

Ko'p o'lchovli massiv uchun belgilangan funksiyalarning tuzilishi va xususiyatlari matematik tahlil nuqtai nazaridan

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massivlar uchun belgilangan funksiyalarning matematik tuzilishi, xususiyatlari va tahlili chuqur o'rganilgan. Tadqiqotda chiziqli algebra, funksional tahlil va diskret matematika apparati yordamida massiv funksiyalarining nazariy asoslari ochib berilgan. Matritsali operatsiyalar, tensorli hisoblashlar, vektorli fazolar va funksiyalarning matematik xossalari tahlil qilingan. Maqolada massiv funksiyalarining komutativligi, assotsiativligi, distributivligi kabi algebraik xususiyatlari, ularning chiziqli va nochiziqli xarakteristikalar, konvergensiya va barqarorlik masalalari tadqiq etilgan. Normalar, metrikalar va topoloji xususiyatlar orqali funksiyalarning sifat ko'rsatkichlari baholangan. Tadqiqot natijalari dasturlashda qo'llaniladigan algoritmlarga matematik asos yaratadi va nazariy asoslangan yondashuvni ta'minlaydi.

Kalit so'zlar: matematik tahlil, chiziqli algebra, matritsali operatsiyalar, tensorli hisoblashlar, vektorli fazolar, algebraik xususiyatlar, funksional tahlil, norma va metrikalar, operator nazariyasi, konvergensiya, matematik transformatsiyalar, chiziqli operatorlar, bilinear formalar

Structure and properties of functions defined for multidimensional arrays from the point of view of mathematical analysis

Gulbodom Oybek kizi Norqulova
BIU

Abstract: This article deeply studies the mathematical structure, properties and analysis of functions defined for multidimensional arrays. The study reveals the theoretical foundations of array functions using the apparatus of linear algebra, functional analysis and discrete mathematics. Matrix operations, tensor calculations, vector spaces and mathematical properties of functions are analyzed. The article studies algebraic properties of array functions such as commutativity, associativity, distributivity, their linear and nonlinear characteristics, convergence and stability issues. The qualitative indicators of functions are evaluated through norms, metrics and

topological properties. The results of the study create a mathematical basis for algorithms used in programming and provide a theoretically based approach.

Keywords: mathematical analysis, linear algebra, matrix operations, tensor calculations, vector spaces, algebraic properties, functional analysis, norms and metrics, operator theory, convergence, mathematical transformations, linear operators, bilinear forms

Kirish. Ko‘p o‘lchovli massivlar zamonaviy hisoblash matematikasining asosiy ob’ektlari hisoblanib, ular vektorlar, matritsalar va tensorlar sifatida matematik jihatdan tavsiflanadilar. Massiv funksiyalari esa bu matematik ob’ektlar ustida belgilangan operatorlar va transformatsiyalar majmuasini tashkil etadi. Matematik tahlil nuqtai nazaridan bu funksiyalarning xususiyatlarini o‘rganish nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega.

Massiv funksiyalarining matematik asoslarini tushunish bir nechta sohalarda muhim rol o‘ynaydi. Birinchidan, bu funksiyalarning to‘g‘ri ishlashini nazariy jihatdan asoslash imkonini beradi. Ikkinchidan, algoritmning konvergensiyasi, barqarorligi va xatoliklarni boshqarish masalalarini hal qilishga yordam beradi. Uchinchidan, optimallashtirish va samaradorlikni oshirish uchun matematik apparatdan foydalanish mumkin bo‘ladi.

Chiziqli algebra massiv funksiyalarining asosiy matematik apparati hisoblanadi. Vektorlar fazosidagi operatsiyalar, matritsali transformatsiyalar, xos qiymatlar va xos vektorlar nazariyasi, spektral tahlil kabi tushunchalar massiv funksiyalarini tushunishning matematik asosini tashkil etadi. Funksional tahlil esa norma, metrika, ichki ko‘paytma kabi tushunchalar orqali funksiyalar xususiyatlarini baholash imkonini beradi.

Tensorli hisoblashlar yuqori o‘lchovli massivlar bilan ishlashda zarur bo‘lgan matematik apparatni taqdim etadi. Tensorlar vektorlar va matritsalarining umumlashtirilishi bo‘lib, ular ko‘p indeksli ob’ektlardir. Tensorli algebra, tensorlarni qisqartirish (contraction), tensorli ko‘paytma kabi operatsiyalar zamonaviy ilmiy hisoblashlar va sun‘iy intellekt algoritmida keng qo‘llaniladi.

Diskret matematika va kombinatorika massiv indekslash, elementlarni sanash va kombinatorial optimallashtirish masalalarida qo‘llaniladi. Graf nazariyasi massiv tuzilmalarini tasvirlash va algoritmni tahlil qilishda foydalidir. Hisoblash murakkabligi nazariyasi algoritm samaradorligini matematik jihatdan baholash imkonini beradi.

