# Chiziqli va volterra bo‘lmagan kvadratik stoxastik operatorlarning superpozisiyasi haqida

Boboxon Mamurov
b.j.mamurov@buxdu.uz
Mohinur Shukurullayeva
Buxoro davlat universiteti

**Annotatsiya:** Chiziqli va kvadratik operatorlarning superpozitsiyasi o‘rganilgan. Qo‘zg‘almas nuqtalari topilgan va bu nuqtalarning tipi aniqlangan.

**Kalit so‘zlar:** chiziqli operatorlar, kvadratik stoxastik operatorlar, superpozitsiya, qo‘zg‘almas nuqtalar

# On the superposition of linear and non-volterra quadratic stochastic operators

Bobokhan Mamurov
b.j.mamurov@buxdu.uz
Mohinur Shukurullayeva
Bukhara State University

**Abstract:** The superposition of linear and quadratic operators is studied. Fixed points are found and the type of these points is determined.

**Keywords:** linear operators, quadratic stochastic operators, superposition, fixed points

Ixtiyoriy operatorlarning, jumladan kvadratik stoxastik operatorlarning ham qo‘zg‘almas nuqtalarini, ularning tiplarini va ularning tadbiqlarini o‘rganish muhim masalalardan hisoblanadi [1-15]. Kvadratik stoxastik operatorlar va ularning tadbiqlari bilan bog‘liq masalalar ustida muhim izlanishlar olib borilgan va hozirda ham olib borilmoqda, masalan:

1-ta’rif. Ta’rif 1Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A)$ elementlar ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$ bo‘lib

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

2-ta’rif. Faraz qilaylik, A va B - ikkita chiziqli operator bo‘lib, ulardan A E fazodan $E_1$ fazoga B esa $E_1$ fazodan $E_2$ fazoga amal qiladi. x$\in E$ elementga $E_2$

fazoning z=B(Ax) elementini mos qo‘yuvchi operatorga A va B operatorlarning ko‘paytmasi(superpozitsiyasi) deb ataladi.

E={1,2, .. . ,n} bo‘lsin.

1-ta’rif. $S^{n-1}$= { x=($x_1$, . . .,$x_n$)∈ $R^n$ : $x_i$ ≥0, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ =1} to‘plamga (n-1) o‘lchamli simpleks deb aytiladi.

Bunda har bir x∈ $S^{n-1}$ element E to‘plamda ehtimollik o‘lchovi bo‘lib, uni n ta elementdan iborat qandaydir biologik(fizik) tizim kabi talqin qilish mumkin.

3-ta’rif. Kvadratik stoxastik operator deb, V: $S^{n-1} \to S^{n-1}$

$$V : x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k}\, x_i x_j,$$

ko‘rinishdagi operatorga aytiladi, bunda $p_{ij,k} \geq 0$, $p_{ij,k}$ =$p_{ji,k}$, $\sum_{k=1}^{n} p_{ij,k}$=1.

4-ta’rif.Agar $\mathrm{V(x) = x}$ tenglik bajarilsa,$\mathrm{x \in S^{n-1}}$ nuqta kvadratik stoxastik operator V uchun qo‘zg‘almas nuqta deyiladi.

5-ta’rif. Agar V operatorning J Yakobiani λ qo‘zg‘almas nuqta birlik aylanasida hech qanday xos qiymatga ega bo‘lmasa λ qo‘zg‘almas nuqta giperbolik qo‘zg‘almas nuqta deyiladi.

Giperbolik qo‘zg‘almas nuqtalarni turlari:

Agar matritsaning Yakobiani J(λ) ning barcha xos qiymatlarida absolyut qiymat bo‘yicha birdan kichik bo‘lsa, qo‘zg‘almas nuqta (λ) tortuvchi deb ataladi.

Agar barcha xos qiymatlarda birdan katta bo‘lsa itaruvchi, qolgan barcha holatlarda egar deyiladi [16-27].

Bu maqolada satr bo‘yicha stoxastik bo‘lgan

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \beta & \gamma & 1-\beta-\gamma \end{pmatrix}$ matrisa bilan aniqlanuvchi chiziqli operator va

$V: \begin{cases} x_1 = x_1^2 + 2x_2x_3 \\ x_2 = x_2^2 + 2x_1x_3 \\ x_3 = x_3^2 + 2x_1x_2 \end{cases}$ Volterra bo‘lmagan kvadratik stoxastik operatorlarning superpozisiyasi B=A(V(x)) operatorning qo‘zg‘almas nuqtalari va ularning tiplari o‘rganiladi.

