Sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalar

N.Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Sonning butun va kasr qismiga oid misollarni hamda ular qatnashgan tenglamalarni yechish usullari maktab matematika kursida, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari darslik va o‘quv qo‘llanmalarida yetarli darajada ishlab chiqilmagan. Shuning uchun ham biz mavzu yuzasidan, ya’ni sonning butun va kasr qismiga hamda ular qatnashgan turli tenglamalarni yechish, ularni o‘quvchilarga tushuntirish metodikasini ishlab chiqishni o‘z oldimizga maqsad qilib qo‘ydik. Ishlab chiqilgan metodik tavsiyalar va xulosalar umumta’lim maktablari, akademik litseylar o‘quvchilarida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni ilmiy metodik jihatdan yechish usullarini takomillashtirishning muhim vositasidir. Shu bilan bir qatorda ushbu mavzudan o‘quv dasturlarini takomillashtirishda hamda matematika fanlari bo‘yicha o‘quv qo‘llanma va darsliklar ishlab chiqishda foydalanish mumkin.

Kalit so‘zlar: sonning butun va kasr qismi, butun va kasr qism qatnashgan tenglamalar, ta’rif, xossa, masala va yechim

Equations involving integer and fractional parts of a number

N.Rakhimov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Abstract: Methods for solving examples of integer and fractional parts of a number and equations involving them are not sufficiently developed in the school mathematics course, in textbooks and study guides of academic lyceums and vocational colleges. That is why we set ourselves the goal of developing a methodology for solving integer and fractional parts of a number and various equations involving them, and explaining them to students. The developed methodological recommendations and conclusions are an important tool for improving the methods of scientifically methodologically solving equations involving integer and fractional parts of a number among students of general education schools and academic lyceums. At the same time, this topic can be used to improve curricula and develop textbooks and textbooks in mathematical subjects.

(cc) BY

Keywords: integer and fractional parts of a number, equations involving integer and fractional parts, definition, property, problem and solution

Ta'rif. *a* sonining butun qismi deb, *a* dan katta bo'lmagan butun sonlarning eng kattasiga aytiladi va $[a]$ orqali belgilanadi. O'qilishi: "*a* ning butun qismi" yoki "antye *a*" (fransuzcha *entire* – butun degan ma'noni anglatadi).

Misol. [3]=3; [4,8]=4; [-2]=-2; [-5,3]=-6.

Ta'rif. Sonning kasr qismi deb, uning noldan kichik bo'lmagan, ammo birdan kichik qismiga aytiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi.

Har qanday haqiqiy *x* sonni: $x=[x]+\{x\}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Sonning kasr qismining ta'rifidan ko'rinib turibdiki, $0\le\{x\}<1$ o'rinli.

Sonning butun qismi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $a,b\in Z$ bo'lganda, $[a+b]=[a]+[b]$ bo'ladi.

Misol. $[9+10]=[9]+[10]=19$.

2-xossa. $a,b\in R$ bo'lganda, $[a+b]\ge[a]+[b]$ bo'ladi.

Misol. $[9{,}8+9{,}9]\ge[9{,}8]+[9{,}9]$; $[19{,}7]\ge 9+9$; $19>18$.

3-xossa. $\forall x(x\in R)$ va $\forall a(a\in Z)$ sonlari uchun $[x+a]=[x]+a$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $x=[x]+\{x\}$ bo'lgani uchun $x+a=[x]+\{x\}+a$ shu bilan birga $[x]+\{x\}+a<x+a+1$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda, $[x]+a$ son *x+a* dan oshmaydigan eng katta butun son. Demak, $[x+a]=[x]+a$ bo'ladi.

4-xossa. $\forall x(x\in R)$ va $\forall n(n\in N)$ sonlari uchun $[nx]\ge n[x]$ o'rinli.

