Tub va murakkab sonlar hamda ularga oid masalalarni yechish metodlari

N.Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada tub va murakkab sonlar tushunchalari, ularning asosiy xossalari hamda amaliy masalalardagi o'rni yoritilgan. Tub sonlar - faqat birga va o'ziga bo'linuvchi natural sonlar sifatida, murakkab sonlar esa bundan farqli holda bir nechta bo'luvchilarga ega sonlar sifatida tavsiflanadi. Maqolada tub sonlarni aniqlash usullari, shu jumladan, Eratosfen g'alviridan foydalanish, sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish algoritmlari, ularning nazariy va amaliy qo'llanilishi tahlil qilinadi. Shuningdek, mavzu doirasida turli masalalarni yechish metodikasi va matematik mantiq asosida yondashuvlar keltirilgan. Maqola umumiy o'rta ta'lim o'quvchilari va oliy ta'lim muassasalari talabalari hamda matematikaga qiziquvchilar uchun foydali bo'lishi mumkin.

Kalit so'zlar: tub va murakkab sonlar, Eratosfen g'alviri, sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish, matematik mantiq, masala yechish usullari, natural sonlar, algoritmlar

Prime and complex numbers and methods for solving problems related to them

N.Rakhimov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Abstract: This article explores the concepts of prime and composite numbers, their fundamental properties, and their significance in practical problem-solving. Prime numbers are defined as natural numbers that are divisible only by one and themselves, while composite numbers have more than two divisors. The article discusses various methods for identifying prime numbers, including the use of the Sieve of Eratosthenes, algorithms for prime factorization, and both theoretical and practical applications. Additionally, it presents approaches and techniques for solving problems related to these topics using mathematical logic. The article is intended to be beneficial for secondary school students, university students, and anyone interested in mathematics.

Keywords: prime and composite numbers, Sieve of Eratosthenes, prime factorization, mathematical logic, problem-solving methods, natural numbers, algorithms

Ma'lumki, birga va faqat o'ziga bo'linadigan sonlar tub sonlar deyiladi. Masalan: 2, 3, 5, 7, 11, … kabi sonlar tub sonlar bo'ladi.

Ikkitadan ortiq bo'luvchiga ega bo'lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi. Masalan: 4, 6, 8, 9, 10, 12, …. kabi.

1 soni tub ham murakkab ham emas.

Demak natural sonlar to'plami 3 guruhga bo'linar ekan: Tub sonlar to'plami, murakkab sonlar to'plami, bitta 1 elementdan iborat to'plam.

Tub sonlarni aniqlash uchun dastlab Eratosfen g'alviri (yoki Eratosfen elagi) - qadimgi yunon matematigi Eratosthenes (miloddan avvalgi III asr) tomonidan ishlab chiqilgan va hozirgi kunda ham keng qo'llaniladigan sodda va samarali algoritm bo'lib, u ma'lum oraliqdagi tub sonlarni aniqlash uchun ishlatiladi. Ushbu usul asosan kichik va o'rta diapazondagi natural sonlar orasidan tub sonlarni ajratib olishda qulaydir.

Eratosfen g'alviri algoritmining mohiyati shundan iboratki, dastlab 2 dan boshlab, berilgan oraliqdagi barcha natural sonlar ro'yxatga olinadi. So'ngra ro'yxatdagi eng kichik hali o'chirilmagan son tub deb qabul qilinadi va shu songa karrali bo'lgan barcha sonlar ro'yxatdan chiqarib tashlanadi. Bu jarayon ro'yxat oxirigacha davom etadi. Natijada ro'yxatda faqat tub sonlar saqlanib qoladi.