B operatorning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$B = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2x_3 \\ \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2(\alpha x_2x_3 + (1-\alpha)x_1x_3) \\ \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + (1-\beta-\gamma)x_3^2 + 2(\beta x_2x_3 + \gamma x_1x_3 + (1-\beta-\gamma)x_1x_2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$B$ operatorning qo‘zg‘almas nuqtasini topamiz ($Bx = x$):

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2x_3 = x_1 \\ \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2(\alpha x_2x_3 + (1-\alpha)x_1x_3) = x_2 \\ \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + (1-\beta-\gamma)x_3^2 + 2(\beta x_2x_3 + \gamma x_1x_3 + (1-\beta-\gamma)x_1x_2) = x_3 \end{cases} \quad (2)$$

(2) sistemaning 1- tenglamasini $x_1$ ga nisbatan yechamiz:

$$x_1^2 + 2(1 - x_1 - x_3)x_3 = x_1;\ x_1^2 - 2x_3x_1 - 2x_3^2 = x_1;\ x_1^2 - (2x_3+1)x_1 - 2(x_3^2 - x_3) = 0$$

$$x_{1(1,2)} = \frac{2x_3+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x_3+1}{2}\right)^2 + 2(x_3^2 - x_3)} = x_3 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4x_3^2 + 4x_3 + 1 + 8x_3^2 - 8x_3} =$$

$$x_3 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{12x_3^2 - 4x_3 + 1};\ 12x_3^2 - 4x_3 + 1 \geq 0. D = 16 - 48 < 0,$$

$a = 12 > 0$; Barcha $x_3$ lar uchun

$$0 \leq x_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12x_3^2 - 4x_3 + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x_3 \leq 1$$

$x_1 = x_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12x_3^2 - 4x_3 + 1}$ deb olamiz, chunki,

$$0 \leq x_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12x_3^2 - 4x_3 + 1} \leq 1$$

Tengsizlik faqat $x_3 = 0$ bo‘lganda o‘rinli.

Bu holda $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$, $(1;0;0) \in S^2$, ammo u (2) sistemaning 2-tenglamasini qanoatlantirmaydi ($\alpha = 0$)

Endi (2) sistemaning 2-tenglamasini $x_2$ ga nisbatan yechamiz:

$x_1 = 1 - x_2 - x_3$ bo′lgani uchun

$$\alpha(1 - x_2 - x_3)^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2\alpha x_2x_3 + 2(1-\alpha)(1 - x_2 - x_3)x_3 = x_2$$

$$\alpha\big((1 - x_2) - x_3\big)^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2\alpha x_2x_3 + 2x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 - 2\alpha x_3 + 2\alpha x_2x_3 + 2\alpha x_3^2 = x_2$$

$$\alpha(1 - 2x_2 + x_2^2 - 2(1-x_2)x_3 + x_3^2) + (1-\alpha)x_2^2 + 4\alpha x_2x_3 + 2x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 - 2\alpha x_3 + 2\alpha x_3^2 = x_2$$

$$\alpha - 2\alpha x_2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_3 + 2\alpha x_2x_3 + \alpha x_3^2 + x_2^2 - \alpha x_2^2 + 4\alpha x_2x_3 + 2x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 - 2\alpha x_3 + 2\alpha x_3^2 = x_2$$

$$x_2^2 + (6\alpha x_3 - 2x_3 - 2\alpha - 1)x_2 + (3\alpha - 2)x_3^2 - (4\alpha - 2)x_3 + \alpha = 0$$

$$x_{2(1,2)} = -\left(3\alpha x_3 - x_3 - \alpha - \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(3\alpha x_3 - x_3 - \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - (3\alpha - 2)x_3^2 + (4\alpha - 2)x_3 - \alpha} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \left(3\alpha x_3 - x_3 - \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - 3\alpha x_3^2 + 2x_3^2 + 4\alpha x_3 - 2x_3 - \alpha = \\ 9\alpha^2 x_3^2 + x_3^2 + \alpha^2 + \frac{1}{4} - 6\alpha x_3^2 - 6\alpha^2 x_3 - \\ -3\alpha x_3 + 2\alpha x_3 + x_3 + \alpha - 3\alpha x_3^2 + 2x_3^2 + 4\alpha x_3 - 2x_3 - \alpha = \\ = 9\alpha^2 x_3^2 + x_3^2 - 6\alpha x_3^2 - 3\alpha x_3^2 + 2x_3^2 - 6\alpha^2 x_3 - \\ -\alpha x_3 + x_3 + 4\alpha x_3 - 2x_3 + \alpha^2 + \frac{1}{4} = \\ (9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x_3^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x_3 + \alpha^2 + \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$= -\left(3\alpha x_3 - x_3 - \alpha - \frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x_3^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x_3 + \alpha^2 + \frac{1}{4}};$$

