

## Ko'p o'lchovli ma'lumot massivlarida belgilangan funksiyalarning algebraik va analitik xususiyatlari

Gulbodom Oybek qizi Norqulova  
BXU

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada ko'p o'lchovli ma'lumot massivlarida belgilangan funksiyalarning algebraik va analitik xususiyatlari kompleks tadqiq qilingan. Massiv funksiyalarining algebraik tuzilmasi, guruh va halqa xususiyatlari, chiziqli va bilinear operatorlar, analitik davomiylik va differensiallanish xossalari chuqur o'rganilgan. Tadqiqotda funksiyalarning kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik kabi algebraik qonunlari, ularning uzluksizligi, limitlar nazariyasi va yaqinlashish masalalari tahlil qilingan. Maqolada tensorli algebraning asosiy qonunlari, ko'p chiziqli xaritalashlar, funksional fazolar nazariyasi va operatorlar spektral xususiyatlari batafsil ko'rib chiqilgan. Nazariy natijalar zamonaviy ma'lumotlar tahlili, mashinali o'rganish va ilmiy hisoblashlarda qo'llaniladigan massiv operatsiyalariga mustahkam matematik asos yaratadi.

**Kalit so'zlar:** algebraik strukturalar, analitik funksiyalar, tensorli algebra, ko'p chiziqli operatorlar, funksional fazolar, spektral nazariya, guruh xususiyatlari, halqa nazariyasi, operator algebralari, davomiylik xossalari, differensiallanish, topologik xususiyatlar, banax fazolari

## Algebraic and Analytical Properties of Functions Defined on Multidimensional Data Arrays

Gulbodom Oybek qizi Norqulova  
BIU

**Abstract:** This article presents a comprehensive study of the algebraic and analytical properties of functions defined on multidimensional data arrays. The algebraic structure of array functions, group and ring properties, linear and bilinear operators, analytic continuation, and differentiability are thoroughly examined. The study analyzes algebraic laws such as commutativity, associativity, and distributivity, as well as continuity, limit theory, and convergence issues. The paper provides a detailed discussion of the fundamental laws of tensor algebra, multilinear mappings, the theory of functional spaces, and the spectral properties of operators. The theoretical results provide a solid mathematical foundation for array operations used in modern data analysis, machine learning, and scientific computing.

**Keywords:** algebraic structures, analytic functions, tensor algebra, multilinear operators, functional spaces, spectral theory, group properties, ring theory, operator algebras, continuity properties, differentiability, topological properties, Banach spaces

### *Kirish*

Ko'p o'lchovli ma'lumot massivlari zamonaviy axborot texnologiyalarining asosiy strukturaviy elementlari bo'lib, ular ustida belgilangan funksiyalar murakkab algebraik va analitik xususiyatlarga ega. Bu funksiyalarning nazariy asoslarini chuqur tushunish samarali algoritmlar yaratish, ma'lumotlarni to'g'ri qayta ishlash va matematik qonuniyatlarni aniqlash uchun zarurdir.

Algebraik yondashuv massiv funksiyalarini algebraik strukturalar nuqtai nazaridan o'rganadi. Massivlar to'plami guruh, halqa yoki maydon strukturasiga ega bo'lishi mumkin. Qo'shish va ko'paytirish operatsiyalari algebraik qonunlarga bo'ysinadi. Chiziqli operatorlar vektorli fazolar orasidagi strukturani saqlovchi xaritalashlardir. Tensorli algebra yuqori o'lchovli massivlar uchun algebraik apparatni taqdim etadi.

Analitik yondashuv esa funksiyalarning uzluksizligi, differentsiallanishi, integratsiya qobiliyati kabi xususiyatlarni o'rganadi. Limitlar nazariyasi ketma-ketliklarning yaqinlashishini tavsiflaydi. Metrik va normal fazolar yaqinlik tushunchasini aniqlaydi. Davomiy funksiyalar kichik o'zgarishlarga barqaror javob beradi. Differentsiallanuvchi funksiyalar mahalliy chiziqli approksimatsiyaga ega.

