t}\, cos(vt + \gamma), \\ \xi_2(t) = Ce^{\mu t}\, sin(vt + \gamma) \end{cases}$$

ko‘rinishda yoziladi (C va γ ixtiyoriy o‘zgarmaslar). Unda t ni parametr deb qarasak, biz trayektoriyalarning parametrik tenglamasiga egamiz. Ularni qurish uchun qutb koordinatalariga o‘tish qulaylik tug‘diradi: $\xi_1(t) = \rho cos\varphi$, $\xi_2(t) = \rho sin\varphi$, ($\rho, \varphi$ qutb koordinatalari). Shuning uchun yuqorida yozilgan umumiy yechim

$$\rho = Ce^{\mu t}\ (C > 0), \varphi(t) = vt + \gamma\ (v > 0)\ (14)$$

ko‘rinishni oladi. Bu munosabatlarga ko‘ra, t o‘sishi bilan φ burchak ham o‘sadi (chunki $v > 0$ deb qarayapmiz). Boshqacha aytganda, koordinata boshidan chiqadigan nur $(\xi_1(t),\ \xi_2(t))$ nuqtadan o‘tib sekundiga φ radian tezlik bilan soat strelkasiga qarshi yo‘nalishda buriladi. (14) dan t ni chiqaramiz:

$$\rho = Ke^{\frac{\mu}{\nu}\gamma}, (15)$$

bunda $K = Ce^{-\frac{\mu}{\nu}\gamma} = const$. Trayektoriyalarning ko‘rinishi $\mu > 0$, $\mu < 0$, $\mu = 0$ qiymatlarga qarab har xil bo‘ladi. $\mu < 0$ bo‘lsin, $\nu > 0$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{t\to\infty} p = 0$, chunki $\frac{\mu}{\nu} < 0$ va $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi = +\infty$. Demak, $t \to +\infty$ da holat nuqtasi koordinata boshiga yaqinlashadi.

Hosil bo‘lgan fazali portret *turg‘un fokus* deyiladi. Agar $\mu = 0$ bo‘lsa, yuqoridagi kabi mulohazalar yordamida *noturg‘un fokus* fazali portretni qurish mumkin.

Agar $\mu = 0$ bo‘lsa, (15) formuladan $p = K$ $(K = \ const)$ kelib chiqadi. Bu esa, markazi koordinata boshida bo‘lgan kontsentrik aylanalardan iborat [24-39].

Hosil bo‘lgan fazali portret *markaz* deb ataladi.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

sistema uchun $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ va $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ tenglamadan $\lambda = 3 \pm 2i$ ekanligini topamiz. Demak, $\mu = 3, \nu = 2, \lambda = 3 + 2i$ xos son uchun xos vektorni izlaymiz.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3+2i)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} 3h_1 - h_2 \\ 4h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2i)h_1 \\ (3+2i)h_2 \end{pmatrix}$$

Bundan

$$\begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_1, \\ 4h_1 + 3h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} h_2 = 2ih_1, \\ 4h_1 = 2ih_2. \end{cases}$$

Oxirgi ikki tenglikning biri ikkinchisidan hosil qilinishi mumkin. Shuning uchun $h_1 = 1,\ h_2 = -2i$ deb tanlansa bo‘ladi. Endi $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektorni bunday tasvirlaymiz:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right].$$

Ko‘rinadiki, $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ va $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorlar izlangan bo‘lib, ular abtsissa va koordinata o‘qlari bo‘yicha yo‘nalgandir. Ko‘rilayotgan misolda $\mu = 3 > 0$ bo‘lgani uchun biz *noturg‘un fokus* fazali portretiga egamiz.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 10x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

sistema uchun

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ va } \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i, \mu = -1 < 0, \nu = 3.$$

Avvalo biz $\mu < 0$ bo‘lganidan *turg‘un fokus* fazali portretiga egamiz. Endi xos vektorlarni topaylik. Sodda hisoblashlar ko‘rsatadiki,

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-1+3i)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

yoki

$$\begin{cases} -2h_1 + 10h_2 = -h_1 + 3ih_1, \\ -h_1 = -h_2 + 3ih_2 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} (-1-3i)h_1 + 10h_2 = 0, \\ -h_1 + (-1+3i)h_2 = 0. \end{cases}$$

Oxirgi ikki tenglik o‘zaro ekvivalent. Shuning uchun $h_1 = 10, h_2 = 1 + 3i$ deb tanlanishi mumkin. Endi $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektor uchun quyidagiga egamiz:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right].$$

Bundan haqiqiy xos vektorlar sifatida

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

vektorlarni, yoki

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorlarni olish mumkin.