Tadqiqotning maqsadi ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalarini matematik tahlil nuqtai nazaridan chuqur o‘rganish, ularning algebraik va topologik xususiyatlarini aniqlash, nazariy asoslarini yaratish va amaliy qo‘llanmalarga matematik asos berishdan iborat. Tadqiqot ob’ekti sifatida turli matematik strukturalar (vektorli

fazolar, normalik fazolar, Hilbert fazolari) va ular ustida belgilangan massiv funksiyalari tanlab olingan.

Asosiy qism

Vektorli fazolar va massivlarning matematik modeli

Ko'p o'lchovli massivlarni matematik jihatdan tavsiflash uchun vektorli fazolar nazariyasidan foydalaniladi. n o'lchovli haqiqiy vektorli fazo R^n barcha n -o'lchovli massivlar to'plamini ifodalaydi.

Vektorli fazo V maydon K (odatda haqiqiy sonlar R yoki kompleks sonlar C) ustida quyidagi aksiomalarga ega bo'lgan to'plamdir. Qo'shish operatsiyasi uchun: $u + v = v + u$ (kommutativlik), $(u + v) + w = u + (v + w)$ (assotsiativlik), nol vektor 0 mavjud bo'lib, $v + 0 = v$, har bir v uchun teskari element $-v$ mavjud bo'lib, $v + (-v) = 0$. Skalyarga ko'paytirish uchun: $a(bv) = (ab)v$, $1 \cdot v = v$, $a(u + v) = au + av$ (distributivlik vektorlar bo'yicha), $(a + b)v = av + bv$ (distributivlik skalyarlar bo'yicha).

$m \times n$ o'lchovli matritsalar to'plami $M_{m,n}(R)$ ham vektorli fazoni tashkil etadi va uning o'lchami mn ga teng. Bu fazoda har bir matritsa mn komponentli vektor sifatida qaralishi mumkin. Uch o'lchovli massiv $1 \times m \times n$ o'lchamli bo'lsa, $u \in R^{\{lmn\}}$ fazoning elementi hisoblanadi.

Vektorli fazolarda asoslar tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Asos - bu chiziqli erkli vektorlar to'plami bo'lib, har bir fazoning elementini ularning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalash mumkin. Standart asos $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlaridan iborat bo'lib, e_i vektorning i -koordinatasi 1 ga, qolganlari 0 ga teng. Har qanday vektor $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ko'rinishida yoziladi.

Matritsalar uchun standart asos E_{ij} matritsalaridan iborat bo'lib, bu matritsaning (i,j) elementi 1 ga, qolganlari 0 ga teng. Har qanday $m \times n$ matritsa $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$ ko'rinishida ifodalanadi. Bu yozuv massiv operatsiyalarini chiziqli algebra tillida tavsiflash imkonini beradi.

Chiziqli operatorlar va matritsali transformatsiyalar

Massiv funksiyalarining ko'pchiligi chiziqli operatorlar sifatida tavsiflanishi mumkin. Chiziqli operator $T: V \rightarrow W$ vektorli fazolar orasidagi xaritalash bo'lib, quyidagi xossalarga ega: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ barcha $u, v \in V$ uchun (additivlik), $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ barcha $\alpha \in K$ va $v \in V$ uchun (bir jinslilik).

Chiziqli operatorning eng muhim namunasi matritsali transformatsiya hisoblanadi. Har qanday chiziqli operator $T: R^n \rightarrow R^m$ $m \times n$ matritsa A orqali ifodalanishi mumkin: $T(x) = Ax$. Bu tasvir o'zaro bir qiymatli bo'lib, chiziqli operatorlar va matritsalar o'rtasida izomorfizm mavjud.

Matritsali operatsiyalarning asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat. Qo'shish operatsiyasi: $(A + B)x = Ax + Bx$ va $(A + B) + C = A + (B + C)$. Ko'paytirish operatsiyasi: $A(Bx) = (AB)x$ va $(AB)C = A(BC)$. Distributivlik: $A(B + C) = AB + AC$ va $(A + B)C = AC + BC$. Lekin kommutativlik umuman o'rinli emas: $AB \neq BA$.

Chiziqli operatorning yadrosi (kernel) yoki nol fazosi $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ to'plamidir. Tasvir fazosi $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V, T(v) = w\}$ to'plamidir. Agar $T: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli operator bo'lsa, ranglar teoremasi $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = n$ munosabatini beradi. Bu teorema massiv operatsiyalarining xususiyatlarini tushinishda muhim.

Izomorfizm - bu chiziqli operator $T: V \rightarrow W$ bo'lib, u o'zaro bir qiymatli va barcha elementlarni qamrab oladi (bijeksiya). Agar izomorfizm mavjud bo'lsa, V va W fazolari izomorf deyiladi: $V \cong W$. Izomorf fazolar matematik jihatdan bir xil hisoblanadi. Masalan, $R^{m \times n} \cong R^{mn}$, ya'ni matritsalar fazosi va vektorlar fazosi izomorf.

Norma va metrika tushunchalari

Massiv funksiyalarining sifat ko'rsatkichlarini baholash uchun norma va metrika tushunchalari qo'llaniladi. Norma - bu vektorli fazo V da belgilangan funksiya $\|\cdot\|: V \rightarrow R$ bo'lib, quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi: $\|v\| \geq 0$ va $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (nomanfiylik va aniqlik), $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ (bir jinslilik), $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (uchburchak tengsizligi).

