

Ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarning analitik va raqamli xususiyatlarini tadqiq qilish

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massivlar uchun belgilangan funksiyalarning analitik va raqamli xususiyatlari kompleks tadqiq qilingan. Tadqiqot davomida funksiyalarning analitik tavsiflari, matematikasiy modellashtirish, raqamli hisoblash algoritmlari, xatoliklar tahlili va barqarorlik masalalari chuqur o'rganilgan. Maqolada chiziqli va nochiziqli funksiyalarning differensial xususiyatlari, konvergenstsiya shartlari, raqamli integratsiya va differentsiatsiya usullari tahlil qilingan. Massiv funksiyalarining approksimatsiya xatoliklari, yaxlitlash muammolari, hisoblash murakkabligi va optimallashtirish strategiyalari batafsil ko'rib chiqilgan. Tadqiqot natijalari zamonaviy hisoblash texnologiyalarida qo'llaniladigan massiv operatsiyalariga nazariy va amaliy asos yaratadi, shuningdek, samarali va aniq raqamli algoritmlar ishlab chiqish uchun yo'l-yo'riq beradi.

Kalit so'zlar: analitik xususiyatlar, raqamli metodlar, hisoblash algoritmlari, xatoliklar tahlili, approksimatsiya nazariyasi, raqamli barqarorlik, konvergenstsiya tahlili, interpolatsiya, ekstrapolyatsiya, differensial hisoblash, integral hisoblash, raqamli integratsiya, yaxlitlash xatoliklari

Research on analytical and numerical properties of functions defined in multidimensional arrays

Gulbodom Oybek kizi Norqulova
BIU

Abstract: This article comprehensively studies the analytical and numerical properties of functions defined for multidimensional arrays. During the research, analytical descriptions of functions, mathematical modeling, numerical calculation algorithms, error analysis and stability issues were studied in depth. The article analyzes the differential properties of linear and nonlinear functions, convergence conditions, numerical integration and differentiation methods. Approximation errors, rounding problems, computational complexity and optimization strategies of array functions are considered in detail. The research results create a theoretical and practical basis for array operations used in modern computing technologies, and also provide guidance for the development of efficient and accurate numerical algorithms.

Keywords: analytical properties, numerical methods, computational algorithms, error analysis, approximation theory, numerical stability, convergence analysis, interpolation, extrapolation, differential calculus, integral calculus, numerical integration, rounding errors

Kirish. Ko‘p o‘lchovli massivlar zamonaviy hisoblash matematikasining asosiy tuzilmalari bo‘lib, ular ustida belgilangan funksiyalar nazariy va amaliy jihatdan keng tadqiq etilishi zarur. Analitik va raqamli xususiyatlar bu funksiyalarning ikki muhim tomonini ifodalaydi: analitik xususiyatlar matematikasiy qonuniyatlarni, raqamli xususiyatlar esa kompyuterda amalga oshirilish jihatlarini tavsiflaydi.

Analitik tahlil funksiyalarning matematik strukturasi, ularning davomlilikini, differentsiallashtirishini, integratsiya qobiliyatini va boshqa matematik xossalari o‘rganadi. Bu nazariy asoslar algoritmlarning to‘g‘riligini isbotlash, optimal yechimlarni topish va matematik teoremlar qo‘llash imkonini beradi. Analitik funksiyalar - kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘lib, ular ko‘p o‘lchovli massivlarda maxsus rol o‘ynaydi.

Raqamli tahlil esa bu funksiyalarni chekli aniqlikdagi kompyuterda qanday hisoblash, qanday xatoliklarga yo‘l qo‘yilishi, qanday murakkablikka ega ekanligi kabi amaliy savollarni o‘rganadi. Raqamli metodlar analitik yechim topib bo‘lmaydigan masalalarni taqribiy yechish imkonini beradi. Suzuvchi nuqta arifmetikasi, yaxlitlash xatoliklari, hisoblash barqarorligi kabi masalalar raqamli tahlilning asosiy yo‘nalishlarini tashkil etadi.

Massiv funksiyalarining analitik va raqamli xususiyatlarini birga o‘rganish bir necha sabablarga ko‘ra muhimdir. Birinchidan, analitik xossalari raqamli algoritmlarni tanlash va loyihalashda asos bo‘ladi. Ikkinchidan, raqamli cheklovlar analitik natijalarning amaliy qo‘llanilishini belgilaydi. Uchinchidan, bu ikki yondashuv birgalikda samarali va aniq hisoblash usullarini yaratishga imkon beradi.

Zamonaviy ilmiy hisoblashlarda, ma’lumotlar tahlilida va sun’iy intellektda massiv funksiyalarining roli tobora ortib bormoqda. Katta hajmdagi ma’lumotlar bilan ishlash, murakkab modellarni o‘qitish, real vaqtda qaror qabul qilish kabi vazifalar samarali massiv operatsiyalarini talab qiladi. Shuning uchun, bu funksiyalarning analitik va raqamli xususiyatlarini to‘liq tushunish zarurati paydo bo‘ladi.