Isboti. $x=[x]+\{x\}$ tenglikdan foydalanamiz. U holda, $nx=n[x]+n\{x\}$ tenglikni yoza olamiz. $n[x]$ - butun son bo'lganligi uchun $[nx]=[n[x]+n\{x\}]$ hamda *n* va $\{x\}$ lar nomanfiy sonlar bo'lgani uchun $[n\{x\}]\ge 0$ bo'ladi, bundan esa $[nx]\ge[n[x]]=n[x]$ kelib chiqadi.

5-xossa. Agar $[a]=[b],\ \ bunda\ \ a,b\in R$ bo'lsa, $-1<a-b<1$ bo 'ladi.

Isboti. $a=[a]+\{a\}$ va $b=[b]+\{b\}$ ekanligidan

$$a-b=([a]+\{a\})-([b]+\{b\})=([a]-[b])+(\{a\}-\{b\})=\{a\}-\{b\}$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$0\le\{a\}<1$$
$$0\le\{b\}<1$$

bo'lib, bunda ikkinchi tengsizlikni -1 ga ko'paytirib ikkala tengsizlikni qo'shsak, natijada $-1\le\{a\}-\{b\}<1$ munosabat kelib chiqadi. Bundan esa, $-1\le a-b<1$ bo'ladi.

(cc) BY

6-xossa. Agar $x \in R,\ n \in N$ sonlari uchun $[x] = n$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $n \le x < n+1$ tengsizlik bajariladi. Agar $[x] = -n$ bo‘lsa, u holda $-n-1 < x \le -n$ tengsizlik bajariladi [(N.Raximov, O'quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o'qitish metodikasi, 2023)]

Bularga qo‘shimcha ravishda yana quyidagi xossalarini keltirish mumkin.

1) Ta’rifdan $[a] \le a < [a]+1$ asosiy tengsizlik kelib chiqadi.

2) Agar $[x] = [y]$ bo‘lsa, u holda $-1 \le x - y < 1$ bo‘ladi.

3) Agar $x \in Z,\ n \in N$ bo‘lsa, $\left\lfloor \frac{[x]}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ bo‘ladi.

4) Ixtiyoriy haqiqiy *x*($x \in R$) son uchun $[[x]] = [x]$ bo‘ladi.

5) Agar $x < y$ bo‘lsa, $[x] \le [y]$ bo‘ladi.

6) Agar $x \in R$ bo‘lsa, $[\{x\}] = 0,\ \{[x]\} = 0,\ [[x]] = [x],\ \{\{x\}\} = \{x\}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi [(N.Raximov, 2022)].

Butun va kasr qism qatnashgan tenglamalarni bir necha guruhlarga bo‘lib o‘rganamiz.

1. [*f(x)*]=*a* tipdagi tenglamalarni yechish usullari.

Noma’lum sonning butun qismi belgisi ostida qatnashgan tenglamalardan *f(x)*=[*g(x)*] shakli ko‘p uchraydi. *f(x)* va *g(x)* funksiyalarning berilishiga qarab yuqoridagi tipdagi tenglamalar quyidagicha yechiladi:

[*g(x)*]=*k* tipdagi tenglamalar $k \le g(x) < k+1$ qo‘sh tengsizlik ko‘rinishiga keltirilib yechiladi, bunda *f(x)=k*.

1-masala. Tenglamani yeching. $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

Yechim. Berilgan tenglamaning ildizi *x* bo‘lsin. $n = [x]$ deb olsak, $x^2 + 7 = 8n$ bo‘ladi. Demak, *n*>0. Endi $n = [x]$ belgilashdan $n \le x < n+1$ ni yoza olamiz. Oxirgi musbat hadli tengsizlikni kvadratga ko‘tarib 7 ni hadma-had qo‘shsak, $n^2 + 7 \le x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$ ni hosil qilamiz, $x^2 + 7 = 8n$ ekanligidan,

$n^2 + 7 \le 8n < n^2 + 2n + 8$ tengsizlikni hosil qilamiz. Endi bu tengsizlikka teng kuchli bo‘lgan quyidagi tengsizliklar sistemasini yozamiz va yechimni topamiz:

$$\begin{cases} n^2 + 7 \le 8n \\ 8n < n^2 + 2n + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le n \le 7 \\ n < 2 \ \text{ va } \ n > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le n < 2 \ \text{ yoki } \ 4 < n \le 7.$$

Oxirgi natijadan va n-butun son ekanligidan *n*=1, 5, 6, 7 holatlar bo‘lishi mumkin.

