Некоторые уравнения и неравенства простых функций и свойства решений

А.М.Ибрагимов
О.Пулатов
С.Дустов
Умидбек Исмоилов
Узбекистан-Финляндия педагогический институт

Аннотация: В некоторых случаях уравнение или неравенства участие функций определение поле знать уравнение или неравенство решение есть что это не так знать или решение найти помощь дает.

Ключевые слова: уравнение, неравенство, функция и область определения

Some equations and inequalities of simple functions and properties of solutions

A.M.Ibragimov
O.Pulatov
S.Dustov
Umidbek Ismoilov
Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Abstract: Identification with the field to use. Some in cases, equation or inequality participation functions definition field to know the equation or inequality solution is that it is not so to know or solution to find help gives.

Keywords: equation, inequality, function and domain

Введение: В дальнейшем под областью определения уравнения или неравенства (функции) будем понимать суммарную область определения участвующих в нем функций.

Пример 1.$\sqrt{3-\mathrm{x}} = \log(\mathrm{x}-3)$ Решите уравнение.

Решение. Уравнение определение поле $3-\mathrm{x} \geq 0$ и $\mathrm{x}-3 > 0$ состоит из набора чисел, которые одновременно удовлетворяют неравенствам. Уравнение определение поле пустой коллекция, так что уравнение к решению имеет это не.

Ответ: нет корней

Итак, не решая уравнение, мы обнаружили, что оно не имеет корней. Пример 2. $2-\sqrt{4-\mathrm{x}^2} = \sqrt[4]{\mathrm{x}^4-16}+\mathrm{x}$ Решите уравнение.

Решение. Уравнение определение поле $4 - x^4 \geq 0$ и $x^4 - 16 \geq 0$ неравенство один в то время удовлетворительно числа из коллекции состоит из. Такой уравнения определение поле только Нетрудно -2 и 2 заметить, что он состоит только из цифр. Мы проверяем эти числа, подставляя их в уравнение.

$x = -2$ Левая часть уравнения: равно 2, правая часть -2 равна, поэтому уравнение $x = -2$ не может иметь корня.

$x = 2$ Левая и правая части уравнения 2 равны, что означает, что $x = 2$ уравнение имеет корень.

Пример 3.$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^4 - 1} < 2^x - \frac{2}{1+x^2}$ неравенство решить это.

Решение. Неравенство определение поле Мы $x = 1$ и $x = -1$видим, что он состоит из.

$x = 1$ Левая часть 0 неравенства равна, а правая часть 1 равна. Следовательно, $x = 1$ оно удовлетворяет неравенству.

$x = -1$ Левая часть неравенства равна 0, а правая часть -0.5 равна, что $x = -1$ не удовлетворяет неравенству.

Ответ: $x = 1$

Пример 4.$\lg x < \sqrt[4]{1 - x^2}$ неравенство решить это.

Решение. Неравенство определение поле $x >$ и $1 - x^2 \geq 0$состоит из чисел, удовлетворяющих условиям, т.е. $0 < x \leq 1$.

Очевидно, что $x = 1$ решить проблему неравенства невозможно.$(0,1)$ Для $\lg x < 0$ каждого взятого xиз интервала и правая часть неравенства положительна. Итак, $(0,1)$решение промежуточного неравенства будет иметь вид.

Ответ:$0 < x < 1$

1. Функция из-за его ограничений использовать. Уравнение и неравенства в растворе любой в коллекции функция снизу или сверху ограниченность основной роль играет. Например, Мв коллекции$f(x) > A, g(x) < A$ то уравнение или $f(x) < g(x)$ $(f(x) \leq g(x))$неравенство не будет иметь решения. $f(x) = g(x)$. Много в случаях жесты о говорить возможный.

Пример 1. $\sin(2x + 1) = x^2 + 2x + 3$ Решите уравнение.

Решение: Необязательно x для числа $\sin(2x + 1) \leq 1$ и

$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2x + 2 \geq 2$ уместно, то есть левая часть уравнения 1 больше, правая часть 2 не может быть меньше. Из этого данный уравнения корень инфекция приходить выходит.

Ответ: корень нет

Пример 2.$x^3 - x - \sin\pi x = 0$ Решите уравнение.

Решение: Очевидно, $0, -1, 1$числа будут корнями уравнения. Покажем, что других корней у него нет. Этот для $f(x) = x^3 - x - \sin\pi x$функция с высоты мы используем, то есть $x > 0, x \neq 1$. Достаточно проанализировать поле. Разделим эту область на интервалы (0 ;1) и $(1; +\propto)$.

Данный уравнение $x^3 - x = \sin\pi x$ по внешнему виду писать, это слева и верно на стороне функции выше между мы проверим.$(0; 1)$ между $x^3 < x$. Поскольку $g(x) = x^3 - x$ функция принимает только отрицательные значения, $h(x) = \sin\pi x$ функция принимает только положительные значения. Следовательно, $(0; 1)$ решение данного уравнения в интервале имеет это не.