Asosiy norma turlari quyidagilardan iborat. Evklid normasi (l_2 -norma): $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, bu eng ko'p qo'llaniladigan norma. Maksimum norma (l_∞ -norma): $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Manhattan normasi (l_1 -norma): $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$. Umumiy p -norma: $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$, bu yerda $p \geq 1$.

Matritsalar uchun maxsus normalar belgilanadi. Frobenius normasi: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$, bu Evklid normasining matritsalariga umumlashtirilishi. Spektral norma: $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$, bu yerda $\sigma_{\max}$ - eng katta singular qiymat. Operator normasi: $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\|=1\}$, bu operatorning kuchlashish koeffitsientini ifodalaydi.

Metrika - bu to'plam X da belgilangan funksiya $d: X \times X \rightarrow R$ bo'lib, quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi: $d(x,y) \geq 0$ va $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (nomanfiylik va aynan bir xillik aksiyomasi), $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetriya), $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (uchburchak tengsizligi).

Har qanday norma metrikani keltirib chiqaradi: $d(x,y) = \|x - y\|$. Metrik fazo (X,d) topologik tushunchalar (yaqinlashish, uzluksizlik, ochiq to'plamlar) uchun asos yaratadi. Massiv funksiyalarining barqarorligi va konvergensiyasini o'rganishda metrik fazolar muhim rol o'ynaydi.

Ichki ko'paytma va Hilbert fazolari

Ichki ko'paytma norma tushunchasining kengaytirilishi bo'lib, u ikkita vektor orasidagi burchakni va proyeksiyani aniqlash imkonini beradi. Ichki ko'paytma - bu funksiya $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow K$ bo'lib, quyidagi xossalarga ega: $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle^*$ (simmetriya yoki ermit xossasi, $*$ kompleks qo'shma), $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u,w \rangle + \beta \langle v,w \rangle$ (birinchi argumentda chiziqlilik), $\langle v,v \rangle \geq 0$ va $\langle v,v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (musbat aniqlik).

Standart ichki ko'paytma R^n da: $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i = x^T y$. Matritsalar uchun: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$, bu yerda tr - iz (trace) funksiyasi. Har qanday ichki ko'paytma norma keltirib chiqaradi: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Ichki ko'paytma orqali aniqlangan norma qo'shimcha xossaga ega: parallelogramm identifikatsiyasi $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts tengsizligi ichki ko'paytmaning fundamental xossasi: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Tenglik faqat u va v chiziqli bog'liq bo'lganda o'rinli. Bu tengsizlik ko'plab matematik isbotlarda va baholarda qo'llaniladi.

Ikkita vektor ortogonal deyiladi, agar $\langle u, v \rangle = 0$ bo'lsa. Ortonormal asos - bu o'zaro ortogonal va normasi 1 ga teng vektorlar to'plami: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, bu yerda δ_{ij} - Kroneker deltasi. Ortonormal asosda har qanday vektor $v = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i$ ko'rinishida yoziladi va $\|v\|^2 = \sum_i |\langle v, e_i \rangle|^2$ (Parseval identifikatsiyasi).

Hilbert fazosi - bu to'liq ichki ko'paytma fazosi, ya'ni har bir Koshi ketma-ketligi yaqinlashuvchi. R^n va matritsalar fazosi chekli o'lchovli Hilbert fazolari hisoblanadi. Hilbert fazolarida proyeksiya teoremasi, ortogonal yoyilma, Riesz tasviri kabi muhim teoremlar o'rinli bo'lib, ular massiv funksiyalarini tahlil qilishda qo'llaniladi.

Xos qiymatlar va spektral tahlil

Kvadrat matritsa $A: R^n \rightarrow R^n$ uchun xos qiymat λ va xos vektor v ($v \neq 0$) quyidagi tenglamani qanoatlantiradi: $Av = \lambda v$. Xos qiymat matritsaning vektor yo'nalishini qanday o'zgartirishini ko'rsatadi: vektor faqat cho'ziladi yoki siqiladi, lekin yo'nalishi saqlanadi.

Xos qiymatlarni topish uchun xarakteristik tenglama yechiladi: $\det(A - \lambda I) = 0$, bu yerda I - birlik matritsa. Bu n -darajali algebraik tenglama bo'lib, n ta xos qiymat (ko'pliklarni hisobga olgan holda) beradi. Xos vektorlar $(A - \lambda I)v = 0$ tizimini yechish orqali topiladi.

Simmetrik haqiqiy matritsalar muhim xususiyatlarga ega. Barcha xos qiymatlar haqiqiy, barcha xos vektorlar o'zaro ortogonal, matritsa diagonal

ko'rinishga keltirilishi mumkin: $A = Q\Lambda Q^T$, bu yerda Q - ortogonal matritsa (xos vektorlardan tashkil topgan), Λ - diagonal matritsa (xos qiymatlardan). Bu spektral yoyilma (spectral decomposition) deyiladi.