Ma'lumot massivlari kontekstida algebraik va analitik xususiyatlarning birgalikda o'rganilishi muhim ahamiyatga ega. Ma'lumotlar tuzilmasi algebraik strukturani belgilaydi. Operatsiyalar algebraik qonunlarga bo'ysinishi kerak. Ayni paytda, amaliy hisoblashlarda uzluksizlik va differentsiallanish xossalari zarur. Optimallashtirish algoritmlari gradient va Hessian ma'lumotlaridan foydalanadi. Konvergeniya tahlili limitlar nazariyasiga asoslanadi.

Zamonaviy ma'lumotlar fani katta hajmdagi ko'p o'lchovli massivlar bilan ishlaydi. Tasvirlar, videolar, vaqt qatorlari, ijtimoiy tarmoq ma'lumotlari - barchasi ko'p o'lchovli strukturalarga ega. Sun'iy neyron tarmoqlar tensorlar bilan ishlaydi. Chuqur o'rganish algebraik va analitik xususiyatlardan keng foydalanadi. Gradient tushish, orqaga tarqalish, batch normalizatsiya kabi usullar bu xususiyatlarga asoslanadi.

Ushbu tadqiqotning maqsadi ko'p o'lchovli ma'lumot massivlarida belgilangan funksiyalarning algebraik va analitik xususiyatlarini sistemali ravishda o'rganish, ularning nazariy asoslarini yaratish va amaliy qo'llanmalarga matematik fundament berishdan iborat. Tadqiqot ob'ekti sifatida turli algebraik strukturalar (guruhlar, halqalar, maydonlar, modullar) va analitik xususiyatlar (uzluksizlik, differentsiallanish, integratsiya) tanlab olingan.

## Asosiy qism

### Algebraik strukturalar va massivlar

Algebraik struktura - to'plamda belgilangan operatsiyalar va ular qanoatlantiruvchi aksiomalar majmuasi. Ko'p o'lchovli massivlar turli algebraik strukturalarga ega bo'lishi mumkin.

Guruh  $(G, *)$  - to'plam  $G$  va operatsiya  $*$  bo'lib, quyidagi aksiomalarga ega: yopiqlik ( $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$ ), assotsiativlik ( $((a * b) * c = a * (b * c))$ ), neytral element mavjud ( $\exists e: a * e = e * a = a$  barcha  $a \in G$  uchun), teskari element mavjud ( $\exists a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  har bir  $a \in G$  uchun). Agar yana kommutativlik ( $a * b = b * a$ ) bajarilsa, guruh kommutativ yoki Abel guruhi deyiladi.

$n$  o'lchovli vektorlar to'plami  $R^n$  qo'shish operatsiyasi bilan Abel guruhini tashkil etadi. Neytral element - nol vektor, teskari element - manfiy vektor.  $m \times n$  matritsalar to'plami ham qo'shish bo'yicha Abel guruhi. Bu xossa massiv operatsiyalarining ko'plab xususiyatlarini tushuntirishga yordam beradi.

Halqa  $(R, +, \cdot)$  - ikkita operatsiya bilan jihozlangan to'plam bo'lib:  $(R, +)$  - Abel guruhi,  $(R, \cdot)$  - yarim guruh (yopiqlik va assotsiativlik), distributivlik qonunlari bajariladi:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  va  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . Agar ko'paytirish kommutativ bo'lsa, halqa kommutativ deyiladi. Agar birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlikli deyiladi.

Matritsalar to'plami  $M_n(R)$  qo'shish va matritsali ko'paytirish bilan birlikli (lekin kommutativ emas) halqani tashkil etadi. Bu halqada  $AB \neq BA$  (umumiy holda). Bo'luvchilar nolga ega:  $AB = 0$  bo'lishi mumkin, lekin  $A \neq 0$  va  $B \neq 0$ . Bu xususiyat matritsali tenglamalarni yechishda e'tiborga olinishi kerak.