Misol uchun, 1 dan 30 gacha bo'lgan sonlar ustida Eratosfen g'alvirini qo'llasak, quyidagi tub sonlar aniqlanadi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. [5]

Bu usul matematikada, xususan, sonlar nazariyasida keng qo'llaniladi. Shuningdek, dasturlashda va kriptografik tizimlarda tub sonlar bilan ishlashda ham Eratosfen g'alviri algoritmi asos sifatida ishlatiladi. Oddiyligi va vizual tushunarliligi sababli, bu algoritm ta'lim jarayonida o'quvchilarga tub son tushunchasini o'rgatishda ham samarali vosita hisoblanadi.

Teorema: *1 dan katta ixtiyoriy natural sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida yagona usulda yozish mumkin.* Bu teorema *arifmetikaning asosiy teoremasi* deyiladi.

Isbot: a_1- murakkab son, q_1 esa uning eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. a_1 ni q_1 ga bo'lamiz: $a_1 = q_1 \, . \, a_2$ ($a_2 < a_1$).

Agar a_2 tub son bo'lsa, a_1 son tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Aks holda, a_2 ni o'zining eng kichik tub bo'luvchisi q_2 ga bo'lamiz: $a_2 = q_2 . a_3$ ($a_3 < a_2$).

Agar a_3 tub son bo'lsa, $a_1 = q_1 \, . \, q_2 \, . \, a_3$ bo'ladi. q_1, q_2, a_3 sonlari tub sonlar bo'lgani uchun, a_1 soni tub ko'paytuvchilarga yoyilgan bo'ladi. Agar a_3 murakkab son bo'lsa, yuqoridagi jarayon davom ettiriladi.

$a_1 > a_2 > a_3 > . . .$ ekanligidan ko‘rinadiki, bir necha qadamdan so‘ng albatta a_n tub soni hosil bo‘ladi va a_1 soni $a_1 = q_1 . q_2 . ... . a_n$ shaklni oladi. Demak, har qanday natural son tub ko‘paytuvchilarga yoyiladi.

a soni ikki xil ko‘rinishdagi tub ko‘paytuvchilar yoyilmasiga ega bo‘ladi, deb faraz qilaylik: $a = p_1 . p_2 . ... . p_k$, $a = q_1 . q_2 . ... . q_n$. U holda,

$q_1 . q_2 . ... . q_n = p_1 . p_2 . ... . p_k$. tenglikning ikki tomonida hech bo‘lmaganda bittadan tub son topiladiki, u sonlar bir-biriga teng bo‘ladi. $p_1 = q_1$ deb faraz qilaylik. Tenglikning ikkala tomonini $p_1 = q_1$ ga qisqartirsak $q_2 . ... . q_n = p_2 . ... . p_k$ bo‘ladi. Bu tenglik ustida ham yuqoridagidak mulohaza yuritsak,

$q_3 . ... . q_n = p_3 . ... . p_k$ bo‘ladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirsak, n-1 qadamdan so‘ng $1 = p_{n+1} . ... . p_k$ tenglikni olamiz. Bundan $p_{n+1} = 1, ..., p_k = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, yoyilma yagona ekan. [3]

Natural sonning tub bo‘luvchilari orasida bir xillari uchrasa ular ko‘paytmasini daraja shaklida ifodalash qulay bo‘ladi, ya’ni $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$ (1). Bu yerda $p_1, p_2, ..., p_n$ - turli tub sonlar, $k_1, k_2, ..., k_n$ - natural sonlar. Bu yoyilma kanonik shakl yoki natural sonni tub ko‘paytuvchilarga yoyish formulasi deyiladi.

Endi tub va murakkab sonlarga oid ba’zi masalalarni yechish algoritmlarini keltirib o‘tamiz.

1-masala. Natural a va b sonlar uchun $31a=54b$ tenglik o‘rinli. $a+b$ sonning murakkab son ekanligini isbotlang.

Yechim. $31a$ son 54 ga bo‘linadi. 31 va 54 ning o‘zaro tub son ekanligidan a ning 54 ga bo‘linishi kelib chiqadi. Ya’ni $a=54n$ $(n \in N)$. U holda $31 \cdot 54 \cdot n = 54b \Rightarrow b = 31n$ bo‘ladi. Bundan $a+b=54n+31n=85n$. Demak $a+b$ - murakkab son ekan.