C. *A matritsaning xos sonlari teng va noldan farqli.* A matritsaning xos sonini λ deylik. Unga mos xos vektorlar uchun ikki hol:

1-hol. P tekislikda shunday ikkita chiziqli erkli $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar mavjudki, ular uchun ushbu

$$Ah^{(1)} = \lambda\, h^{(1)}, Ah^{(2)} = \lambda\, h^{(2)} \quad (16)$$

tengliklar o‘rinli.

2-hol. P tekislikda shundiy ikkita chiziqli erkli $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar mavjudki, ular uchun ushbu

$$Ah^{(1)} = \lambda\, h^{(1)}, Ah^{(2)} = \lambda\, h^{(2)} + h^{(1)} \quad (17)$$

tengliklar o‘rinli.

Shu (16) yoki (17) tengliklarni qanoatlantiradigan $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ chiziqli erkli vektorlarning (bazisning) mavjudligini ko‘rsatamiz. $h^{(1)}$ A matritsaning xos vektori bo‘lib, $h^{(2)}$ unga kollinear bo‘lmagan ixtiyoriy vektor bo‘lsin. U holda

$$h^{(1)} = \lambda\, h^{(1)} \text{ va } Ah^{(2)} = \alpha h^{(1)} + \beta h^{(2)}$$

tengliklarga egamiz. Ulardan $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ larni topish uchun sistema sifatida foydalanish mumkin. Bu sistemaning matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

bo‘lib, xos sonlari λ va β dan iborat. Shuning uchun $\beta = \lambda$. Agar $\alpha = 0$ bo‘lsa, (16) tengliklarga egamiz, $\alpha \neq 0$ bo‘lganda esa tengliklarda $h^{(1)}$ vektorni unga kollinear $\alpha h^{(1)}$ bilan almashtiramiz. Shu bilan (16) yoki (17) larni qanoatlantiradigan bazis vektorlarning mavjudligi isbot qilindi.

1-holda umumiy yechim

$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda t} = x^0 e^{\lambda t} \quad (18)$$

ko‘rinishida yoziladi.

Bu yechim uchun $x(0) = x^0$. Biz $\lambda \neq 0$ holni ko‘rayotganimiz uchun (18) yechim koordinata boshidan chiqadigan yarim to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi. Ularda harakat $\lambda < 0$ bo‘lganda koordinata boshiga yo‘nalgan bo‘lib, $\lambda > 0$ bo‘lganda esa yo‘nalish buning aksi bo‘ladi [25-39].

Yuqorida ko‘rilgan hollarda $\lambda < 0$ bo‘lganda *turg‘un tug‘ilma tugun*, $\lambda > 0$ bo‘lganda esa *noturg‘un tug‘ilma tugun* fazali portretlariga egamiz.

2-holda umumiy yechim

$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 (h^{(1)} t + h^{(2)}) e^{\lambda t}$$

ko‘rinishda yoziladi. Buni yana bazislar bo‘yicha yoyib yozish ham mumkin:

$$x = (C_1 + C_2 t) h^{(1)} e^{\lambda t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda t}.$$

Bundan P tekislikda trayektoriyalar tenglamasini topamiz:

$$\xi_1 = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Nukus, May 2-3, 2023, Стр.286-287.

2. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

3. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

4. Xaydar Raupovich Rasulov. Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation with mixed type. AIP Conf. Proc. 2781, 020016 (2023)

5. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

6. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

7. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

8. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

9. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

10. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), р.870-879.

11. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), р.81-96.

13. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

14. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.

15. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.

16. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), р.35-38.

17. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

18. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

19. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

20. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

21. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

22. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

23. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

24. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

25. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

26. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

27. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

28. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

29. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

30. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

31. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

32. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

33. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

34. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

35. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

38. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

37. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

38. 12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

39. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).