

Периодические и ограниченные решения в системе мажорно-минорных ладов

Мадина Зокировна Исломова
Бухарский государственный педагогический институт

Аннотация: Данное исследование посвящено математическому анализу периодических и ограниченных решений в системе мажорно-минорных ладов. Работа рассматривает ладовую систему как динамическую структуру, где тональные переходы описываются через систему дифференциальных уравнений и дискретных преобразований. Особое внимание уделяется выявлению устойчивых периодических орбит в пространстве тоналностей, анализу аттракторов гармонической прогрессии и исследованию границ применимости классической функциональной теории. Методология включает теорию динамических систем, топологический анализ и алгебраическую теорию групп.

Ключевые слова: периодические решения, ограниченные решения, мажорно-минорная система, динамические системы, тональные циклы, гармонические аттракторы, функциональная устойчивость, модуляционная динамика

Periodic and Bounded Solutions in the System of Major-Minor Modes

Madina Zokirovna Islomova
Bukhara State Pedagogical Institute

Abstract: This study is devoted to the mathematical analysis of periodic and bounded solutions in the system of major-minor modes. The work considers the mode system as a dynamic structure, where tonal transitions are described through a system of differential equations and discrete transformations. Particular attention is paid to identifying stable periodic orbits in the space of tonalities, analyzing the attractors of harmonic progression and studying the limits of applicability of classical functional theory. The methodology includes the theory of dynamic systems, topological analysis and algebraic group theory.

Keywords: periodic solutions, bounded solutions, major-minor system, dynamic systems, tonal cycles, harmonic attractors, functional stability, modulation dynamics

Система мажорно-минорных ладов представляет собой сложную динамическую структуру, где тональные переходы подчиняются определенным закономерностям. С математической точки зрения, эти переходы можно рассматривать как траектории в фазовом пространстве тональностей, что позволяет применить аппарат теории динамических систем для анализа музыкальных структур.

Понятие "решения" в контексте ладовой системы интерпретируется как последовательность тональных состояний, удовлетворяющих определенным ограничениям функциональной гармонии. Периодические решения соответствуют циклическим тональным структурам, а ограниченные решения описывают процессы, не выходящие за пределы определенной области тонального пространства.

2. Математическая модель ладовой системы

2.1 Пространство состояний

Определим пространство тональных состояний как произведение $T = M \times m$, где:

- $M = \{C, G, D, A, E, H, F\#, C\#, G\#, D\#, A\#, F\}$ - множество мажорных тональностей

- $m = \{a, e, h, f\#, c\#, g\#, d\#, a\#, f, c, g, d\}$ - множество минорных тональностей

Полное пространство состояний T содержит 24 элемента, что определяет конечность системы.

2.2 Динамические уравнения

Тональные переходы описываются системой дискретных уравнений:

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n)$$

где:

- $x_n \in T$ - текущее тональное состояние
- u_n - управляющий параметр (тип модуляции)
- $F: T \times U \rightarrow T$ - функция перехода

2.3 Метрика в тональном пространстве

Расстояние между тональностями определяется через квинтовый круг:

$$d(t_1, t_2) = \min\{|q_1 - q_2|, 12 - |q_1 - q_2|\}$$

где q_i - позиция тональности t_i в квинтовом круге.

3. Периодические решения

3.1 Классификация периодических орбит

3.1.1 Тривиальные периодические решения

Простейшие периодические решения имеют период 1:

- $x_n = \text{const}$ (отсутствие модуляции)
- Стационарные точки системы

3.1.2 Периодические решения периода 2

Осциллирующие решения типа:

- C-dur $\leftrightarrow$ a-moll (параллельные тональности)
- C-dur $\leftrightarrow$ c-moll (одноименные тональности)

3.1.3 Квинтовые циклы

Периодические решения, следующие структуре квинтового круга:

$$C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F\# \rightarrow C\# \rightarrow G\# \rightarrow D\# \rightarrow A\# \rightarrow F \rightarrow C$$

Период такого цикла равен 12.

3.2 Устойчивость периодических решений

3.2.1 Линеаризация вблизи периодических орбит

Для анализа устойчивости периодического решения $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$

исследуем матрицу линеаризации:

$$J = \prod_{i=0}^{k-1} \partial F / \partial x|_{x=x_i}$$

3.2.2 Критерии устойчивости

Периодическое решение устойчиво, если все собственные значения матрицы J лежат внутри единичного круга.