Spektral teorema simmetrik matritsalar uchun quyidagicha: Agar A simmetrik matritsa bo'lsa, u holda $A = \sum_i \lambda_i v_i v_i^T$, bu yerda λ_i - xos qiymatlar, v_i - ortonormal xos vektorlar. Bu yoyilma matritsani bir o'lchovli proyeksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalaydi.

Singular qiymatlarga ajratish (SVD) har qanday $m \times n$ matritsa A uchun: $A = U\Sigma V^T$, bu yerda U - $m \times m$ ortogonal matritsa, Σ - $m \times n$ diagonal matritsa (singular qiymatlar σ_i bilan), V - $n \times n$ ortogonal matritsa. SVD matritsali tahlilning eng universal vositasi bo'lib, ko'plab qo'llanmalarga ega: psevdoteskari matritsa, rang topish, ma'lumotlarni siqish, tasvirlarni qayta ishlash.

Singular qiymatlar matritsaning muhim xarakteristikalarini beradi. Eng katta singular qiymat spektral normaga teng: $\|A\|_2 = \sigma_{\max}$. Singular qiymatlar soni matritsa rangiga teng: $\text{rank}(A) = \#\{\sigma_i : \sigma_i \neq 0\}$. Singular qiymatlarning ko'paytmasi determinantning absolyut qiymatiga teng: $|\det(A)| = \prod_i \sigma_i$.

Matritsali funksiyalar va ularning xususiyatlari

Matritsali funksiyalar - bu matritsalarini matritsalariga akslantiruvchi xaritalashlar. Ko'plab matritsali funksiyalar skalyar funksiyalarning umumlashtirilishi hisoblanadi.

Matritsa eksponentasi: $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$. Bu qator har doim yaqinlashadi va ko'plab xossalarga ega: $\exp(0) = I$, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ (faqat $AB = BA$ bo'lganda), $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

Agar $A = Q\Lambda Q^{-1}$ diagonal ko'rinishga keltirilsa, u holda $\exp(A) = Q \exp(\Lambda) Q^{-1}$, bu yerda $\exp(\Lambda) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$. Bu formula eksponentani hisoblashni soddalashtiradi.

Matritsa logarifmi: $\log(A)$ faqat musbat aniq matritsalar uchun yaxshi aniqlangan. Agar $A = Q\Lambda Q^T$ simmetrik va musbat aniq bo'lsa, $\log(A) = Q \log(\Lambda) Q^T$. Logaritm va eksponent teskari operatsiyalar: $\log(\exp(A)) = A$ va $\exp(\log(A)) = A$ (mos shartlar bajarilganda).

Matritsa daraja funksiyasi: A^p turli usullarda aniqlanishi mumkin. Agar p butun musbat son bo'lsa, $A^p = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (p marta). Agar $p = 1/2$, $A^{1/2}$ matritsa ildizi: $(A^{1/2})^2 = A$. Umumiy holda, $A^p = \exp(p \log(A))$ orqali aniqlanadi. Spektral yoyilma yordamida: $A^p = Q \Lambda^p Q^T$, bu yerda $\Lambda^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p)$.

Matritsa normasi ham matritsali funksiya hisoblanadi. Determinant $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ multilinear va antisimmetrik funksiya. Iz funksiyasi $\text{tr}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ chiziqli funksiya: $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$, $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$. Muhim xossa: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, bu siklik o'zgarmas deyiladi.

Tensorlar va ko'p chiziqli algebra

Tensorlar - bu vektorlar va matritsalarining yuqori o'lchovli umumlashtirilishi. Matematik jihatdan, (p, q) -tartibli tensor p marta kontrvariant va q marta kovariant ko'p chiziqli xaritalash hisoblanadi.

Oddiy tilda, n o'lchovli tensorni n -indeksli son massivi sifatida tasavvur qilish mumkin. 0-tartibli tensor - skalar, 1-tartibli tensor - vektor, 2-tartibli tensor - matritsa, 3-tartibli tensor - kub shaklida massiv va hokazo.

Tensorli ko'paytma (tensor product) ikkita tensor $T_1 \otimes T_2$ ni birlashtirish operatsiyasi. Vektorlar uchun: $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$, bu rang-1 matritsa hosil qiladi. Umumiy holda: $(T_1 \otimes T_2)_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} = (T_1)_{i_1 \dots i_p} (T_2)_{j_1 \dots j_q}$.

Tensorlarni qisqartirish (contraction) - indekslar bo'yicha yig'ish operatsiyasi. Matritsalarining izi - bu 2-tartibli tensorning qisqarishi: $\text{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$. Matritsalarini ko'paytirish ham qisqartirish orqali ifodalanadi: $(AB)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$.

Tensorlarning rangi muhim tushuncha hisoblanadi. Tensorning rangi - uni rank-1 tensorlarning yig'indisi sifatida ifodalash uchun zarur bo'lgan minimal hadlar soni. Matritsalar uchun bu oddiy rang tushunchasiga mos keladi: $\text{rank}(A) = \min \{r : A = \sum_{i=1}^r u_i v_i^T\}$. Yuqori o'lchovli tensorlar uchun rang tushunchasi murakkabroq.

