Некоторые решения, связанные с пределами и интегралами

А.Ибрагимов
О.Пулатов
С.Тухтамуродов
Узбекско-Финский педагогический институт

Аннотация: Лимиты и интегралы являются основными понятиями математического анализа, которые находят широкое применение как в теоретических исследованиях, так и в прикладных задачах. Понятие предела формирует основу для определения непрерывности, производной и интеграла, что делает его важным инструментом для моделирования и анализа динамических процессов.

Ключевые слова: лимит, интеграл, непрерывность, производная, определённый интеграл, неопределённый интеграл, предел последовательности, предел функции, численный метод, область интегрирования, свойства интеграла

Some solutions related to limits and integrals

A.Ibragimov
O.Pulatov
S.Tukhtamurodov
Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Abstract: Limits and integrals are the basic concepts of mathematical analysis, which are widely used both in theoretical research and in applied problems. The concept of a limit forms the basis for defining continuity, derivative and integral, which makes it an important tool for modeling and analyzing dynamic processes.

Keywords: limit, integral, continuity, derivative, definite integral, indefinite integral, limit of a sequence, limit of a function, numerical method, domain of integration, properties of an integral

1. b_n Пусть задан сходящийся предел, $\lim C_n = \lim (b_n - b_{n-1}) = \infty$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (n→ ∞) → 0 стремится к нулю

$C_n = n \times (b_n - b_n) = n$

$\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-n}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot 1/(\sqrt{n-1} \ +\sqrt{n})$ Если выражение nnn стремится к бесконечности, то оно становится равным нулю

$b_n = \frac{(-1)}{n} = 0$

$C_n = n \times (b_n - b_{n-1}) = n \times (\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}) = \frac{n \times (-1)^n}{n \times (n-1)} \times (n-1+n) =$

$= \frac{2n-1}{n-1} \cdot (-1)^n \ \to \exists \lim C_n.$

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to \ 0.$

$C_n = n(b_n - b_{n-1}) = \frac{(-1)^n}{n \times \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \times n \times (\sqrt{n-1} + \sqrt{n}) =$

$= (\frac{(-1)^n \times n \times \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \times n \times \sqrt{\frac{1}{n}}) \to \infty.$

Стремится к бесконечности. Доказано.

2. $\lim_{n\to\infty} \in_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \lim_{n\to\infty} \in_{k=1}^{n} (\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}) - (\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!}) = \frac{5}{3}.$

$\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(k+3)!} - \frac{1}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}.$

3. $\lim_{n\to\infty} (\frac{1^s+2^s+3^s+\ldots\ldots+n^s}{n^{s+1}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{n^{s+1}-(n-1)^{s+1}}$

$n^{s+1} = y_n$ Если равенство известно, и $\lim y_n = \infty$

Потому что $s+1 > 0$

$x_n = 1^s + 2^s + 3^s + \ldots\ldots + n^s$ из-за того, что:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{n^{s+1}-(n^{s+1}-(s+1)n^s+\ldots\ldots-1)} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{((S+1)n^s - \frac{(s+1)\times s \times n^{S-1}}{2!} + \ldots\ldots + 1)} = \frac{1}{(s+1) - \frac{(s+1)s}{2!n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^s}} = \frac{1}{s+1}.$

4. $\lim_{n\to\infty} \left[(2+\sqrt{3})^n\right] = 0$ Если равно нулю $\{x\} = x - [x]$

$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$

$\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = \{(3{,}7)^n\}$

$(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n - 2a_n = b_n\sqrt{3} - a_n;$

$2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ Равенство известно. $\{x\} = x - [x]$

$\{x\}$ = 1-$[x]$ 0< $\{a_1 - b_1 \times \sqrt{3}\}$ = 1 a- $\{(b_n\sqrt{3} - a_n\}$ = 1-$\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n - 2a_n\right\}$ = 1-$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - 2a_n\right\}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{2+\sqrt{3}\right\}^{n.}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} \times x_n - x_{n-1} \times x_{n+2}}{x_{n+1}^2 - x_1 \times x_{n+2}} = \alpha + \beta$ ($|\alpha|<|\beta|$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - x_{n-1} \times x_{n+1}}{x_{n+1}^2 - x_n \times x_{n-2}} = \alpha \times \beta$

Если => $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha$ ... ?

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$ = x Пусть будет,

$\frac{x_{n+1} \times x_n - x_{n-1} \times x_{n+2}}{x_{n+1}^2 - x_n \times x_{n+2}} = \alpha + \beta + \gamma_{\mathrm{n}} \lim \gamma'_n = 0$

$\frac{x_n^2 - x_n + x_{n+1}}{x_{n+1}^2 - x_n \times x_{n+2}} = \alpha \times \beta \times \gamma'_n \ \lim \gamma''_{n=0}$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} - \alpha + \frac{(x_{n+1} \cdot x_n - x_{n-1} \cdot x_{n+2}) \cdot x_{n+1} - x_n\, (x_{n+1}^2 - x_n \cdot x_{n+1})}{(x_n^2 - x_n \cdot x_{n+2}) \cdot x_{n+1}} = \beta + \gamma'_n$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} - \alpha + \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}(\alpha \cdot \beta + \gamma''_n) = \beta + \gamma'_n$

x - $\alpha + \frac{1}{x} \cdot (\alpha \cdot \beta + \gamma''_n) = \beta + \gamma'_n$. x = α

6. $\int_x^{x+1} f(x)dx \ \int_{x_0}^{x} f'(x)dx \ \leq \int_{x_0}^{x} dx$

$|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$

f$(x_0) + x_0 - x \ \leq f(x) \leq (f(x_0) - x_o) + x$

f(0) = f(1) = f(2) = f(3) … … … … = f(n). Если

P(o)=$\int$ 0)

P(1)= 1+$\int(o)$

P(2)=2+$\int(o)$

…. …. …. …. ….

P(n)=n+$\int(o)$

∃n,m ni m≤ $\int$(x) ≤M

m+x ≤ p(x) ≤ M+x ∀x ∈R

P(p(x))=p(x)+$\int(p(x))$

2m+x ≤ p(p(x)) ≤ 2M+x

…. …. …. …. …. …. (n-1)ta

(n-1)·m+x ≤ p(p(…..(p(x)….))≤ $(\mathrm{n}-1) \cdot \mathrm{M} + \mathrm{x}$

$\frac{n(n-1)}{2} m + nx \leq (a\mathrm{n}^2\mathrm{x}_\mathrm{n}) \leq \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}$ ·M+nx

$\frac{n(n-1)}{2n^2}$m+$\frac{x}{n} \leq Xn \leq \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2 \cdot \mathrm{n}^2} \cdot M + \frac{x}{n^2}$.

Использованная литература

1. Abdukarimov M., Axmedov J. - "Matematik analiz" Ushbu kitobda matematik analizning asosiy mavzulari, jumladan limitlar, uzluksizlik, hosilalar va integral tushunchalari keng yoritilgan.

2. To‘xtaboev M., Omonov N. - "Oliy matematika" Oliy matematikadan nazariy va amaliy masalalar to'plamini o'z ichiga oladi.

3. Xolmirzaev N., Qosimov O. - "Matematika fanidan amaliy qo‘llanma" Limit va integral mavzulariga oid amaliy masalalar to‘plami.

4. Г.М.Фихтенгольц - "Курс дифференциального и интегрального исчисления" (3 тома) Matematik analizning klassik asari. Limit va integral tushunchalari batafsil yoritilgan.

5. Paul's Online Math Notes - Calculus I, II, III