2-masala. Tub sonni 21 ga bo‘lganda qoldiq qoladi. Barcha murakkab sonlardan iborat qoldiqlarni toping.

Yechim. Tub sonni p, to‘liqsiz bo‘linmani q deb, qoldiqni r deb olsak. $p=21q+r$ $(0<r<21)$. Bir nechta p tub sonlarni 21 ga bo‘lganda r qoldiq murakkab son bo‘ladi. r-qoldiq 3 va 7 ga bo‘linmasligi lozim. Demak, r = 4, 8, 10, 16, 20 bo‘ladi.

3-masala. a^2-$10a+21$ tub son bo‘ladigan barcha a natural sonlarni toping.

Yechim. Berilgan kvadrat uchhadni chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

a^2-$10a+21=(a$-$3)(a$-$7)$. Quyidagicha mulohaza yuritamiz:

1) a-3=1 bo‘lsin. U holda a=4 bo‘ladi. a-7=4-7=-3. Bu holatda a^2-$10a+21$ manfiy son bo‘ladi.

2) a-7=1 bo‘lsin. a=8, a-3=5 - tub son. Demak, a=8 masala shartini qanoatlantiradi.

3) a-3=-1, a=2, a-7=-5. Bu holda ham natija 5-tub son bo‘ladi, demak a=2 ham javob bo‘ladi.

4) a-7=-1, a=6, a-3=3. Bu holda a^2-$10a+21<0$ bo‘ladi.

Demak javob: 8 va 2 bo‘ladi. [1, 5]

4-masala. n^4+4 - murakkab son bo‘ladigan barcha n-natural sonlarni toping.

Yechim. $n^4+4=n^4+4+4n^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$. Bundan n^2+2n+2 ko‘phad har doim 1 dan katta bo‘ladi. $n^2-2n+2=1$ bo‘lishi mumkin. $(n-1)^2=0$, $n=1$. Bunda $n^4+4=5$ bo‘ladi. Demak javob: $n\neq 1$ bo‘ladi.

5-masala. a=101010…101 (n ta nol va n+1 ta birlik, n>1) son n ning istalgan qiymatida murakkab son bo‘lishini isbotlang.

Yechim. a sonni quyidagicha ko‘rinishda yozib olamiz:

$$a = 101010\ldots101 = 10^{2n} + 10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \ldots + 10^2 + 1 = \frac{1}{10^2-1}\left(10^2-1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(10^{2n} + 10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \ldots + 10^2 + 1\right) = \frac{1}{99}\left(10^{2n+2}-1\right) = \frac{1}{99}\left(\left(10^{n+1}\right)^2-1\right) = \frac{1}{99}\left(10^{n+1}+1\right)\left(10^{n+1}-1\right).$$

Bunda ikkita hol bo‘lishi mumkin:

1) n - juft son bo‘lsin. U holda $10^{n+1}+1$ son 11 ga bo‘linadi, $10^{n+1}-1$ son 9 ga bo‘linadi ($n>1$ ekanligidan $10^{n+1}+1>11$, $10^{n+1}-1>9$).

2) n - toq son bo‘lsin. U holda $10^{n+1}-1$ son 99 ga bo‘linadi ($n>1$ ekanligidan $10^{n+1}-1>99$). Javob: a-murakkab son.

6-masala. p va p+15 - tub sonlar. Shu shartni qanoatlantiruvchi barcha p larni toping.

Yechim. Agar p=2 bo‘lsa, p+15=17 bo‘ladi. p>2 bo‘lsa, p - toq son bo‘lib, p+15 - juft, ya’ni murakkab son bo‘ladi. Javob: p=2 bo‘ladi.