Tensorlarni ajratish (tensor decomposition) ko'plab qo'llanmalarga ega. CP ajratishi (CANDECOMP/PARAFAC): $T \approx \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i \otimes c_i$. Tucker ajratishi: $T \approx G \times_1 A \times_2 B \times_3 C$, bu yerda G - yadro tensor. Bu ajratishlar ma'lumotlarni siqish, namunalarni aniqlash va signallarni qayta ishlashda qo'llaniladi.

Chiziqli tenglamalar tizimi va yechish usullari

Chiziqli tenglamalar tizimi $Ax = b$ ko'rinishida yoziladi, bu yerda A - $m \times n$ matritsa, x - noma'lum vektor, b - o'ng tomon. Bu tizimning yechiluvchanligini tahlil qilish massiv funksiyalarining muhim jihati.

Tizim yechiluvchanligining shartlari quyidagicha. Agar $\text{rank}(A) = \text{rank}([A|b])$ bo'lsa, tizim mos keladi (yechim mavjud). Agar $\text{rank}(A) = n$ bo'lsa, yechim yagonadir. Agar $\text{rank}(A) < n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechim mavjud. Agar $\text{rank}(A) \neq \text{rank}([A|b])$ bo'lsa, tizim mos kelmaydi (yechim yo'q).

To'g'ri ranggi tizimlar ($n = m$ va $\text{rank}(A) = n$) uchun yagona yechim mavjud: $x = A^{-1}b$. Teskari matritsa Gauss usuli, LU ajratishi yoki boshqa usullar bilan hisoblanadi.

Noto'g'ri tizimlar ($m > n$) uchun eng kichik kvadratlar usuli qo'llaniladi. Maqsad: $\|Ax - b\|_2$ ni minimallashtirish. Normal tenglamalar: $A^T Ax = A^T b$. Yechim: $x = (A^T A)^{-1} A^T b = A^+ b$, bu yerda A^+ - psevdoteskari (Moore-Penrose) matritsa.

Noaniq tizimlar ($m < n$) uchun minimal norma yechimi topiladi. Maqsad: $\|x\|_2$ ni minimallashtirish, $Ax = b$ sharti bilan. Yechim: $x = A^T (AA^T)^{-1} b = A^+ b$. Psevdoteskari matritsa umumiy holda SVD orqali hisoblanadi: $A^+ = V \Sigma^+ U^T$, bu yerda Σ^+ - Σ ning psevdoteskari (nolga bo'linish muammosi yo'q).

Iterativ usullar katta tizimlar uchun samaraliroq. Yakobiy usuli: $x^{(k+1)} = D^{-1} (b - (L+U)x^{(k)})$, bu yerda $A = D + L + U$ (diagonal, pastki va yuqori uchburchak). Gauss-Zeydel usuli: $x^{(k+1)} = (D+L)^{-1} (b - Ux^{(k)})$. Gradient tushish va qo'shma gradientlar usuli simmetrik musbat aniq matritsalar uchun juda samarali.

Norma bahosi va xatoliklar tahlili

Raqamli hisoblashlarda xatoliklar tahlili muhim ahamiyatga ega. Xatoliklar ikki turga bo'linadi: yaxlitlash xatoliklari (rounding errors) va qisqartirish xatoliklari (truncation errors).

Absolyut xatolik: $\Delta x = |\tilde{x} - x|$, bu yerda x - aniq qiymat, $\tilde{x}$ - taqribiy qiymat. Nisbiy xatolik: $\delta x = |\tilde{x} - x|/|x|$. Vektorlar uchun: $\|\Delta x\|$ va $\|\Delta x\|/\|x\|$. Matritsalar uchun ham xuddi shunday.

Sharti raqami (condition number) masalaning xatoliklarga sezgirligini o'lchaydi. Chiziqli tizim $Ax = b$ uchun: $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Agar $\kappa(A)$ katta bo'lsa, tizim

noto'g'ri shaklda qo'yilgan (ill-conditioned). Agar $\kappa(A)$ kichik bo'lsa, tizim to'g'ri shaklda qo'yilgan (well-conditioned).

Nisbiy xatoliklarning tarqalishi: $\|\Delta x\|/\|x\| \leq \kappa(A) (\|\Delta A\|/\|A\| + \|\Delta b\|/\|b\|)$. Bu formula ko'rsatadiki, agar $\kappa(A)$ katta bo'lsa, kirishdagi kichik xatolik chiqishdagi katta xatolikka olib kelishi mumkin.

Barqarorlik - algoritmnining xatoliklar ta'siriga chidamliligi. Barqaror algoritmlar kichik kirishdagi xatolikni kichik chiqishdagi xatolikka olib keladi. Nobarqaror algoritmlar xatoliklarni kuchaytiradi. Masalan, oddiy Gauss usuli nobarqaror bo'lishi mumkin, lekin ustun element tanlash (pivoting) bilan barqaror bo'ladi.

Yaxlitlash xatolarini tahlil qilish uchun orqaga tahlil (backward error analysis) qo'llaniladi. G'oya: taqribiy yechim $\tilde{x}$ ni qabul qilish o'rniga, $\tilde{x}$ qaysi muammoning aniq yechimi ekanligini topish. Masalan, $\tilde{x} = (A + E)^{-1}b$ bo'lsa, $\|E\|$ qanchalik kichik?