$x < 1$ когда $g(x)$ Функция принимает только положительные значения и $h(x) = \sin\pi x$принимает различные знаковые значения. В частности,$(1; 2]$ в интервале $h(x) \leq 0$, поэтому $(1; 2]$ данное уравнение также не имеет корня в интервале.

Если $x > 2$ если, то $|\sin\pi x| \leq 1, x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2 * 3 = 6$ так и будет. Из этого следует, что данное уравнение не имеет корней в интервале.$(2; +\propto)$

Итак, только $x = 0, x = -1, x = 1$. Числа будут решениями уравнения.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$

Пример 3: $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$ Решите неравенство.

Решение: -1 все числа, кроме принадлежат области определения неравенства. Функция хв правой части неравенства $f(x) = 2^x$ принимает положительные значения при любом значении.

Функция $(-\propto; -1)$ и $[+1; +\propto)$ в левой части неравенства $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ принимает неотрицательные значения в интервале и положительные значения в интервале. $(-1; 1)$. Отсюда следует, что $(-\propto; -1)$ или $[[1; +\propto)$ любое x неравенство, выведенное из интервалов, удовлетворяет.

Сейчас неравенство $(-1; 1)$. Мы проверим в промежутке. Разделим этот интервал на два: $(-1; 0], (0; 1)$ интервала.

$-1 < x \leq 0$ Пусть так и будет $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1, f(x) = 2^x \leq 1$. Итак, в этом диапазонех не удовлетворяет данному неравенству.

$0 < x < 1$ Пусть так и будет $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1, f(x) = 2^x \leq 1$. Итак, $(0; 1)$ взято из интервала х даны неравенство решение будет. Выше найденный решения вместе ответ мы пишем.

Ответ: $-\propto < x < -1, 0 < x < +\propto$.

2. Функция монотонность из его свойств использовать. Такой решение метод следующий к утверждениям основан на.

А.Если $f(x)$функция находится на интервале Е непрерывный и твердо монотонный если, то $f(x) = C$Уравнение Е находится в диапазоне большинство с один к корню имеет будет.

B. $f(x)$ va $g(x)$ функции В диапазоне E непрерывно, $f(x)$ строгий Пусть он будет возрастающим, $g(x)$строго убывающим. В этом случае $f(x) = g(x)$уравнение E между большинство с один к корню имеет будет.

C. Средний $(-\propto; +\propto), (a; \propto), (-\propto; b), [a; \propto), (-\propto; b]$ может состоять из бесконечных интервалов, пересечений, интервалов и полуинтервалов.

Пример 1. $x * 2^x = 8$ Решите уравнение.

Решение: Очевидно, если $x \leq 0$ x — это корень быть не могу (потому что $x * 2^x \leq 0$).$x > 0$ когда $f(x) = x * 2^x$ функция непрерывна и строго возрастает, что означает $(0; +\propto)$. Данное уравнение имеет не более одного решения в интервале. $x = 2$ нетрудно видеть, что корень уравнения равен. Так этот только это корень.

Ответ: $x = 2$

Пример 2. $2^x + 3^x + 4^x < 3$ неравенство решить это.

Решение: Поскольку $y_1 = 2^x, y_2 = 3^x, y_3 = 4^x$ каждая из функций непрерывна и строго возрастает на числовой прямой, $y = 2^x + 3^x + 4^x$то функция также линейна на числовой прямой. непрерывный и строгий производитель будет.

Из этого $x > 0$. У нас будет $2^x + 3^x + 4^x > 3$, $x < 0$. $2^x + 3^x + 4^x < 3$ Итак, решение неравенства состоит из отрицательных чисел.

Ответ: $x < 0$

Пример 3.$\sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[6]{x - 2} = 2$ Решите уравнение.

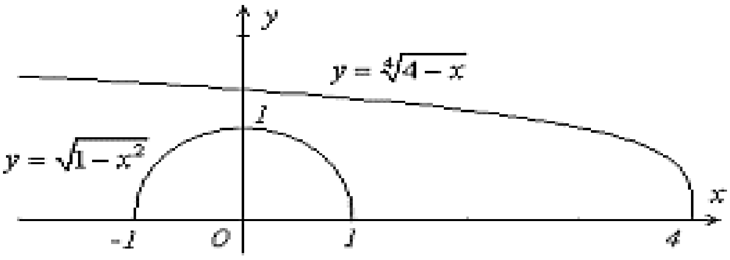
Решение: Уравнение определение поле $[2; 18]$ состоит из поперечного сечения. В этой коллекции $f(x) = \sqrt[4]{18 - x}$ и $g(x) = -\sqrt[6]{x - 2}$ функции непрерывны и строго убывают, что означает $h(x) = \sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[6]{x - 2}$. Функция также непрерывна и строго убывает. Следовательно, функция $h(x)$ транслировать один ценить только один в точку принятие делает. h (2)=2 что проверять трудный это не. Следовательно, уравнение $x = 2$ имеет только один корень.