7-masala. p, $p+2$ va $p+4$ ko‘rinishdagi tub sonlar uchligi faqat 3, 5 va 7 sonlardagina bajarilishini isbotlang.

Yechim. p- tub son uchun bir nechta hollarni qaraymiz:

p=2 da p+2=4-murakkab son bo‘ladi.

p=3 da masala shartidagi 3, 5, 7 uchlikni hosil qilamiz.

p=5 da p+2=7-tub son, ammo p+4=9-murakkab son bo‘ladi.

p=7 da p+2-murakkab son bo‘ladi.

Umumiy holda p>3 sonni 3 ga bo‘lsak 1 yoki 2 qoldiq qoladi.

1) $p=3k+1$ ($k\in N$) bo‘lsin. U holda $p+2=3k+1+2=3k+3=3(k+1)$ - murakkab son.

2) $p=3k+2$ ($k\in N$) bo‘lsin. U holda $p+4=3k+2+4=3k+6=3(k+2)$ - murakkab son.

Demak, haqiqatdan ham 3, 5, 7 uchlikdan boshqa tub sonlar masala shartini qanoatlantirmaydi.

8-masala. Yig‘indisi va ayirmasi tub bo‘ladigan p va q tub sonlarni toping.

Yechim. Masala shartiga ko‘ra $p+q$ va $p-q$ tub bo‘lishi kerak. p va q tub sonlardan biri q=2 ga teng. Aks holda, $p+q$ va $p-q$ lar juft son bo‘ladi. Bundan uchta tub sonlarni qaraymiz. *p-2, p, p+2*. Biz yuqoridagi masalada ko‘rdikki bu tub sonlar 3, 5, 7 bo‘ladi. Demak p=5, q=2 bo‘ladi.

9-masala. Kvadratlarining yig‘indisi tub son bo‘ladigan uchta ketma-ket keluvchi tub sonlarni toping. Mumkin bo‘lgan barcha hollarni toping.

Yechim. Qidirilayotgan tub sonlarni o‘sish tartibida *p, q* va *r* deb olamiz. Quyidagi uchta holni qaraymiz:

1) p=2 bo‘lsin. U holda q va r lar toq sonlar bo‘ladi. Ular kvadratlarining yig‘indisi juft son bo‘ladi. Demak, p=2 masala shartini qanoatlantirmaydi.

2) p=3 bo‘lsin. Keyingi tub sonlar 5 va 7 bo‘lib, $3^2+5^2+7^2=9+25+49=83$. Bu hol masala shartini qanoatlantiradi.

3) p>3 bo‘lsin. U holda *p, q* va *r* sonlarning hech biri 3 ga bo‘linmaydi. 3 ga bo‘linmaydigan sonning kvadratini 3 ga bo‘lsak 1 qoldiq qoladi, demak $p^2+q^2+r^2=(3k+1)+(3m+1)+(3n+1)=3k+3m+3n+3$ bo‘lib bu son 3 ga bo‘linadi.

Javob: 3, 5, 7 bo‘ladi.

10-masala. 2^n-1 ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p murakkab sonlar to‘plami mavjudligini isbotlang, bunda n-toq natural sonlar.

Yechim. n sifatida ixtiyoriy murakkab sonni olamiz. U holda $n=ab$, bunda a va $b(a>1,\ b>1)$ - natural sonlar. $2^n-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1$ son 2^a-1 songa bo‘linadi. Bunda bo‘linma 1 dan katta bo‘ladi.

11-masala. Istalgan a - natural son uchun quyidagilarni isbotlang:

a) ax+1-murakkab son bo‘ladigan x-natural son mavjudmi;

b) Shunaqangi x lar cheksiz ko‘pmi.