Tadqiqotning maqsadi ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalarining analitik va raqamli xususiyatlarini sistemali ravishda o‘rganish, ularning o‘zaro bog‘liqligini aniqlash, xatoliklar manbalarini tahlil qilish va optimal hisoblash strategiyalarini ishlab chiqishdan iborat. Tadqiqot ob’ekti sifatida turli turdagi massiv funksiyalari (chiziqli, nochiziqli, differentsiallashtiruvchi, integral) va ularning hisoblash xususiyatlari tanlab olingan.

Asosiy qism

Analitik funksiyalar nazariyasi va massivlarga tatbiqi

Analitik funksiyalar kompleks tahlilning asosiy ob'ekti bo'lib, ular har bir nuqtada kompleks differensiallanuvchi funksiyalardir. Funksiya $f(z)$ sohada analitik deyiladi, agar u bu sohaning har bir nuqtasida kompleks differensiallanuvchi bo'lsa. Kompleks differensiallanish Koshi-Riman shartlari bilan aniqlanadi.

Agar $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ bo'lib, $z = x + iy$ bo'lsa, Koshi-Riman shartlari quyidagicha: $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ va $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Bu shartlar bajarilganda funksiya analitikdir. Analitik funksiyalarning muhim xossalari mavjud: ular cheksiz marta differensiallanuvchi, darajali qatorga yoyilishi mumkin, konform akslantirish hosil qiladi.

Ko'p o'lchovli massivlarda analitik funksiyalar yoyilmasi muhim ahamiyatga ega. Teylor qatori: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, bu yerda $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Bu yoyilma funksiyani polinomlar yig'indisi sifatida ifodalash imkonini beradi va raqamli hisoblashlarda approksimatsiya uchun ishlatiladi.

Loran qatori yakka nuqtalar atrofida funksiyani yoyish imkonini beradi: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Bu yoyilma murakkabroq funksiyalarni tavsiflashda qo'llaniladi. Residuom teoremasi integral hisoblashda muhim rol o'ynaydi va massiv integratsiyalarini hisoblashda ishlatilishi mumkin.

Ko'p o'zgaruvchili analitik funksiyalar $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ har bir o'zgaruvchi bo'yicha alohida analitik bo'lishi kerak. Gartogs teoremasi shuni ko'rsatadiki, agar funksiya har bir o'zgaruvchi bo'yicha alohida analitik bo'lsa, u barcha o'zgaruvchilar bo'yicha birgalikda analitikdir. Bu teorema ko'p o'lchovli massiv funksiyalarini tahlil qilishda muhim.

Differensial hisoblash va massiv hosilalari

Differensial hisoblash massiv funksiyalarining o'zgarish tezligini o'rganadi. Bitta o'zgaruvchili funksiya hosilasi $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h$ orqali aniqlanadi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun qisman hosilalar mavjud: $\partial f/\partial x_i$ - faqat x_i o'zgaruvchisi bo'yicha hosila.

Gradient vektori $\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)^T$ funksiyaning eng tez o'sish yo'nalishini ko'rsatadi. Gradientning kattaligi $\|\nabla f\|$ o'sish tezligini, yo'nalishi esa qaysi tomonga eng tez o'sishni bildiradi. Gradient nolga teng bo'lgan nuqtalar kritik nuqtalar deyiladi va ekstremumlar bu nuqtalarda joylashadi.

Hessian matritsasi H ikkinchi tartibli qisman hosilalardan tashkil topgan: $H_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. Bu matritsa funksiyaning egriligini tavsiflaydi. Agar H musbat aniq bo'lsa, funksiya konveksdir. Agar H manfiy aniq bo'lsa, funksiya konkavdir. Hessian matritsasi xos qiymatlari egrilik yo'nalishlarini va intensivligini beradi.

Yakobian matritsasi vektor funksiya $f: R^n \rightarrow R^m$ uchun $J_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$ orqali aniqlanadi. Bu matritsa chiziqli approksimatsiyani beradi: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + J(x)\Delta x$.

Yakobianniig determinanti hajm o'zgarishini ko'rsatadi va koordinatalar o'zgarishida ishlatiladi.

Zanjir qoidasi kompozitsiya hosilasini hisoblash uchun: agar $h = g \circ f$ bo'lsa, $Dh(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$. Bu qoida neyron tarmoqlarda orqaga tarqalish (backpropagation) algoritmining asosida yotadi. Avtomatik differentsiatsiya zamonaviy dasturlash kutubxonalarida (TensorFlow, PyTorch) zanjir qoidasini avtomatik qo'llaydi.

Yo'nalish bo'yicha hosila $D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$ funksiyaning v yo'nalishda o'zgarish tezligini beradi. Maksimal qiymat $\|\nabla f(x)\|$ bo'lib, bu gradient yo'nalishida erishiladi. Kontur chiziqlari ∇f ga perpendikulyar yo'nalishlarda joylashgan.