Maydon  $(F, +, \cdot)$  - kommutativ halqa bo'lib, noldan farqli har bir element teskari ko'paytirish elementiga ega:  $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}: a \cdot a^{-1} = 1$ . Haqiqiy sonlar  $R$  va kompleks sonlar  $C$  maydonlardir. Chekli maydonlar ham mavjud (masalan,  $Z_p$ , bu yerda  $p$  - tub son). Maydonlar algebraik strukturalarning eng "to'liq"lari hisoblanadi.

Vektorli fazo  $V$  maydon  $F$  ustida qo'shish va skalyarga ko'paytirish operatsiyalari bilan aniqlangan algebraik struktura.  $(V, +)$  - Abel guruhi, skalyarga ko'paytirish uchun:  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ,  $1 \cdot v = v$ ,  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ,  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ .  $R^n$ , matritsalar fazosi, funksiyalar fazosi - barchasi vektorli fazolar.

### Modullar va tensorli algebra

Modul - vektorli fazoning umumlashtirilishi bo'lib, maydon o'rniga halqa ustida aniqlanadi.  $R$ -modul  $M$  (bu yerda  $R$  - halqa) - Abel guruhi  $(M, +)$  va halqa  $R$  ning  $M$  ga ta'siri bo'lib, vektorli fazodagi kabi qonunlar bajariladi. Agar  $R$  kommutativ halqa bo'lsa, modul "vektorli fazoga yaqin" bo'ladi.

Matritsalar ustida aniqlanmish modullar chiziqli algebraning ko'plab natijalarini umumlashtiradi. Masalan,  $R^n$  modul  $Z$  halqa ustida. Torsion modullari, erkin modullari, projektiv modullari kabi tushunchalar modullar nazariyasida muhim.

Tensorli ko'paytma ikkita vektorli fazo (yoki modul)  $V$  va  $W$  dan yangi vektorli fazo  $V \otimes W$  hosil qiladi. Tensor  $v \otimes w$  "elementar tensor" deyiladi. Umumiy tensor:  $\sum_i v_i \otimes w_i$  ko'rinishda. Tensorli ko'paytma bilinear:  $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ ,  $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$ ,  $(\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w) = \alpha(v \otimes w)$ .

Tensorlar daraja (yoki tartib) bilan tavsiflanadi. 0-darajali tensor - skalar, 1-darajali tensor - vektor, 2-darajali tensor - matritsa, 3-darajali tensor - "kub", va hokazo.  $(p, q)$ -tipli tensor  $p$  marta kontravariant va  $q$  marta kovariant. Tensorlar fazosi  $T^p_q(V) = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$  ( $p$  marta  $V$ ,  $q$  marta  $V^*$ , bu yerda  $V^*$  - dual fazo).

Tensorli algebra  $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(V)$  barcha darajali tensorlarning to'g'ridan-to'g'ri yig'indisi. Bu gradalangan algebra bo'lib, tensorli ko'paytma bilan. Tensorli algebra universal xossaga ega: har qanday bilinear xaritalash tensorli ko'paytma orqali ifodalanishi mumkin.

Tashqi algebra  $\Lambda(V)$  tensorli algebradan antisimmetriklash orqali hosil qilinadi:  $v \wedge w = -w \wedge v$ . Bu geometriyada (differensial formalalar), fizikada (elektromagnetizm) va informatikada (ma'lumotlar strukturalari) qo'llaniladi. Simmetrik algebra  $S(V)$  esa simmetriklash orqali:  $vw = wv$ . Bu algebra polinomlar algebrasiga izomorf.