$$(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x_3^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x_3 + \alpha^2 + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$x_{3(1,2)} = \frac{(3\alpha - 6\alpha^2 - 1) \pm \sqrt{3\alpha - 2}}{2(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)}\ ;\ 3\alpha - 2 \geq 0\ \alpha \geq \frac{2}{3}$$

$$3\alpha^2 - 3\alpha + 1 > 0, (D = 9 - 12 < 0, 3 > 0) \text{ barcha } \alpha \text{ lar uchun}$$

$$-(3\alpha - 6\alpha^2 - 1) = 6\alpha^2 - 3\alpha + 1 > 0\ (D = 9 - 24 < 0, 6 > 0)$$

$$0 \leq x_3 \leq \frac{6\alpha^2 - 3\alpha + 1 - \sqrt{3\alpha - 2}}{6(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}\ ;\ \frac{6\alpha^2 - 3\alpha + 1 - \sqrt{3\alpha - 2}}{6(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)} \leq x_3 \leq 1$$

$$\alpha \geq \frac{2}{3} \text{ bo'lganda } x_1 + x_2 + x_3 = 1, (x_3 = x)$$

$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12x^2 - 4x + 1} - \left(3\alpha x - x - \alpha - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x + \alpha^2 + \frac{1}{4}} + x = 1;$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12x^2 - 4x + 1} - 3\alpha x + x + \alpha + \frac{1}{2} - \sqrt{(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x + \alpha^2 + \frac{1}{4}} = -2x$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{12x^2 - 4x + 1} + \alpha - \sqrt{(9\alpha^2 - 9\alpha + 3)x^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x + \alpha^2 + \frac{1}{4}} = 3(\alpha - 1)x$$

$$2\alpha - 6(\alpha-1)x - \sqrt{12x^2-4x+1}$$
$$= 2\sqrt{(9\alpha^2-9\alpha+3)x^2+(3\alpha-6\alpha^2-1)x+\alpha^2+\frac{1}{4}}$$

$$4\alpha^2+36(\alpha-1)^2x^2+12x^2-4x+1-24\alpha(\alpha-1)x-4\alpha\sqrt{12x^2-4x+1}+$$
$$12(\alpha-1)x\sqrt{12x^2-4x+1}$$
$$=4\left((9\alpha^2-9\alpha+3)x^2+(3\alpha-6\alpha^2-1)x+\alpha^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$4\alpha^2+36(\alpha^2-2\alpha+1)x^2+12x^2-4x+1-24\alpha^2x+24\alpha x+4(3(\alpha-1)x$$
$$-\alpha)\sqrt{12x^2-4x+1}$$
$$=36\alpha^2x^2-36\alpha x^2+12x^2+12\alpha x-24\alpha^2x-4x+4\alpha^2+1$$

$$36\alpha^2x^2-72\alpha x^2+36x^2-24\alpha^2x+24\alpha x+4(3(\alpha-1)x-\alpha)\sqrt{12x^2-4x+1}$$
$$=$$
$$=36\alpha^2x^2-36\alpha x^2+12\alpha x-24\alpha^2x$$

$$3(\alpha-1)x-\alpha)\sqrt{12x^2-4x+1}=9\alpha x^2-9x^2-3\alpha x$$

$$3(\alpha-1)x-\alpha)\sqrt{12x^2-4x+1}=3x(3\alpha x-3x-\alpha)=3x(3(\alpha-1)x-\alpha)$$

$$(3(\alpha-1)x-\alpha)\left(\sqrt{12x^2-4x+1}-3x\right)=0$$

$$3(\alpha-1)x-\alpha=0 \implies x=\frac{\alpha}{3(\alpha-1)}<0, \frac{2}{3}\le\alpha<1 \text{ bo'lganda}$$