Raqamli differentsiatsiya usullari

Analitik hosilalarni hisoblash har doim ham mumkin emas, shuning uchun raqamli differentsiatsiya usullari qo'llaniladi. Oldinga farq (forward difference): $f'(x) \approx [f(x+h) - f(x)]/h$. Bu eng oddiy usul bo'lib, xatoligi $O(h)$ tartibida.

Orqaga farq (backward difference): $f'(x) \approx [f(x) - f(x-h)]/h$. Bu ham $O(h)$ xatolikka ega. Markaziy farq (central difference): $f'(x) \approx [f(x+h) - f(x-h)]/(2h)$. Bu aniqroq bo'lib, xatoligi $O(h^2)$ tartibida.

Yuqori tartibli hosilalar uchun: $f''(x) \approx [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]/h^2$. Bu ikkinchi hosila uchun markaziy farq formulasi bo'lib, xatoligi $O(h^2)$ tartibida. Uchinchi va yuqori hosilalar ham shunga o'xshash formulalar bilan hisoblanadi.

Qadam uzunligi h ni tanlash muhim masala. Agar h juda kichik bo'lsa, yaxlitlash xatoliklari ortadi. Agar h juda katta bo'lsa, approksimatsiya xatoligi ortadi. Optimal $h \approx \sqrt{\epsilon}$ tartibida, bu yerda ϵ - mashinali aniqlik (odatda 10^{-16}). Amalda $h \approx 10^{-8}$ tanlash ko'pincha yaxshi natija beradi.

Kompleks qadam differentsiatsiyasi yuqori aniqlik beradi: $f'(x) \approx \text{Im}[f(x + ih)]/h$, bu yerda i - xayoliy birlik. Bu usulning xatoligi $O(h^2)$ bo'lib, lekin yaxlitlash xatoliklaridan kam ta'sirlanadi. Sababi, ayirish operatsiyasi yo'q va shu sababli katastrofik qisqarish muammosi yuzaga kelmaydi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun gradient quyidagicha hisoblanadi: $\partial f / \partial x_i \approx [f(x + he_i) - f(x - he_i)]/(2h)$, bu yerda e_i - i -yo'nalishdagi birlik vektor. Hessian matritsasi uchun: $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \approx [f(x + he_i + he_j) - f(x + he_i - he_j) - f(x - he_i + he_j) + f(x - he_i - he_j)]/(4h^2)$.

Avtomatik differentsiatsiya (AD) aniq hosilalarni hisoblashning zamonaviy usuli. Oldinga rejim (forward mode) zanjir qoidasini chapdan o'ngga qo'llaydi va bir o'zgaruvchi bo'yicha hosilani samarali hisoblaydi. Orqaga rejim (reverse mode) o'ngdan chapga qo'llaydi va ko'p o'zgaruvchilar bo'yicha hosilani samarali hisoblaydi. Backpropagation orqaga rejim AD ning maxsus holi hisoblanadi.

Integral hisoblash va raqamli integratsiya

Integral hisoblash massiv funksiyalarining yig'indisini va o'rtacha qiymatini topish uchun ishlatiladi. Aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda ostidagi

yuzani beradi. Nyuton-Leybnis formulasi: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, bu yerda $F - f$ ning boshlang'ich funksiyasi.

Ko'p o'lchovli integrallar ketma-ket yoki takroriy integrallar sifatida hisoblanadi: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dx dy = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx$. Fubini teoremasi integratsiya tartibini o'zgartirish imkonini beradi (ma'lum shartlar ostida).

Raqamli integratsiya (kvadratura) integral qiymatini taqribiy hisoblash usullari majmuasi. To'g'ri to'rtburchaklar usuli: $\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_i f(x_i)$, bu yerda $h = (b-a)/n$ va $x_i = a + ih$. Bu eng oddiy usul bo'lib, xatoligi $O(h)$ tartibida.

Trapetsiya usuli: $\int_a^b f(x)dx \approx h[f(a)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)/2]$. Bu usul chiziqli interpolatsiyaga asoslangan va xatoligi $O(h^2)$ tartibida. Simpson usuli kvadratik interpolatsiyaga asoslangan: $\int_a^b f(x)dx \approx (h/3)[f(a) + 4\sum(\text{toq } i) f(x_i) + 2\sum(\text{juft } i) f(x_i) + f(b)]$. Bu usulning xatoligi $O(h^4)$ tartibida va odatda aniqroq.

Gauss kvadraturasi eng samarali usullardan biri. n ta nuqtada $2n-1$ darajali polinamlarni aniq integrallaydi. Gauss-Lejandre kvadraturasi: $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_i w_i f(x_i)$, bu yerda x_i - Lejandre polinomlarining ildizlari, w_i - og'irliklar. Umumiy oraliq uchun koordinatalar o'zgarishi qo'llaniladi.