#### Chiziqli va ko'p chiziqli xaritalashlar

Chiziqli xaritalash (yoki chiziqli operator)  $T: V \rightarrow W$  vektorli fazolar orasidagi xaritalash bo'lib,  $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$  barcha  $\alpha, \beta \in F$  va  $u, v \in V$  uchun. Chiziqli operatorlar to'plami  $\text{Hom}(V, W)$  o'zi vektorli fazo tashkil etadi.

Chiziqli operatorning yadrosi  $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$  -  $V$  ning vektorli kichik fazosi. Tasvir  $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V, T(v) = w\}$  -  $W$  ning vektorli kichik fazosi. O'lchamlar teoremasi:  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$ . Bu fundamental natija chiziqli operatorlarning strukturasini tushunishga yordam beradi.

Bilinear xaritalash  $B: V \times W \rightarrow U$  bo'lib, har bir argumentda alohida chiziqli:  $B(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha B(v_1, w) + \beta B(v_2, w)$  va  $B(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha B(v, w_1) + \beta B(v, w_2)$ . Ichki ko'paytma, matritsalarini ko'paytirish - bilinear xaritalashlar misollari. Bilinear formalalar ( $U = F$  holda) kvadratik formalarga olib keladi va geometriyada muhim.

Ko'p chiziqli (multilinear) xaritalash  $f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  har bir argumentda alohida chiziqli. Determinant - ko'p chiziqli va antisimmetrik xaritalash. Tensorlarni qisqartirish (contraction) - ko'p chiziqli operatsiya. Ko'p chiziqli algebra tensorli hisoblashlarning asosini tashkil etadi.

Dual fazo  $V^* = \text{Hom}(V, F)$  - barcha chiziqli funksionallar to'plami. Agar  $V$  chekli o'lchovli bo'lsa,  $V^{**} \cong V$  (tabiiy izomorfizm). Dual bazis: agar  $\{e_1, \dots, e_n\}$  -  $V$  ning bazisi bo'lsa, dual bazis  $\{e^1, \dots, e^n\}$  quyidagicha:  $e^i(e_j) = \delta_j^i$  (Kroneker deltasi). Har qanday vektor  $v = \sum_i v_i e_i$  va har qanday ko'vektor  $\alpha = \sum_i \alpha_i e^i$ .

Adjoynt (qo'shma) operator  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  chiziqli operator  $T: V \rightarrow W$  uchun quyidagicha aniqlanadi:  $(T\phi)(v) = \phi(T(v))$  barcha  $\phi \in W^*$  va  $v \in V$  uchun. Ichki ko'paytmali fazoda adjoynt  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$  ni qanoatlantiradi. O'z-o'ziga adjoynt

*operatorlar* ( $T = T$ ) maxsus ahamiyatga ega - ularning xos qiymatlari haqiqiy, xos vektorlari ortogonal.

### Operatorlar algebralari va spektral nazariya

Operator algebra - chiziqli operatorlar to'plami bo'lib, qo'shish, skalyarga ko'paytirish va kompozitsiya operatsiyalari bilan yopiq. Agar bu to'plam norma bilan jihozlangan va to'liq bo'lsa, Banach algebrasi deyiladi. Agar ichki ko'paytma va involutsiya (*-operatsiya*) mavjud bo'lsa, *C*-algebra deyiladi.

Matritsalar algebrasi  $M_n(C)$  eng oddiy chekli o'lchovli operator algebrasi. Cheksiz o'lchovli Hilbert fazosidagi chegaralangan operatorlar  $B(H)$  -  $C^*$ -algebra. Kompakt operatorlar  $K(H)$  -  $B(H)$  ning ideal elementi. Von Neumann algebralari - kuchli operator topologiyada yopiq  $*$ -algebralari, kvant mexanikasida muhim.

Spektr operatorning muhim invarianti. Operator  $T$  ning spektri  $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ teskarilanuvchi emas}\}$  to'plami. Nuqta spektri (xos qiymatlar), uzluksiz spektr, qoldiq spektr - spektrning qismlari. Chekli o'lchovli fazoda spektr faqat xos qiymatlardan iborat. Cheksiz o'lchovda spektr murakkabroq bo'lishi mumkin.