(cc) BY

Bu qiymatlarni navbatma-navbat $x^2+7=8n$ ifodaga qo‘yib x ning qiymatlarini topamiz(bunda $n \le x < n+1$ ekanidan x>0). Javob: $1;\ \sqrt{33};\ \sqrt{41};\ 7$ [(Raximov, 2022)].

2. [*f(x)*+*a*]=*b* tipdagi tenglamalarni yechish usullari (bunda *a*-butun son).

Sonning butun qismining $\forall x \in R\ \ va\ \ \forall a \in Z$ uchun [*x*+*a*]=[*x*]+*a* xossasi o‘rinli ekanligini ko‘rib o‘tgan edik. Shu xossani tenglamaga tatbiq etamiz.

2-masala. $[x+1]+[x+2]-[x+3]=2$ tenglamani yeching.

Yechim. Yuqoridagi xossaga ko‘ra, tenglamani $[x]+1+[x]+2-[x]-3=2$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglamani yechib, $[x]=2$ natijani hosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamaning yechimi: $2 \le x < 3$ bo‘ladi [(N.Raximov, 2023)].

3. [*f(x)*]=*g(x)* tipdagi tenglamalarni yechish usullari.

Bunday ko‘rinishidagi tenglamalarni yechishda tenglikning chap tomonidagi ifodaning butun son ekanligidan o‘ng qismining ham butun ekanligini hisobga olib, sonning butun qismining ta’rifidan foydalanamiz.

3-masala. $[2x+1]=x+2$ tenglamani yeching.

Yechim. Bu tenglamani $[2x]=x+1$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglamani quyidagi tengsizlik shaklida ifodalab olamiz: $x+1 \le 2x < x+2$. Bu tengsizlikka ekvivalent bo‘lgan tengsizliklar sistemasini yozib olib, quyidagi yechimni topamiz:

$$\begin{cases} x+1 \le 2x \\ 2x < x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x < 2.$$

4. $[f(x)]=[g(x)]$ ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish usullari.

Sonning butun qismining xossasiga ko‘ra, agar $[a]=[b]$ bo‘lsa, u holda $-1 \le a-b < 1$ bo‘ladi. Ushbu xossani tatbiq etgan holda $[f(x)]=[g(x)]$ shakldagi tenglamani yechamiz.

4-masala. $\left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-2}{3} \right\rfloor$ tenglamani yeching.

Yechim. Agar ikki sonning butun qismlari teng bo‘lsa, ular ayirmasining moduli 1 dan kichik bo‘ladi: $-1 < \frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 11.$

Topilgan x ning qiymatlarida $-1 < \frac{x-2}{3} < 3$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Natijada, $\frac{x-3}{2}\ \ va\ \ \frac{x-2}{3}$ ifodalar bir vaqtda $[-1;0),\ [0;1),\ [1;2),\ [2;3)$ oraliqlarda

(cc) BY

yotishi lozim bo‘ladi. Tegishli tenglamalar sistemasini yechib berilgan tenglama yechimini hosil qilamiz: $1 \le x < 2; \quad 3 \le x < 7; \quad 8 \le x < 9.$

5-masala. $[\sin x] = [\cos x]$ tenglamani yeching.

Yechim. Yuqoridagi kabi, ikki sonning butun qismlari teng bo‘lsa, ular ayirmasining moduli 1 dan kichik bo‘ladi: $-1 < \sin x - \cos x < 1$ ko‘rinishdagi tengsizlikni yechamiz. Muavr formulasiga asosan, $-1 < \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$ munosabatni yoza olamiz. Bu tengsizlikni yechimi $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$ ko‘rinishda bo‘ladi.