Ответ: $x = 2$

3. Из графиков использовать. Уравнение и пробелы в растворе его левая и верно на стороне функции графиков эскиз рисунок полезный. В этом случае графики эскиз числа стрелка решения уравнений (неравенств) существование прозрачный был к интервалам как разделение возможный определить возможность дает. Сказать это тоже функция график эскиз решение найти помощь дает, ответы из графика приходить оказывается, что делать возможный не ответ оправдание нуждаться.

Пример 1.$\sqrt{1 - x^2} < \sqrt[4]{4 - x}$ мореходность решить это.

Решение: Неравенство определение поле $[-1;1]$ без резки состоит из.$\mathrm{f(x)} = \sqrt{1-\mathrm{x}^2}$ и $\mathrm{g(x)} = \sqrt[4]{4-\mathrm{x}}$ функция графики эскиз следующим образом (рисунок 1).



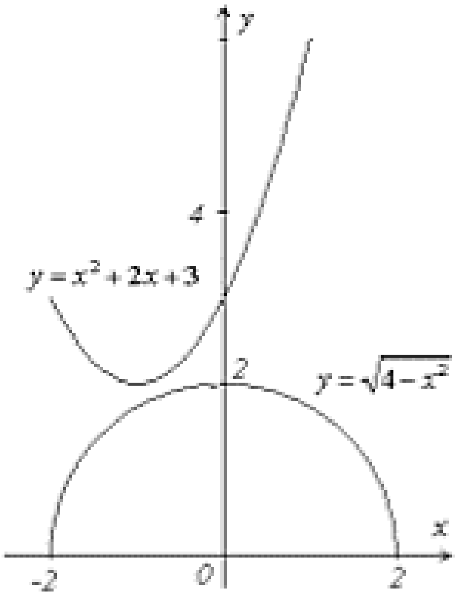
С картинки Кажется, что для $[-1;1]$любого x, принадлежащего пересечению данный неравенство соответствующий. Вот и все. доказательство мы сделаем. [-1 ;1] без пересечения взятый желанный x для $0 \leq \mathrm{f(x)} \leq 1$и $\sqrt[4]{4-\mathrm{x}} \geq \sqrt[4]{4-1} = \sqrt[4]{3} > 1$ отсюда, $[-1;1]$каждый взятый из для x $\mathrm{f(x)} \leq 1 < \mathrm{g(x)}$. Отсюда следует, что двойное неравенство справедливо.

Итак, учитывая неравенство решение [-1 ;1] без пересечения состоит из.

Ответ:$-1 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Пример 2. $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3 = \sqrt{4-\mathrm{x}^2}$ уравнение решить это.

Решение: Уравнение определение поле $[-2;2]$ без резки состоит из.$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3$ и $\mathrm{g(x)} = \sqrt{4-\mathrm{x}^2}$. Рисуем графики функции (рисунок 2)



С картинки Кажется, что функция f (x) график y=2 правильный с линии ниже функция g(x) график и выше тоже не спит графики этот правильный к линии транслировать добрый в точках попробую. Итак, уравнение к решению имеет это не. Вот и все. доказательство мы сделаем. Любой [x, взятый из пересечения -2;2] для $\sqrt{4-\mathrm{x}} \leq 2$ и $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 3 = (\mathrm{x}+1)^2 + 2 \geq 2$.Также $\mathrm{f(x)} = 2$ только $\mathrm{x} = -1$ в, $\mathrm{g(x)} = 2$ и только $\mathrm{x} = 0$ в уместно. Это уравнение решение нет что показывает.

Ответ: решения нет.

Независимый решение для примеры

1. Ниже уравнений к решению имеет что это не так показывать:

a) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x-8}=3$;

b) $2^{|x|+1}=1-x^x$;

c) $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1$;

d) $\sin x = x^2+x+1$;

e) $\sqrt{x}=-x^2+10x-24$;

2. Следующее уравнения решать:

a) $\cos x=1+x^4$;

b) $x*4^x=32$;

c) $12^x+5^x=13^x$;

d) $3^x+4^x=7$;

e) $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=6$;

f) $4\sin\pi x=4x^2-4x+5$;

3. Следующее неравенства решать:

a) $x*5^x>5$;

b) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-4}<1$;

c) $5^x+2^x\geq 7$;

d) $\sqrt{2-x-x^2}<2x+1$;

e) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{x+14}>3$;

Использованная литература

1. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Начала анализа.- М.:Наука. 1990.,-608с.

2. Вороной А.Н. Интеграл помогает доказыват неравенства. Математике в школе. №6. 2002.с. 66-71.

3. С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. М.:МГУ, 1991,-144с