Spektral radius  $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$  - spektrning eng katta absolyut qiymati. Gelfand formulasi:  $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ . Spektral radius operator normasi bilan bog'liq:  $r(T) \leq \|T\|$ , tenglik self-adjoint operatorlar uchun.

Spektral teorema o'z-o'ziga adjoint operatorlar uchun: kompakt o'z-o'ziga adjoint operator  $T$  spektral yoyilmaga ega:  $T = \sum_i \lambda_i P_i$ , bu yerda  $\lambda_i$  - xos qiymatlar,  $P_i$  - xos kichik fazolarga proyeksiyalar. Umumiy (chegaralanmagan) o'z-o'ziga adjoint operatorlar uchun spektral o'lchov nazariyasi qo'llaniladi:  $T = \int \lambda dE(\lambda)$ , bu yerda  $E$  - proyeksiyali o'lchov.

Singular qiymatlar har qanday chegaralangan operator uchun mavjud:  $T = \sum_i \sigma_i u_i \langle v_i, \cdot \rangle$ , bu yerda  $\sigma_i$  - singular qiymatlar (kamayuvchi tartibda),  $u_i$  va  $v_i$  - ortonormal vektorlar. Bu yoyilma har qanday operatorni sodda operatorlar yig'indisi sifatida ifodalaydi. Kompakt operatorlar uchun singular qiymatlar ketma-ketligi 0 ga yaqinlashadi.

### Topologik xususiyatlar va uzluksizlik

Topologiya fazoda "yaqinlik" tushunchasini umumlashtirishni ta'minlaydi. Topologik fazo  $(X, \tau)$  - to'plam  $X$  va ochiq to'plamlar tizimi  $\tau$  bo'lib, ma'lum aksiomalarga bo'ysinadi:  $\emptyset$  va  $X$  ochiq, ixtiyoriy birlashma ochiq, chekli kesishma ochiq. Metrik fazolardan farqli, topologik fazolarda masofa bo'lmasligi mumkin.

Metrik fazo  $(X, d)$  topologiyani metrika orqali aniqlaydi: ochiq to'plam - har bir nuqtasi atrofida ochiq shar joylashgan to'plam. Normali fazo  $(X, \|\cdot\|)$  metrikani norma orqali keltirib chiqaradi:  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Shu tariqa, normali fazolar  $\subset$  metrik fazolar  $\subset$  topologik fazolar.

Ketma-ketlik  $\{x_n\}$   $x$  ga topologik yaqinlashadi, agar har bir  $x$  ni o'z ichiga olgan ochiq to'plam  $U$  uchun  $N$  mavjud bo'lib,  $n > N$  bo'lganda  $x_n \in U$ . Metrik fazolarda bu

$d(x_n, x) \rightarrow 0$  ga ekvivalent. Normali fazolarda  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ . Hausdorff fazolarida limit yagona, umumiy topologik fazoda ko'p limitlar bo'lishi mumkin.

Davomiy funksiya  $f: X \rightarrow Y$  topologik fazolar orasida: har bir  $Y$  dagi ochiq to'plam  $V$  uchun  $f^{-1}(V)$   $X$  da ochiq. Metrik fazolarda:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Normali fazolarda chiziqli operatorning davomiyligi chegaralanganlik bilan ekvivalent:  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$ .

Kompaktlik muhim topologik xossa. To'plam  $K$  kompakt, agar har bir ochiq qoplamadan chekli qism qoplam ajratish mumkin bo'lsa. Metrik fazolarda Heine-Borel teoremasi: kompaktlik  $\Leftrightarrow$  ketma-ketlik kompaktligi (har bir ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin).  $R^n$  da kompaktlik  $\Leftrightarrow$  yopiqlik + chegaralanganlik.