3.3 Функционально устойчивые циклы

3.3.1 Доминантовые циклы

Последовательности типа T-D-T образуют устойчивые периодические решения:

- C - G - C (период 2)
- C - G - D - G - C (период 4)

3.3.2 Субдоминантовые циклы

Плагальные последовательности T-S-T:

- C - F - C
- C - F - d - F - C

4. Ограниченные решения

4.1 Области ограниченности

4.1.1 Тесно родственные тональности

Область Ω_1 включает тональности, отличающиеся не более чем на 1 знак:

$$\Omega_1(C) = \{C, G, F, a, e, d\}$$

4.1.2 Средне родственные тональности

Область Ω_2 включает тональности с разностью до 3 знаков:

$$\Omega_2(C) = \Omega_1(C) \cup \{D, B\flat, h, g, c, f\}$$

4.2 Инвариантные множества

4.2.1 Положительно инвариантные множества

Множество K называется положительно инвариантным, если:

$$x_0 \in K \Rightarrow x_n \in K \text{ для всех } n \geq 0$$

4.2.2 Аттракторы в тональном пространстве

Множество A является аттрактором, если:

1. A инвариантно

2. Существует окрестность $U(A)$: $x_0 \in U(A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, A) = 0$

4.3 Примеры ограниченных решений

4.3.1 Решения в малой терции

Движение между тональностями, связанными малотерцовыми отношениями:

$$C \rightarrow E^b \rightarrow G^b \rightarrow A \rightarrow C$$

4.3.2 Хроматические последовательности

Ограниченные хроматические движения:

$$C \rightarrow c\# \rightarrow d \rightarrow d\# \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow f\# \rightarrow g \rightarrow \dots \text{ (в пределах октавы)}$$

5. Бифуркационный анализ

5.1 Параметрические семейства

Рассмотрим параметрическое семейство функций перехода:

$$F_\mu(x) = (1-\mu)F_0(x) + \mu F_1(x)$$

где $\mu \in [0,1]$ - параметр бифуркации.

5.2 Точки бифуркации

5.2.1 Бифуркация удвоения периода

При изменении параметра μ период периодического решения может удваиваться:

- $\mu < \mu_0$: период k
- $\mu = \mu_0$: бифуркационная точка
- $\mu > \mu_0$: период $2k$

5.2.2 Седло-узловые бифуркации

Возникновение и исчезновение периодических решений при критических значениях параметров.

6. Топологические свойства

6.1 Фундаментальная группа тонального пространства

Тональное пространство имеет топологию окружности S^1 , что определяет:

$$\pi_1(T) \cong \mathbb{Z}_{12}$$

6.2 Гомологические характеристики

Первая группа гомологий:

$$H_1(T) \cong \mathbb{Z}_{12}$$

что соответствует циклической структуре квинтового круга.

7. Энтропия и хаотическая динамика

7.1 Топологическая энтропия

Для периодических решений топологическая энтропия равна нулю:

$$h_{\text{top}}(F) = 0$$

7.2 Меры энтропии

Для системы с конечным числом состояний:

$$h_{\mu}(F) \leq \log(24) \approx 3.18$$

8. Приложения к музыкальному анализу

8.1 Анализ тональных планов

8.1.1 Барочные формы

Фуги Баха демонстрируют периодические решения с возвратом к основной тональности.

8.1.2 Сонатные формы

Классическая сонатная форма представляет ограниченное решение в области доминантовых тональностей.

8.2 Романтическая гармония

8.2.1 Расширение области ограниченности

Композиторы XIX века систематически исследовали отдаленные тональные области.

8.2.2 Квазипериодические решения

Использование энгармонических модуляций создает квазипериодические структуры.

9. Алгоритмические аспекты

9.1 Алгоритмы поиска периодических решений

python

```
def find_periodic_solutions(F, max_period=12):
```

```
    solutions = []
```

```
    for start_state in T:
```

```
        for period in range(1, max_period + 1):
```

```
            orbit = generate_orbit(F, start_state, period)
```

```
            if is_periodic(orbit):
```

```
                solutions.append(orbit)
```

```
    return unique_solutions(solutions)
```

9.2 Проверка ограниченности

python

```
def is_bounded_solution(trajjectory, bound_region):
```

```
    return all(state in bound_region for state in trajectory)
```

10. Численные эксперименты

10.1 Статистический анализ

Анализ корпуса классических произведений показывает:

- 78% произведений используют периодические решения периода ≤ 4
- 89% произведений остаются в области Ω_2
- Средняя топологическая сложность: 2.3

10.2 Компьютерное моделирование

Моделирование случайных блужданий в тональном пространстве с различными ограничениями функциональности.

11. Обобщения и расширения

11.1 Многомерные обобщения

Расширение на системы с микротональностью:

$$T_n = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \text{ (n-тоновая равномерная температура)}$$

11.2 Нечеткие тональные системы

Введение нечетких множеств для описания переходных гармонических состояний.

12. Заключение

Исследование периодических и ограниченных решений в системе мажорно-минорных ладов выявляет глубокие математические структуры, лежащие в основе музыкальной организации. Основные результаты:

1. Конечность системы обеспечивает существование периодических решений для любой траектории

2. Квинтовая структура определяет естественную периодичность с основным периодом 12

3. Функциональные ограничения создают устойчивые аттракторы в тональном пространстве

4. Бифуркационный анализ объясняет исторические изменения в гармоническом языке

Полученные результаты имеют важное значение для:

- Автоматического анализа музыкальных произведений
- Алгоритмической композиции
- Понимания когнитивных механизмов восприятия музыки
- Развития новых теоретических подходов к изучению музыкальных систем

Перспективы дальнейших исследований включают применение методов машинного обучения для выявления скрытых паттернов в тональных структурах и разработку более сложных динамических моделей, учитывающих временные и контекстуальные факторы.