5. Sonning kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish usullari.

Sonning kasr qismining ta’rifiga ko‘ra, {x} ifoda davriy funksiya ekanligini va $0 \le \{x\} < 1$ munosabatni e’tiborga olish lozim.

6-masala. $\left\{3x - \frac{9}{4}\right\} = \frac{2}{3}$ tenglamani yeching.

Yechim. Sonning kasr qismi xossasidan foydalanib tenglamani yechamiz.

$$3x - \frac{9}{4} = \frac{2}{3} + n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{36} + \frac{n}{3}, \ \ n \in Z.$$

6. Sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish.

Bunda sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yuqoridagi xossalarga tayangan holda yechish borasida ba’zi tavsiyalarni berib o‘tamiz.

7-masala. $tg[x] \cdot tg\{x\} = 1$ tenglamani yeching.

Yechim. $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ekanligidan $\frac{\sin[x]}{\cos[x]} \cdot \frac{\sin\{x\}}{\cos\{x\}} = 1$ bo‘ladi. Bundan esa, $\sin[x] \cdot \sin\{x\} = \cos[x] \cdot \cos\{x\}$ bo‘lib, $[x] \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \{x\} \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$ Oxirgi tenglikdan $\cos([x] + \{x\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$ kelib chiqadi.

8. Tenglamalarni grafik usulda yechish.

Ayrim tenglamalarni analitik usulda yechishda bir muncha qiyinchiliklarga duch kelamiz. Bunday hollarda tenglamani funksiya grafigini bitta koordinatalar tekisligida tasvirlab, ularning kesishish nuqtasini tenglamaning yechimi sifatida qarash mumkin. Bu usul asosida funksiyaning xossalari yoki grafigi yotadi. Buni quyida bitta masala misolida ko‘rib o‘tamiz.

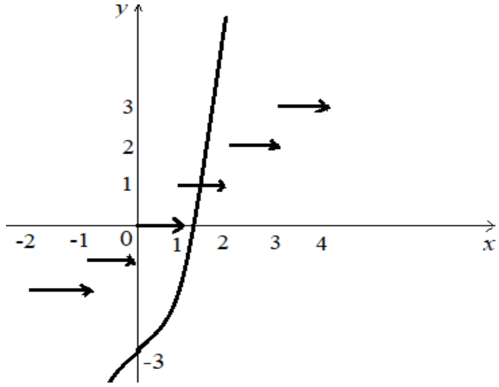
9-masala. $x^3 - [x] = 3$ tenglamani yeching.

(cc) BY

Yechim. Dastlab berilgan tenglamani $x^3 - 3 = [x]$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglamani yechish uchun ikkita funksiyadan tuzilgan

$$\begin{cases} y = x^3 - 3 \\ y = [x] \end{cases}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasini grafik usulda yechish yetarli bo‘ladi. Dekart koordinatalar sistemasida funksiyalarning grafiklarini chizib olamiz.



1-rasm.

Chizmadan ko‘rishimiz mimkinki, $[x]=1$ da grafiklar kesishadi. Bundan esa $x^3 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{4}$ yechimni topamiz [(N.Rahimov, 2023)].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. N.Raximov, B.Mamasidikov. Methods of solving equations related to whole and fractional part of a number. Eurasian Research Bulletin. Volume 14, November, 2022y. Page:190-192.

2. N.Raximov, B.Mamasidikov. Maktab o‘quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko‘nikmasini shakllantirish. Science and Education. 2022/3/26. Page: 739-743.

3. N. Rax (N.Raximov, 2023)imov. Sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish yuzasidan ba’zi metodik tavsiyalar. "Science and Education" Scientific Journal / www.openscience.uz December 2023 / Volume 4 Issue 12. Page: 29-34.

4. N. Rahimov. Maktab matematika kursida sonning butun qismiga oid masalalarni yechish metodlari. "Science and Education" Scientific Journal/November 2023/ Page: 232-236.

5. N.Raximov, B.Mamasidikov. O‘quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o‘qitish metodikasi. "Science and Education" Scientific Journal. February 2023.

cc BY