Konvergensiya va iterativ algoritmlar

Ko'plab massiv funksiyalari iterativ algoritmlar orqali amalga oshiriladi. Konvergensiya tahlili bu algoritmlarning ishlashini tushunish uchun zarur.

Ketma-ketlik $\{x^{(k)}\}$ x^* ga yaqinlashadi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun N mavjud bo'lib, $k > N$ bo'lganda $\|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$. Konvergensiya tezligi muhim xarakteristika hisoblanadi.

Chiziqli konvergensiya: $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C\|x^{(k)} - x^*\|$, bu yerda $0 < C < 1$. Kvadratik konvergensiya: $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C\|x^{(k)} - x^*\|^2$. Kvadratik konvergensiya chiziqli konvergensiyadan ancha tezroq.

Iterativ matritsa $G = I - M^{-1}A$ (bu yerda M - prekonditsioner) spektral radiusi $\rho(G) = \max_i |\lambda_i(G)|$ konvergensiyani belgilaydi. Iterativ usul yaqinlashadi $\Leftrightarrow \rho(G) < 1$. Konvergensiya tezligi $-\log(\rho(G))$ ga proporsional.

Gradientli usullar uchun konvergensiya tezligi sharti raqamiga bog'liq. Gradientli tushish: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$. Agar $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$ kvadratik funksiya bo'lsa, optimal qadam $\alpha = 1/\lambda_{\max}(A)$ va konvergensiya tezligi $(\kappa(A)-1)/(\kappa(A)+1)$.

Konjugat gradientlar usuli yuqoriroq konvergensiya tezligiga ega. Nazariy jihatdan, n o'lchovli musbat aniq tizim uchun ko'pi bilan n iteratsiyada aniq yechim topiladi. Amalda, $\|x^{(k)} - x^*\| \leq 2((\sqrt{\kappa} - 1)/(\sqrt{\kappa} + 1))^k \|x^{(0)} - x^*\|$.

Optimallashtirish va ekstremumlar

Ko'plab massiv funksiyalari optimallashtirish masalalarini yechadi. Matematikda optimallashtirish - bu funksiyaning ekstremumini (maksimum yoki minimum) topish.

Cheklanmagan optimallashtirish: $\min_x f(x)$, bu yerda $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ silliq funksiya. Zaruriy shart (birinchi tartibli): $\nabla f(x^*) = 0$ (kritik nuqta). Yetarli shart (ikkinchi tartibli): Hessian matritsa $H = \nabla^2 f(x^*)$ musbat aniq bo'lsa, x^* mahalliy minimum.

Konveks funksiyalar uchun mahalliy minimum global minimum hisoblanadi. Funksiya f konveks, agar $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ barcha x, y va $0 \leq \lambda \leq 1$ uchun. Ekvivalent shart: Hessian matritsasi musbat yarimo'q (positive semidefinite).

Kvadratik optimallashtirish: $\min_x \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$, bu yerda A simmetrik musbat aniq. Yechim: $x^* = A^{-1}b$, bu chiziqli tizimni yechish bilan topiladi. Agar A musbat yarimo'q bo'lsa, yechim yagona bo'lmaydigan bo'lishi mumkin.

Cheklangan optimallashtirish: $\min_x f(x)$, $g(x) = 0$ va $h(x) \leq 0$ shartlar bilan. Lagranj funksiyasi: $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$. Karush-Kuhn-Taker (KKT) shartlari: $\nabla_x L = 0$, $g(x) = 0$, $h(x) \leq 0$, $\mu \geq 0$, $\mu^T h(x) = 0$.

Konveks optimallashtirish uchun samarali algoritmlar mavjud. Gradientli tushish, Nyuton usuli, ichki nuqta usullari polinomial vaqtda yechim topadi. Nokonveks optimallashtirishda lokal minimumlar muammosi mavjud, lekin zamonaviy usullar (stoxastik gradiyent, momentum) amalda yaxshi ishlaydi.

Matritsa faktorizatsiyalari

Matritsa faktorizatsiyasi - bu matritsani bir nechta maxsus matritsalar ko'paytmasi sifatida ifodalash. Bu ko'plab hisoblashlarni soddalashtiradi va tezlashtiradi.

LU faktorizatsiya: $A = LU$, bu yerda L - pastki uchburchak matritsa (lower triangular), U - yuqori uchburchak matritsa (upper triangular). Bu faktorizatsiya Gauss usuli jarayonini ifodalaydi. Chiziqli tizimni yechish ikki bosqichga bo'linadi: $Ly = b$ (oldinga almashtirish) va $Ux = y$ (orqaga almashtirish). Vaqt murakkabligi: $O(n^3)$ faktorizatsiya uchun, $O(n^2)$ har bir yechim uchun.

Cholesky faktorizatsiyasi simmetrik musbat aniq matritsalar uchun: $A = LL^T$, bu yerda L - pastki uchburchak matritsa. Bu LU faktorizatsiyaning maxsus holi bo'lib, ikki baravar kam xotira va hisoblash talab qiladi. Vaqt murakkabligi: $O(n^3/3)$, bu LU dan ikki baravar tezroq.