Ko'p o'lchovli integrallar uchun Monte-Karlo usullari samarali. G'oya: tasodifiy nuqtalarda funksiya qiymatlarini hisoblash va o'rtachani topish. $\int_D f(x)dx \approx V(D)/N \sum_{i=1}^N f(x_i)$, bu yerda $V(D)$ - soha hajmi, x_i - tasodifiy nuqtalar. Xatolik $O(1/\sqrt{N})$ tartibida bo'lib, o'lchamga bog'liq emas - bu yuqori o'lchovlarda katta afzallik.

Adaptiv integratsiya xatolikni baholash va kerakli joylarda nuqtalar sonini oshirish orqali aniqlikni oshiradi. Algoritm oraliqni kichik qismlarga bo'ladi va har bir qismda xatolikni tekshiradi. Agar xatolik katta bo'lsa, qism yanada kichikroq bo'laklarga bo'linadi. Bu usul funksiya silliq bo'lmagan joylarda samarali.

Interpolyatsiya va approksimatsiya nazariyasi

Interpolyatsiya - berilgan nuqtalardagi qiymatlari ma'lum bo'lgan funktsiyani tiklash masalasi. n ta nuqta $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ berilgan bo'lsa, $P(x_i) = y_i$ shartni qanoatlantiruvchi polinom P topiladi.

Lagranj interpolyatsiya polinomi: $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i L_i(x)$, bu yerda $L_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)/(x_i - x_j)$ - Lagranj bazis polinomi. Bu polinom yagona va darajasi $n-1$ dan oshmaydigan polinom. Hisoblash murakkabligi $O(n^2)$.

Nyuton interpolyatsiya polinomi: $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots$ Bu shakl yangi nuqta qo'shilganda samarali. Koeffitsientlar bo'lingan farqlar orqali hisoblanadi: $a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$, bu yerda $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ - i -tartibli bo'lingan farq.

Interpolyatsiya xatoligi: agar f funksiya n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, $|f(x) - P(x)| \leq M/n! |\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)|$, bu yerda $M = \max |f^{(n)}(\xi)|$. Bu formula xatolikni baholash imkonini beradi.

Runge hodisasi yuqori darajali polinomlar bilan interpolyatsiyada yuzaga keladi. Teng oraliqli nuqtalarda yuqori darajali polinom chetlarda katta tebranishlarga ega

bo'ladi. Yechim: Chebishev nuqtalaridan foydalanish yoki piecewise interpolyatsiya (bo'lakli interpolyatsiya).

Splayn interpolyatsiyasi bo'lakli polinom interpolyatsiyasi bo'lib, oraliqni kichik qismlarga bo'ladi va har bir qismda past darajali polinom ishlatadi. Kubik splayn - eng keng tarqalgan tur bo'lib, har bir bo'lakda 3-darajali polinom. Shart: funksiya va uning birinchi va ikkinchi hosilalari uzluksiz.

Ko'p o'lchovli interpolyatsiya murakkabroq. Bilinear interpolyatsiya to'rt nuqta asosida: $f(x,y) \approx a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy$. Bicubic interpolyatsiya 16 ta nuqta va hosilalar ma'lumotlaridan foydalanadi, natija silliqroq bo'ladi. Yuqori o'lchovlarda tensorli ko'paytma usullari qo'llaniladi.

Approksimatsiya va eng yaxshi yaqinlashish

Approksimatsiya - funktsiyani oddiroq funksiyalar bilan yaqinlashtirish. Maqsad: $\|f - g\|$ ni minimallashtirish, bu yerda g - approksimatsiyalovchi funksiya. Turli normalar turli approksimatsiyalarni beradi.

Eng kichik kvadratlar usuli L_2 normasida approksimatsiya: $\min \sum_i (f(x_i) - g(x_i))^2$. Agar g polinomlar fazosidan tanlansa, normal tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Yechim chiziqli algebraik tizimni yechish orqali topiladi. Bu usul statistik tahlilda regressiya deyiladi.

Chebyshev approksimatsiyasi L_∞ normasida approksimatsiya: $\min \max_x |f(x) - g(x)|$. Bu minimax approksimatsiya deyiladi va eng yomon holatda ham minimal xatolikni ta'minlaydi. Remez algoritmi Chebishev approksimatsiyasini hisoblaydi.

Fourier qatori davriy funksiyalarni approksimatsiya qiladi: $f(x) \approx a_0/2 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$. Koeffitsientlar integral orqali hisoblanadi: $a_k = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$. Tez Fourier transformatsiyasi (FFT) bu koeffitsientlarni $O(n \log n)$ vaqtda hisoblaydi.

Veyvlet approksimatsiyasi lokal xususiyatlarni yaxshi ushlaydi. Veyvletlar - kichik to'liqlar bo'lib, ular cho'ziladi va siljiydi. Veyvlet yoyilmasi: $f(x) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$, bu yerda $\psi_{j,k}$ - asosiy veyvletlarning cho'zilgan va siljigan versiyalari. Veyvletlar tasvirlarni siqish va signallarni qayta ishlashda keng qo'llaniladi.