$$\sqrt{12x^2-4x+1}=3x \implies 12x^2-4x+1=9x^2 \implies 3x^2-4x+1=0$$

$$D=16-12=4\ x_{3_{(1)}}=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}\ x_{3_{(2)}}=\frac{4+2}{6}=1$$

$$x_{1_{(1)}}=x_{3_{(1)}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{12{x_{3_{(1)}}}^2-4x_{3_{(1)}}+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{12\cdot\frac{1}{9}-\frac{4}{3}+1}$$
$$=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$x_{2_{(1)}}=-\left(3\alpha\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\alpha-\frac{1}{2}\right)$$
$$-\sqrt{(9\alpha^2-9\alpha+3)\frac{1}{9}+(3\alpha-6\alpha^2-1)\frac{1}{3}+\alpha^2+\frac{1}{4}}=$$

$$-\alpha+\frac{1}{3}+\alpha+\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha^2-\alpha+\frac{1}{3}+\alpha-2\alpha^2-\frac{1}{3}+\alpha^2+\frac{1}{4}}=\frac{5}{6}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$M_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ qo'zg'almas nuqta ekan.

$$x_{1(2)} = x_{3(2)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12{x_{3(2)}}^2 - 4x_{3(2)} + 1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12 - 4 + 1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$x_{2(2)} = -\left(3\alpha x_{3(2)} - x_{3(2)} - \alpha - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{(9\alpha^2 - 9\alpha + 3){x_{3(2)}}^2 + (3\alpha - 6\alpha^2 - 1)x_{3(2)} + \alpha^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$-\left(3\alpha - 1 - \alpha - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{9\alpha^2 - 9\alpha + 3 + 3\alpha - 6\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= -3\alpha + 1 + \alpha + \frac{1}{2} - \sqrt{4\alpha^2 - 6\alpha + \frac{9}{4}} =$$

$$= -2\alpha + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{16\alpha^2 - 24\alpha + 9} = -2\alpha + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(4\alpha - 3)^2} = 0,$$

$\frac{2}{3} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ bo'lsa, bu holda $M_2(0,0,1)$ ham qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

Endi qo‘zg‘almas nuqtalarning tipini aniqlaymiz.

$$B = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2x_3 \\ \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2(\alpha x_2x_3 + (1-\alpha)x_1x_3) \\ \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + (1-\beta-\gamma)x_3^2 + 2(\beta x_2x_3 + \gamma x_1x_3 + (1-\beta-\gamma)x_1x_2) \end{pmatrix}$$

$(Bx = x)$;

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2x_3 = x_1' \\ \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2(\alpha x_2x_3 + (1-\alpha)x_1x_3) = x_2' \\ \beta x_1^2 + \gamma x_2^2 + (1-\beta-\gamma)x_3^2 + 2(\beta x_2x_3 + \gamma x_1x_3 + (1-\beta-\gamma)x_1x_2) = x_3' \end{cases}$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_2(1 - x_1 - x_2) \\ x_2' = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + 2\alpha x_2(1 - x_1 - x_2) + 2(1-\alpha)x_1(1 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2 \\ x_2' = \alpha x_1^2 + (1-3\alpha)x_2^2 - 2\alpha x_1x_2 + 2\alpha x_2 + 2(1-\alpha)x_1 - 2(1-\alpha)x_1^2 \\ -2(1-\alpha)x_1x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2 \\ x_2' = (3\alpha - 2)x_1^2 + (1-3\alpha)x_2^2 - 2x_1x_2 + 2\alpha x_2 + 2(1-\alpha)x_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2, \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = -4x_2 - 2x_1 - 2$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = 2(3\alpha - 2)x_1 - 2x_2 + 2(1-\alpha)$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -2x_1 + 2(1-3\alpha)x_2 + 2\alpha$$

$M_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}(M_1) = 0 \ \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}(M_1) = -4 \ \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}(M_1) = 0 \ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}(M_1) = 0 \ \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} -\mu & -4 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo′lamiz. Endi shu matritsaning determinantini nolga tenglashtiramiz.

$$det\begin{vmatrix} -\mu & -4 \\ 0 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \mu^2 = 0 \ \Rightarrow \mu = 0$$

Demak, $M_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ qo‘zg‘almas nuqta tortuvchi.

Endi ikkinchi topilgan qo‘zg‘almas nuqtada hisoblaymiz:

$$M_2(0,0,1)$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}(M_2) = 0 \ \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}(M_2) = 0 \ \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}(M_2) = 0 \ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}(M_2) = 0 \ \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ matritsa determinantini qaraymiz

$$det\begin{vmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \mu^2 = 0 \ \Rightarrow \mu = 0.$$

Bundan ko‘rinadiki, $M_2(0,0,1)$ qo‘zg‘almas nuqta ham tortuvchi ekan.