Yechim. a) x ni quyidagicha tanlaymiz: $ax+1=(a+1)^2$. Bundan $ax+1=a^2+2a+1,$ $x=a+2.$ $(a+1)^2$ - murakkab son ekanligidan tasdiq o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari $ax+1=(2a+1)^2$, $ax+1=(3a+1)^2$, $ax+1=(a+1)(2a+1)$ va boshqalar ham masala shartini qanoatlantiradi.

b) x ni quyidagicha tasvirlaymiz: $ax+1=(ka+1)^2$, bunda k - ixtiyoriy natural son. U holda $x=k^2a+2k$ bo‘ladi. Bundan x ning cheksiz to‘plam bo‘lishi kelib chiqadi.

12-masala. p_1 va p_2 - ketma-ket keluvchi toq tub sonlar uchun $\frac{p_1+p_2}{2}=q$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, q -murakkab son ekanligini isbotlang.

Yechim. $p_1<p_2$ bo‘lsin. U holda $p_1<\frac{p_1+p_2}{2}<p_2$ bo‘ladi. Ikkita ketma-ket keluvchi toq tub son orasidagi sonlar murakkab son bo‘ladi.

13-masala. Tub sonlar to‘plami cheksiz ko‘p bo‘lishini isbotlang.

Yechim. Teskarisidan faraz qilaylik tub sonlar to‘plami chekli bo‘lsin, ya’ni 2,3,5,…,p. bo‘lib p-eng katta tub son bo‘lsin. $a=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p+1$ sonni qaraymiz. a ning ixtiyoriy tub bo‘luvchisi sifatida q ni olamiz. Ko‘rinib turibdiki $q\neq2$, agar $q=2$ bo‘lsa, a ni 2 ga bo‘linishidan yuqoridagi tenglikdan 1 ni 2 ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Bunday bo‘lishi mumkin emas. Bundan $q \neq 3$, $q \neq 5$, $q \neq 7$, ..., $q \neq p$ bo‘lishi kelib chiqadi. q - tub son a ning yangi tub bo‘luvchisi ekan. Ziddiyatga duch keldik. Demak tub sonlar to‘plami cheksiz to‘plam bo‘ladi. (Raximov, 2022)

Ma’lumki, a sonning tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun a ni $[\sqrt{a}]$ dan kichik bo‘lgan tub sonlarga bo‘lish shart. Agar a son $[\sqrt{a}]$ dan kichik bo‘lgan birorta tub songa bo‘linmasa, bu holda a tub son bo‘ladi. (N.Raximov B. , O'quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o'qitish metodikasi, 2023)

14-masala. (97-9-14) 3607 sonini tub son ekanligini aniqlash uchun uni ketma-ket 2, 3, 5 va hokazo tub sonlarga bo‘lib boriladi. Qanday tub songa yetganda bo‘lishni to‘xtatish mumkin? A) 41 B) 43 C) 47 D) 59

Yechim. $[\sqrt{a}] = [\sqrt{3601}] = [60{,}008] = 60$ ekanligidan, 3601 sonini tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun 60 dan kichik eng katta tub songacha bo‘lib xulosa qilish kerak. Demak, 59 gacha bo‘lish kerak. Javob: 59 (D). (N.Raximov B. , Metods of solving equations related to whole and fractional part of a number, 2022)

Foydalanilgan adabiyotlar

1. N.Raximov, B.Mamasidikov. Methods of solving equations related to whole and fractional part of a number. Eurasian Research Bulletin. Volume 14, November, 2022y. Page:190-192.

2. N.Raximov, B.Mamasidikov. Maktab o‘quvchilarida sonning butun va kasr qismiga oid masalalarni yechich ko‘nikmasini shakllantirish. Science and Education. 2022/3/26. Page: 739-743.

3. N.N.Raximov, A.X.Begmatov. Matematikadan nostandart masalalar. O‘quv qo‘llanma. Samarqand-2022y.

4. N.Raximov, B.Mamasidikov. O‘quvchilarga sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni o‘qitish metodikasi. "Science and Education" Scientific Journal. February 2023.

5. Sh.N.Ismailov. Sonlar nazariyasi / Toshkent, 2008 y.