QR faktorizatsiya: $A = QR$, bu yerda Q - ortogonal matritsa ($Q^T Q = I$), R - yuqori uchburchak matritsa. Bu faktorizatsiya eng kichik kvadratlar masalasini yechishda va xos qiyatlarni topishda qo'llaniladi. QR faktorizatsiya Gram-Schmidt ortogonallashtirish, Householder aks ettirish yoki Givens aylanish orqali hisoblanadi.

SVD (Singular Value Decomposition): $A = U\Sigma V^T$ - eng universal faktorizatsiya. U psevdoteskari matritsa, rang aniqlash, ma'lumotlarni siqish, Principal Component Analysis (PCA) kabi ko'plab qo'llanmalarga ega. SVD ni hisoblash $O(mn^2)$ yoki $O(m^2n)$ vaqt talab qiladi (m va n ning qaysi biri kichikligiga bog'liq).

Differensial va variatsion hisoblash

Ko'plab massiv funksiyalari differentsiallanadi va ularning hosilalari optimallashtirish va tahlilda muhim rol o'ynaydi.

Vektor funksiyaning hosilasi - bu Jacobian matritsasi J . Agar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bo'lsa, $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Maxsus holat: $n = 1$ bo'lganda, J gradient vektoriga aylanadi: $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)^T$. Ikkinchi hosila Hessian matritsasi: $H_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$.

Zanjir qoidasi kompozitsiya uchun: Agar $h = g \circ f$ bo'lsa, $Dh = Dg \cdot Df$ (matritsalarini ko'paytirish). Bu qoida orqaga tarqalish (backpropagation) algoritmi asosida yotadi, bu neyron tarmoqlarni o'qitishda qo'llaniladi.

Matritsali differensial hisoblash murakkabchiroq. Agar $f: M_n(R) \rightarrow R$ matritsa funksiyasi bo'lsa, $\partial f / \partial A$ - bu matritsali hosila. Misollar: $\partial(\text{tr}(A)) / \partial A = I$, $\partial(\text{tr}(A^2)) / \partial A = 2A$, $\partial(\det(A)) / \partial A = \det(A) \cdot A^{-T}$.

Funktionallar - bu funksiyalarni haqiqiy sonlarga akslantiruvchi xaritalashlar. Variatsion hosila $\delta F / \delta f$ - bu funktsionalning f ga nisbatan hosilasi. Masalan, agar $F[f] = \int \|f\|^2 dx$ bo'lsa, $\delta F / \delta f = 2f$. Variatsion hisoblash optimal funktsiyalarni topishda qo'llaniladi.

Raqamli barqarorlik va shart raqami

Raqamli hisoblashlarda barqarorlik muhim xususiyat hisoblanadi. Barqaror algoritmlar xatoliklarni kontrol ostida saqlaydi, nobarqaror algoritmlar esa xatoliklarni kuchaytiradi.

Shart raqami $\kappa(A)$ matritsaning xatoliklarga sezgirligini o'lchaydi. 2-norma uchun: $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ (eng katta va eng kichik singular qiymatlarning nisbati). Agar $\kappa(A) \approx 10^k$ bo'lsa, taqriban k ta raqam aniqligini yo'qotish mumkin.

Murakkab hisoblashlarda xatoliklar to'planadi. Agar N ta operatsiya bajarilsa va har birining xatoligi ε bo'lsa, umumiy xatolik $\sqrt{N} \cdot \varepsilon$ tartibida bo'ladi (statistik mustaqillik taxminida). Shuning uchun, ko'p operatsiyali algoritmlar uchun yuqori aniqlik kerak.

Yaxlitlash tahlili quyidagi savollarga javob beradi. Taqribiy yechim $\tilde{x}$ qaysi muammoning aniq yechimi? $f(x \oplus y) = (x + y)(1 + \delta)$, bu yerda $|\delta| \leq \varepsilon_{\text{machine}}$. Umumiy xatolikni baholar: $\|\tilde{x} - x^*\| \leq f(\kappa(A), n, \varepsilon_{\text{machine}})$, bu yerda f - ma'lum funksiya.

Prekonditsionerlash sharti raqamini yaxshilash usuli. G'oya: $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ yechish, bu yerda M - Ag preconditioner hisoblanib, $\kappa(M^{-1}A) < \kappa(A)$. Yaxshi prekonditsioner tanlash iterativ usullarning konvergensiyasini sezilarli tezlashtiradi.

Xulosa

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining matematik tahlili chuqur va ko'p qirrali tadqiqot mavzusi ekanligi aniqlandi. Ushbu tadqiqot natijasida quyidagi asosiy xulosalarga kelamiz.

Vektorli fazolar nazariyasi massiv funksiyalarining asosiy matematik tuzilmasini ta'minlaydi. Massivlar vektorli fazolar elementlari sifatida qaralishi mumkin va bu nuqtai nazardan barcha chiziqli algebra apparati qo'llaniladi. Asos tushunchasi, chiziqli erklilik, o'lcham kabi fundamental tushunchalar massiv operatsiyalarini tushunish uchun zarur.