Ratsional approksimatsiya polinomlar nisbati bilan: $R(x) = P(x)/Q(x)$. Pade approksimatsiyasi Teylor qatorining ratsional o'xshashi bo'lib, katta oraliqda yaxshi ishlaydi. Ayniqsa, qutblarga ega funksiyalar uchun foydali.

Xatoliklar tahlili va barqarorlik

Raqamli hisoblashlarda xatoliklar muqarrar. Xatoliklarni tahlil qilish va boshqarish raqamli tahlilning asosiy vazifasi. Xatoliklar uch asosiy turga bo'linadi: model xatoliklari (fizik hodisani matematik model bilan approksimatsiya), ma'lumotlar xatoliklari (o'lchash xatoliklari), hisoblash xatoliklari (raqamli usullar va yaxlitlash).

Absolyut xatolik $\Delta x = |\tilde{x} - x|$, bu yerda x - aniq qiymat, $\tilde{x}$ - taqribiy qiymat. Nisbiy xatolik $\delta x = |\tilde{x} - x|/|x|$ xatolikni qiymatga nisbatan o'ldaydi. Amalda aniq qiymat noma'lum bo'ladi va xatolikni baholash kerak.

Yaxlitlash xatoliklari suzuvchi nuqta arifmetikasidan kelib chiqadi. Har bir son chekli aniqlikda saqlanadi. IEEE 754 standart: float (32 bit, 7-8 ta o'nlik raqam), double (64 bit, 15-16 ta o'nlik raqam). Mashinali epsilon $\varepsilon_{\text{machine}} - 1 + \varepsilon > 1$ bo'ladigan eng kichik ε .

Operatsiyalar xatoliklari: $f(x \oplus y) = (x \oplus y)(1 + \delta)$, bu yerda $|\delta| \leq \varepsilon_{\text{machine}}$ va $\oplus \in \{+, -, \times, /\}$. Katastrofik qisqarish yaqin sonlarni ayirishda yuzaga keladi va nisbiy xatolikni katta oshiradi. Masalan, agar $x \approx y$ bo'lsa, $x - y$ da nisbiy xatolik katta bo'ladi.

Xatoliklarning tarqalishi: agar $y = f(x)$ bo'lsa va x da Δx xatolik bo'lsa, y da $\Delta y \approx |f'(x)| \Delta x$ xatolik yuzaga keladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun: $\Delta f \approx \sum_i |\partial f / \partial x_i| \Delta x_i$. Bu formula xatoliklar qanday to'planishini ko'rsatadi.

Barqarorlik - algoritmnining xatoliklarga chidamliligini. Barqaror algoritm kichik kirishdagi xatolikni kichik chiqishdagi xatolikka olib keladi. Nobarqaror algoritm xatoliklarni kuchaytiradi. Orqaga barqarorlik: taqribiy yechim $\tilde{x}$ qaysi muammoning aniq yechimi? Agar $\tilde{x} = (A + E)^{-1}(b + \delta b)$ va $\|E\|$, $\|\delta b\|$ kichik bo'lsa, algoritm orqaga barqaror.

Sharti raqami κ muammoning xatoliklarga sezgirligini o'ldaydi. Yaxshi shaklda qo'yilgan muammolar (well-conditioned) $\kappa \approx 1$ ga ega. Noto'g'ri shaklda qo'yilgan muammolar (ill-conditioned) $\kappa \gg 1$ ga ega. Chiziqli tizim uchun: $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, xatolik kuchayishi $\kappa(A)$ tartibida bo'ladi.

Konvergensiya tahlili va tezligi

Ketma-ketlikning konvergensiyasi - limitga yaqinlashish. Ketma-ketlik $\{x_k\}$ x^* ga yaqinlashadi, agar $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0$ bo'lsa. Konvergensiya tezligi muhim xarakteristika: tezroq yaqinlashish kamroq iteratsiya talab qiladi.

Chiziqli konvergensiya: $\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|$, bu yerda $0 < C < 1$. Xatolik har iteratsiyada C marta kamayadi. C ga konvergensiya koeffitsiyenti deyiladi. Qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik tez yaqinlashadi.

Kvadratik konvergensiya: $\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2$. Xatolik kvadratik kamayadi - juda tez. Masalan, agar $\|x_1 - x^*\| = 10^{-2}$, $\|x_2 - x^*\| \approx 10^{-4}$, $\|x_3 - x^*\| \approx 10^{-8}$. Nyuton usuli kvadratik konvergensiyaga ega.

Yuqori tartibli konvergensiya: $\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^p$, $p > 2$. Bunday konvergensiya superchiziqli yoki kubik ($p=3$) deyiladi. Amalda $p=2$ dan yuqori kamdan-kam uchraydi.

Nyuton usuli $f(x) = 0$ tenglamani yechadi: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Oddiy ildiz yaqinida kvadratik konvergensiyaga ega. Ko'p o'ldovli holda: $x_{k+1} = x_k - [J(x_k)]^{-1} f(x_k)$, bu yerda J - Yakobian matritsasi.