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. (1) operator $M_1\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ qo′zg′almas nuqtaga ega va u tortuvchi. $\frac{2}{3} \le \alpha \le \frac{3}{4}$ bo′lsa, yana bitta $M_2(0,0,1)$ qo′zg′almas nuqta hosil bo′ladi va uning tipi ham tortuvchi bo‘ladi.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ганиходжаев Р.Н. Математический сборник. 183(1992), №8. 119-140 стр.

2. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes. Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017.

3. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type $(\sigma/\mu)$. arXiv: 2004.01702 . Pp. 1-14. math.D.S

4. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type ($\sigma/\mu$). Markov Processes Relat.Fields 26, 915-933 (2020).

5. Мамуров Б.Ж. О кубических стохастических процессов. Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С.72.

6. Мамуров Б.Ж. О решения эволюционных уравнений для кубических стохастических процессов. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. 305-307 стр.

7. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в $S^2$. “Scientific Progress”. Int.sientoific-Pract.conf.Tashkent.2021,March 15. Стр.121-122.

8. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite enotypes. Scientific reports of Bukhara State University. 1:5,2018. Pp. 18-21.

9. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора. Наука, техника и образование. 2021. №2 (77). Часть 2.Стр.10-15.

10. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов. Bulletin of Institute of Mathematics 2019. №6, pp.35-39.

11. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в $S^2$. Тезисы рес.науч.конф.”Сарымсаковские чтения”, Тошкент-2021.стр.100-101.

12. Mamurov B.Zh. The convex combinations of quadratic operators on $S^2$. Abstracts of theVII inter.conf.Modern prob.of applied mat.inf.tex.Al-Khwar.21.pp,87.

13. Mamurov B.J.,Bazorova D. Biologiya va tibbiyotdagi ba’zi matematik modellar haqida. Science and edication. Volume 1, issuse 8 UIF-2022:8.2. 418-426.

14.Mamurov B.J.,Bazorova D. Kvadratik stoxostik operatorlarga olib kelinadigan ba’zi modellar haqida. Science and edication. Volume 4, iss use 3.March 2023. 41-48.

15. Jamilov U.U., Mamurov B.J. Asymptotical behavior of trajectories of non-Volterra quadratic stochastic operators. Lobachevskii Journal of Mathematics (JM). 2022,Vol 43,№11,pp 3174-3182.

16. Mamurov B.J. A conver combination of two quadratic stoxastic operators acting in the 2D simplex. Изв. вузов Математика . 2023(7), pp 66-70.

17. Мамуров Б.Д. Сходимость траекторий невольтерровского квадрадичного стохастичного оператора. Изв. вузов Математика . 2024(10), 45-50 стр.

18. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Kombinatorika haqidagi dastlabki ko‘nikmalarni shakllantirish. “Science and education” scientific jornal,oktober 2021/volume 2, Issue 10,pp 497-505.

19. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.Kombinatorik munosabatlar va ularning geometrik isbotlari haqida. Pedagogik mahorat.2021,oktyabr. Maxsus son. 20-23-bet.

20. Мамуров Б.Ж., Абдуллаев Ж. Регрессионный анализ как средство изучения зависимости между переменными // European science. 2021.№ 2 (58). С. 7-9.

21. Мамуров Б.Ж, Жураева Н.О. **О** первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования, № 18 (96).Часть 2. Москва, 2020,-37-39 стр

22. Mamurov B, Amrilloyeva K. Tasodifiy hodisa tushunchasi haqida. SCIENTIFIC PROGRESS. №2. 2021, c.463-467

23. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли элементов истории математики в преподавании математики. Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom 27-29 May, 2020. С. 701-702.

24. Мамуров Б.Ж. Неравномерной оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин . Молодой учёный. **197**:11 (2018). С. 3-5.

25. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин. Academy. 55:4 (2020). Pp. 13-16.

26. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О историзм в процессе обучения математике. Вестник науки и образования.2020.№17(95).Часть 2. 70-74 стр.

27. Мамуров Б. и др. Суперпозиция одного линейного и одного квадратичного стохастичного оператора. Образование науке и инновационные идеи в мире.2024(36). Часть 6.18-23 стр.