Chiziqli operatorlar va matritsali transformatsiyalar massiv funksiyalarining ko'pchiligini matematik jihatdan tavsiflaydi. Har bir chiziqli massiv funksiyasi matritsa bilan ifodalanishi mumkin va bu tasvir ikki tomonlama. Yadrosi, tasviri, rang kabi tushunchalar funksiyaning xususiyatlarini to'liq tavsiflaydi.

Norma va metrika tushunchalari massiv funksiyalarining sifat ko'rsatkichlarini baholash uchun asosiy vositadir. Turli normalar (Evklid, maksimum, Frobenius) turli xususiyatlarni ta'kidlaydi. Metrik fazolarda yaqinlashish, uzluksizlik va barqarorlik tushunchalari aniq matematikasiga ega bo'ladi.

Ichki ko'paytma va Hilbert fazolari geometrik tushunchalarni joriy qiladi. Ortogonallik, proyeksiya, burchak tushunchalari ko'plab algoritmlar uchun asosdir. Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts tengsizligi va parallelogramm identifikatsiyasi muhim matematik vositalar hisoblanadi.

Xos qiyatlar va spektral tahlil matritsalarining chuqur xususiyatlarini ochib beradi. Spektral yoyilma simmetrik matritsalarini tushunishning asosi bo'lib, ko'plab qo'llanmalarga ega. Singular qiymatlarga ajratish (SVD) har qanday matritsa uchun universal va kuchli vosita hisoblanadi.

Tensorlar va ko'p chiziqli algebra yuqori o'lchovli massivlar uchun matematikasini taqdim etadi. Tensorli ko'paytma, qisqartirish va ajratish operatsiyalari zamonaviy ma'lumotlar tahlili va sun'iy intellektda keng qo'llaniladi. Tensorlarning rangi va tuzilmasi hali ham faol tadqiqot sohasidir.

Chiziqli tenglamalar tizimi va yechish usullari ko'plab massiv funksiyalarining asosida yotadi. Tizimning yechiluvchanlik shartlari, yagona yechim mavjudligi, psevdoteskari matritsa tushunchalari amaliy jihatdan juda muhim. Iterativ usullar katta tizimlar uchun samaraliroq va ularning konvergenksiya tahlili matematik jihatdan qiziqarli.

Norma bahosi va xatoliklar tahlili raqamli hisoblashlarning ishonchliligini ta'minlaydi. Sharti raqami masalaning noto'g'ri qo'yilganligini aniqlaydi. Orqaga tahlil xatoliklarning tarqalishini tushunishga yordam beradi. Barqarorlik algoritmi tanlovida asosiy mezonlardan biridir.

Konvergenksiya va iterativ algoritmlar tahlili ko'plab massiv funksiyalarining amaliy qo'llanilishini ta'minlaydi. Konvergenksiya tezligi, spektral radius, prekonditsionerlash kabi tushunchalar samarali algoritmlar yaratish uchun zarur. Chiziqli va kvadratik konvergenksiya o'rtasidagi farq juda muhim.

Optimallashtirish va ekstremumlar nazariyasi ko'plab massiv funksiyalarining maqsadini ifodalaydi. Konveks optimallashtirish samarali yechiladigan masalalar sinfini beradi. KKT shartlari cheklangan optimallashtirish uchun zaruriy va (ba'zi shartlarda) yetarli. Hessian matritsasi ekstremum turini aniqlaydi.

Matritsa faktorizatsiyalari hisoblashlarni tezlashtirish va soddalashtirishning asosiy usuli hisoblanadi. LU, Cholesky, QR, SVD faktorizatsiyalari turli maqsadlar

uchun mo'ljallangan. Har birining o'z afzalliklari, kamchiliklari va qo'llanish sohalari mavjud.

Ushbu tadqiqot ko'rsatdiki, massiv funksiyalarining matematik tahlili nafaqat nazariy jihatdan qiziqarli, balki amaliy dasturlash uchun ham juda foydalidir. Matematik asoslarni tushunish samarali, barqaror va optimallashtirilgan algoritmlar yaratish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang G. Introduction to Linear Algebra, 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press, 2016. 584 p.
2. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations, 4th Edition. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
3. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 361 p.
4. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis, 2nd Edition. Cambridge University Press, 2012. 643 p.
5. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // SIAM Review. 2009. Vol. 51. No. 3. P. 455-500.
6. Rudin W. Functional Analysis, 2nd Edition. McGraw-Hill, 1991. 424 p.
7. Halmos P.R. Finite-Dimensional Vector Spaces. Springer, 1974. 200 p.
8. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization, 2nd Edition. Springer, 2006. 664 p.
9. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
10. Higham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, 2nd Edition. SIAM, 2002. 680 p.
11. Meyer C.D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, 2000. 718 p.
12. Axler S. Linear Algebra Done Right, 3rd Edition. Springer, 2015. 340 p.
13. Lax P.D. Linear Algebra and Its Applications, 2nd Edition. Wiley, 2007. 376 p.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: Физматлит, 2004. 572 с.