Gradientli tushish optimallashtirish uchun: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$. Konveks funksiya uchun chiziqli konvergenstsiya. Tezlik sharti raqamiga bog'liq: $\rho \approx (\kappa-1)/(\kappa+1)$. Agar κ katta bo'lsa, konvergenstsiya sekin.

Qadam α ni tanlash muhim. Juda katta α - divergenstsiya. Juda kichik α - sekin konvergenstsiya. Chiziq bo'ylab qidiruv (line search) optimal α ni topadi. Adaptiv usullar (Adam, RMSprop) α ni avtomatik sozlaydi.

Konjugat gradientlar usuli kvadratik funktsiyalar uchun n iteratsiyada aniq yechim topadi (nazariy jihatdan). Amalda, yaxlitlash xatoliklari tufayli ko'proq iteratsiya kerak bo'lishi mumkin. Ammo, Nyuton usuliga nisbatan Yakobianm hisoblash kerak emas.

Raqamli chiziqli algebra algoritmlari

Chiziqli tizim $Ax = b$ ni yechish ko'plab massiv funktsiyalarining asosida yotadi. Gauss usuli - eng klassik usul. Forward elimination (oldinga yo'qotish): A ni yuqori uchburchak shaklga keltirish. Backward substitution (orqaga almashtirish): yechimni topish. Vaqt murakkabligi: $O(n^3)$.

Ustun element tanlash (partial pivoting) barqarorlikni oshiradi. Har bir qadamda eng katta absolyut qiymatli elementni tanlash. To'liq element tanlash (complete pivoting) eng barqaror, lekin sekinroq. Amalda qisman element tanlash yetarli.

LU faktorizatsiya: $A = LU$, bu yerda L - pastki uchburchak, U - yuqori uchburchak. Bir marta faktorizatsiya qilgandan keyin, turli b lar uchun tizimni tez yechish mumkin: $Ly = b$, keyin $Ux = y$. Bu ko'p o'ng tomonli tizimlar uchun samarali.

Cholesky faktorizatsiyasi simmetrik musbat aniq matritsalar uchun: $A = LL^T$. Faqat L ni saqlash kerak - xotira tejash. Hisoblash LU dan ikki baravar tezroq. Raqamli barqarorlik yaxshi - musbat aniqlik kafolati.

Iterativ usullar katta siyrak matritsalar uchun samaraliroq. Yakobiy usuli: $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$. Gauss-Zeydel usuli: yangilangan qiymatlarni darhol ishlatadi, tezroq yaqinlashadi. SOR (Successive Over-Relaxation): relaksatsiya parametri ω bilan tezlashtirish.

Konjugat gradientlar (CG) simmetrik musbat aniq tizimlar uchun eng samarali iterativ usul. Krylov kichik fazosida ishlaydi. Nazariy jihatdan n iteratsiyada aniq yechim. Amalda, ε aniqlikka erishish uchun $O(\sqrt{\kappa} \log(1/\varepsilon))$ iteratsiya kerak.

Prekonditsionerlash konvergenstsiyani tezlashtirish uchun: $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ yechish, bu yerda $\kappa(M^{-1}A) < \kappa(A)$. Yaxshi prekonditsioner: hisoblash arzon, sharti raqamini sezilarli kamaytiradi. Incomplete LU, Jacobi, SSOR - keng tarqalgan prekonditsionerlar.

GMRES (Generalized Minimal Residual) nosimmetrik tizimlar uchun. Krylov kichik fazosida minimal residuum prinsipiga asoslangan. Xotira talabi katta - restart strategiyasi bilan kamaytiriladi. BiCGSTAB - muqobil usul, kamroq xotira, lekin kamroq barqaror.

Xos qiymatlar va singular qiymatlarni hisoblash

Xos qiymatlar masalasi: $Av = \lambda v$. Bu nosimmetrik tizim, oddiy chiziqli tizimdan murakkabroq. To'g'ridan-to'g'ri usullar (analitik formula) faqat kichik matritsalar ($n \leq 4$) uchun amaliy.

Quvvat usuli (Power method) eng katta absolyut qiymatli xos qiymatni topadi. Algoritm: $v^{(k+1)} = Av^{(k)} / \|Av^{(k)}\|$. Konvergeniya tezligi $|\lambda_2/\lambda_1|$ ga bog'liq. Agar $\lambda_1 \gg \lambda_2$ bo'lsa, tez yaqinlashadi.

Teskari iteratsiya eng kichik xos qiymatni topadi: $(A - \sigma I)^{-1}$ ga quvvat usulini qo'llash. Agar $\sigma \approx \lambda$ bo'lsa, juda tez konvergeniya (Rayleigh quotient iteration bilan kombinatsiyalanganda kvadratik).