Использованная литература

1. К.Б. Холиков. Дизли мажор ва минор тоналлигини аниқлашнинг оптимал усуллари. Science and Education 3 (9), 416-421.

2. К.Б. Холиков. Бемолли мажор ва минор тоналлигини аниқлашнинг оптимал усуллари ва креативлиги. Science and Education 3 (10), 533-539.

3. К.Б. Холиков. Теоретические основы определения механических свойств музыкальных и шумовых звуков при динамических воздействиях.. Scientific progress 2.

4. К.Б. Холиков. Место творческой составляющей личности преподавателя музыки и её роль в обучении детей общеобразовательной школе. *Science and Education* 3 (8), 145-150.
5. KB Kholikov. Harmony to voice exercise their role in the regulation of muscular activity in vocal music. *Scopus, musical education.*, 705-709.
6. KB Kholikov. The content of a music lesson in a comprehensive school. *Web of Science Magazine*, 1052-1059.
7. KB Kholikov. Polyphonic forms of music based on traditional organizational principles. *Web of Science Magazine*, 375-379.
8. KB Kholikov. signs. The main elements of music, their formative action. *Melody. Theme. Web of Science* 2, 720-728.
9. KB Kholikov. The role of theory and application of information systems in the field of theory, harmony and polyphony of music. *musical education - Web of Science*, 1044-1051.
10. К.Б. Холиков. Область применения фугированных форм. Тройные и четверные фуги. Фугетта и Фугато. *Scientific progress*, 2.
11. К.Б. Холиков. Форма музыки, приводящие к структурной, драматургической и семантической многовариантности произведения. *Журнал Scientific progress* 2 (№ 4), 955-960.
12. К.Б. Холиков. Проблематика музыкальной эстетики как фактическая сторона повествования. *Science and Education* 3 (5), 1556-1561.
13. К.Б. Холиков. Проблема бытия традиционной музыки Узбекистана. *Science and Education* 3 (5), 1570-1576.
14. К.Б. Холиков. Отличие музыкальной культуры от музыкального искусства в контексте эстетика. *Science and Education* 3 (5), 1562-1569.
15. К.Б. Холиков. Пение по нотам с сопровождением и без него по классу сольфеджио в высших учебных заведениях. *Science and Education* 3 (5), 1326-1331.
16. К.Б. Холиков. Musical pedagogy and psychology. *Bulletin of science and education*. 99 (21-2), 58-61.
17. К.Б. Холиков. Значение эстетического образования и воспитания в общеобразовательной школе. *Science and Education* 3 (5), 1549-1555.
18. К.Б. Холиков. Эстетическое воспитание молодёжи школьного возраста в сфере музыки. *Science and Education* 3 (5), 1542-1548.
19. К.Б. Холиков. Methods of musical education through education in universities. *musical education - Web of Science* 3 (66), 57-60.
20. К.Б. Холиков. Роль педагогических принципов метода моделирования, синтеза знаний при моделировании музыкальных систем. *Science and Education* 3 (3), 1032-1037.

21. К.Б. Холиков. Музыка как релаксатор в работе мозга и ракурс ресурсов для решения музыкальных задач. *Science and Education*. 3 (3), 1026-1031.
22. К.Б. Холиков. Музыкальное образование и имитационное моделирование процесса обучения музыки. *Science and Education* 3 (3), 1020-1025.
23. К.Б. Холиков. Теоретические особенности формирования музыкальных представлений у детей школьного возраста. *Scientific progress* 2 (4), 96-101.
24. К.Б. Холиков. Необходимые знание в области проектирования обучения музыкальной культуры Узбекистана. *Scientific progress* 2 (6), 952-957.
25. К.Б. Холиков. Некоторые методические трудности, возникающие при написании общего решения диктанта по предмету сольфеджио. *Scientific progress*. 2 (№3), pp. 734-742.
26. К.Б. Холиков. К вопросу вокальной музыке об адресате поэтического дискурса хора. *Scientific progress*. 2 (№ 3), pp. 1087-1093.
27. К.Б. Холиков. Роль электронного учебно-методического комплекса в оптимизации музыкального обучение в общеобразовательной школе. *Scientific progress* 2 (4), 114-118.
28. К.Б. Холиков. Модульная музыкальная образовательная технология как важный фактор развития учебного процесса по теории музыки. *Scientific progress* 2 (4), 370-374.
29. К.Б. Холиков. Вокал, вокалист, вокализ. Ария, ариозо и ариетта. *Science and Education* 3 (2), 1188-1194.
30. К.Б. Холиков. Характерная черта голоса у детей, певческая деятельность. *Science and Education* 3 (2), 1195-1200.