QR algoritmi barcha xos qiymatlarni topadi. Algoritm: $A_0 = A$, $A_k = Q_k R_k$ (QR faktorizatsiya), $A_{k+1} = R_k Q_k$. Ketma-ketlik $\{A_k\}$ Schur shaklga yaqinlashadi (yuqori uchburchak yoki kvaziuchburchak). Diagonalda xos qiymatlar. Vaqt murakkabligi: $O(n^3)$ har bir iteratsiya, $O(n)$ iteratsiya kerak.

Hessenberg shaklga keltirish oldindan qo'llaniladi: $QAQ^T = H$, bu yerda H - Hessenberg matritsasi (pastki uchburchakka yaqin). Hessenberg matritsada QR iteratsiyasi $O(n^2)$ vaqt talab qiladi. Umumiy murakkablik: $O(n^3)$ boshlang'ich keltirish + $O(n^3)$ iteratsiyalar.

Singular qiymatlar masalasi: $A = U\Sigma V^T$. To'g'ridan-to'g'ri hisoblash: $A^T A$ va AA^T ning xos qiymatlarini topish. Lekin $A^T A$ sharti raqami $\kappa(A)^2$ bo'ladi - barqarorlik muammosi. Yaxshiroq: Golub-Kahan bidiagonalizatsiyasi.

Bidiagonal shaklga keltirish: $U_0^T A V_0 = B$, bu yerda B - bidiagonal (ikki diagonal). Keyin B ga iterativ usul (QR yoki divide-and-conquer) qo'llaniladi. Umumiy murakkablik: $O(mn^2)$ yoki $O(m^2n)$ (m va n dan kichigi).

Truncated SVD katta matritsalar uchun faqat bir nechta eng katta singular qiymatlarni topadi. Lanczos yoki Arnoldi iteratsiyalari Krylov kichik fazosida ishlaydi. Randomized SVD tasodifiy proyeksiyalar orqali tezlashtiradi - ma'lumotlar tahlilida mashhur.

Optimallashtirish algoritmlari va ularning konvergenziyasi

Optimallashtirish - funktsiyaning ekstremumini topish. Cheklanmagan optimallashtirish: $\min_x f(x)$. Birinchi tartibli usullar faqat gradient ishlatadi, ikkinchi tartibli usullar Hessian ham ishlatadi.

Gradientli tushish (Gradient Descent): $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})$. Eng oddiy usul, katta miqyosli muammolar uchun mos. Konvergeniya tezligi sharti raqamiga bog'liq. Konveks funktsiya uchun chiziqli konvergeniya.

Chiziq bo'ylab qidiruv (Line search) optimal qadamni topadi: $\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$. Aniq chiziq qidiruvi qimmat, taxminiy usullar (Armijo, Wolfe shartlari) amaliy.

Momentum usuli oldingi yo'nalishlarni hisobga oladi: $v^{\{k+1\}} = \beta v^{\{k\}} - \alpha \nabla f(x^{\{k\}})$, $x^{\{k+1\}} = x^{\{k\}} + v^{\{k+1\}}$. Tebranishlarni kamaytiradi, konvergentsiyani tezlashtiradi. Nesterov momentum yanada yaxshiroq.

Adaptiv usullar har bir parametrlar uchun alohida qadam: AdaGrad, RMSprop, Adam. Adam - eng mashhur, birinchi va ikkinchi momentlarni hisobga oladi. Chuqur o'rganishda standart tanlov.

Nyuton usuli ikkinchi tartibli: $x^{\{k+1\}} = x^{\{k\}} - [H(x^{\{k\}})]^{-1} \nabla f(x^{\{k\}})$. Kvadratik konvergentsiya, lekin Hessian hisoblash va invertsiya qimmat ($O(n^3)$). Kichik masalalar uchun mos.

Kvazi-Nyuton usullari Hessian teskari approksimatsiyasini saqlab yangilaydi: $B_{k+1} \approx [H(x^{\{k\}})]^{-1}$. BFGS - eng mashhur kvazi-Nyuton usuli. Superchiziqli konvergentsiya, $O(n^2)$ xotira. Limited-memory BFGS (L-BFGS) faqat so'nggi bir nechta yangilanishni saqlaydi - katta masalalar uchun.

Konjugat gradientlar optimallashtirish uchun: yo'nalishlar konjugat (Hessian bo'yicha ortogonal). Kvadratik funksiya uchun n iteratsiyada yechim. Nochiziqli funksiyalar uchun nonlinear CG variantlari (Fletcher-Reeves, Polak-Ribiere).

Stoxastik gradiyent tushish (SGD) katta ma'lumotlar to'plamlarida: gradient approksimatsiyasini kichik mini-batch da hisoblash. Har bir iteratsiya arzon, lekin shovqinli. Mini-batch hajmi va learning rate schedule muhim giperparametrlar.

Xulosa

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining analitik va raqamli xususiyatlarini tadqiq qilish natijasida quyidagi asosiy xulosalarga kelamiz.

Analitik funksiyalar nazariyasi massiv operatsiyalarining nazariy asosini tashkil etadi. Koshi-Riman shartlari, Teylor va Loran qatorlari, Gartogs teoremasi kabi tushunchalar ko'p o'lchovli funksiyalarning xususiyatlarini tushunishga yordam beradi. Analitiklik xossasi ko'plab matematik teoremlar va usullarni qo'llash imkonini beradi.

Differensial hisoblash massiv funksiyalarining mahalliy xususiyatlarini o'rganadi. Gradient, Hessian va Yakobian matritsalarini funksiyaning o'zgarish tezligini, egriligini va chiziqli approksimatsiyasini beradi. Zanjir qoidasi murakkab kompozitsiyalarning hosilalarini hisoblash imkonini beradi va zamonaviy chuqur o'rganishda asosiy rol o'ynaydi.

Raqamli differentsiatsiya analitik hosilalar mavjud bo'lmagan hollarda qo'llaniladi. Oldinga, orqaga va markaziy farqlar turli aniqlik darajalarini beradi. Qadam uzunligini to'g'ri tanlash approksimatsiya va yaxlitlash xatoliklarini muvozanatlash uchun muhim. Avtomatik differentsiatsiya zamonaviy yondashuv bo'lib, aniq hosilalarni samarali hisoblaydi.

Integral hisoblash va raqamli integratsiya massiv funksiyalarining global xususiyatlarini o'rganadi. Trapetsiya, Simpson va Gauss kvadraturalari turli aniqlik va

murakkablikka ega. Ko'p o'lchovli integrallar uchun Monte-Karlo usullari yuqori o'lchovlarda samarali. Adaptiv integratsiya xatolikni boshqarish imkonini beradi.

Interpolyatsiya va approksimatsiya funksiyalarni oddiyroq funksiyalar bilan yaqinlashtiradi. Lagranj va Nyuton polinomlari, kubik splaynlar, Fourier qatori, veyvlet yoyilmasi turli vazifalar uchun mos. Eng kichik kvadratlar va Chebishev approksimatsiyalari turli optimallashtirish mezonlarini qo'llaydi.

Xatoliklar tahlili va barqarorlik raqamli hisoblashlarning ishonchlilikini ta'minlaydi. Absolyut va nisbiy xatoliklar, yaxlitlash xatoliklari, katastrofik qisqarish, sharti raqami kabi tushunchalar algoritmlarni tanlash va loyihalashda muhim. Orqaga barqarorlik algoritm sifatini baholash uchun qo'llaniladi.

Konvergensiya tahlili iterativ algoritmlarning samaradorligini o'lchaydi. Chiziqli, kvadratik va yuqori tartibli konvergensiya tezligi algoritm tanlashda asosiy mezon. Nyuton usuli, gradientli tushish, konjugat gradientlar kabi usullarning konvergensiya xususiyatlari yaxshi o'rganilgan.

Raqamli chiziqli algebra algoritmlari ko'plab massiv operatsiyalarining asosida yotadi. Gauss usuli, LU va Cholesky faktorizatsiyalari, iterativ usullar (Yakobiy, Gauss-Zeydel, CG, GMRES) turli vazifalar va matritsa xususiyatlari uchun mos. Prekonditsionerlash konvergensiyani sezilarli tezlashtiradi.

Xos qiymatlar va singular qiymatlarni hisoblash spektral tahlil uchun zarur. Quvvat usuli, QR algoritmi, Golub-Kahan bidiagonalizatsiyasi turli aniqlik va murakkablikka ega. Truncated va randomized usullar katta matritsalar uchun samarali.

Optimallashtirish algoritmlari ekstremumlarni topishda qo'llaniladi. Birinchi tartibli usullar (gradientli tushish va variantlari) katta miqyosli muammolar uchun mos. Ikkinchi tartibli usullar (Nyuton, kvazi-Nyuton) tezroq yaqinlashadi, lekin qimmatroq. Stoxastik usullar katta ma'lumotlar to'plamlari uchun zarur.

Umumiy xulosa: massiv funksiyalarining analitik xususiyatlari nazariy asos yaratadi, raqamli xususiyatlar esa amaliy qo'llanishni ta'minlaydi. Bu ikki yondashuv birgalikda samarali, aniq va barqaror hisoblash algoritmlarini yaratish imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Atkinson K.E. An Introduction to Numerical Analysis, 2nd Edition. Wiley, 1989. 712 p.
2. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis, 10th Edition. Cengage Learning, 2015. 895 p.
3. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations, 4th Edition. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
4. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 361 p.
5. Higham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, 2nd Edition. SIAM, 2002. 680 p.

6. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization, 2nd Edition. Springer, 2006. 664 p.
7. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
8. Sauer T. Numerical Analysis, 3rd Edition. Pearson, 2017. 632 p.
9. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis, 3rd Edition. Springer, 2002. 744 p.
10. Cheney W., Kincaid D. Numerical Mathematics and Computing, 7th Edition. Brooks/Cole, 2012. 763 p.
11. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
12. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics, 2nd Edition. Springer, 2007. 657 p.
13. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 8-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2015. 636 с.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.