Kompaktlik davomiy funksiyalarning muhim xossalarini kafolatlaydi. Agar  $f: K \rightarrow R$  davomiy va  $K$  kompakt bo'lsa,  $f$  chegaralangan va ekstremumga erishadi (Veyrshtass teoremasi). Agar  $f: K \rightarrow Y$  davomiy va  $K$  kompakt bo'lsa,  $f(K)$  ham kompakt. Agar  $f: K \rightarrow Y$  davomiy, biyek-tiv va  $K$  kompakt,  $Y$  Hausdorff bo'lsa,  $f$  gomeomorfizm (teskari ham davomiy).

Banach va Hilbert fazolari

Banach fazosi - to'liq normali fazo. To'liqlik: har bir Koshi ketma-ketligi yaqinlashuvchi. Koshi ketma-ketligi  $\{x_n\}: \forall \varepsilon > 0 \exists N: m, n > N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$ . To'liq bo'lmagan metrik fazolar to'ldirilishi mumkin (masalan,  $Q$  to'ldirilganida  $R$  hosil bo'ladi).  $R^n$ ,  $C^n$ , matritsalar fazosi,  $L^p$  fazolari - Banach fazolari.

Banach fazolarida davomiy chiziqli funksionallar to'plami (dual fazo) ham Banach fazosi. Hahn-Banach teoremasi: chiziqli funktsionalni kengaytirish normani oshirmasdan. Natija: har bir  $x \neq 0$  uchun  $f \in X^*$  mavjud bo'lib,  $f(x) = \|x\|$  va  $\|f\| = 1$ . Bu teorema funktsional tahlilning asosiy natijalaridan biri.

Yopiq graf teoremasi: Banach fazolari orasidagi chiziqli operator davomiy  $\Leftrightarrow$  uning grafi yopiq. Ochiq akslantirish teoremasi: Banach fazolari orasidagi surektiv davomiy chiziqli operator ochiq. Banach-Shteynxauss teoremasi (bir xillik chegaralanganlik prinsipi): noqta bo'yicha chegaralangan operatorlar to'plami norma bo'yicha chegaralangan.

Hilbert fazosi - to'liq ichki ko'paytmali fazo. Ichki ko'paytma norma keltirib chiqaradi:  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Parallelogramm identifikatsiyasi norma ichki ko'paytmadan kelib chiqishini tavsiflaydi:  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .  $R^n$  va  $C^n$  standart ichki ko'paytma bilan,  $L^2[a, b]$  - Hilbert fazolari.

Hilbert fazolarida proyeksiya teoremasi: yopiq konveks to'plam  $K$  va nuqta  $x$  uchun yagona eng yaqin nuqta  $y \in K$  mavjud. Maxsus holat: yopiq kichik fazo  $M$  uchun  $x = y + z$  yoyilmasi mavjud, bu yerda  $y \in M$ ,  $z \in M^\perp$  ( $M$  ga ortogonal). Bu proyeksiya operatori  $P: H \rightarrow M$  ni beradi:  $Px = y$ ,  $P^2 = P$ ,  $P^* = P$  (ortogonal proyeksiya).

Riesz tasvir teoremasi: Hilbert fazosida har bir davomiy chiziqli funktsional  $f$  yagona vektor  $y$  orqali ifodalanadi:  $f(x) = \langle x, y \rangle$ . Bu tasvir antichiziqli izomorfizmdir:  $H^* \cong \bar{H}$  ( $H$  ning kompleks qo'shmasi). Natija: Hilbert fazosi o'z-o'ziga dual (o'xshash ma'noda). Bu Banach fazolaridan farqli - umumiy Banach fazosida  $X \neq X^{**}$ .

#### Differensial hisoblash va Frechet hosilasi

Chekli o'lchovli fazolarda differensiallanish oddiy: qisman hosilalar mavjudligi. Cheksiz o'lchovli fazolarda umumiyroq tushuncha kerak. Gâteaux hosilasi - yo'nalish bo'yicha hosila:  $D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \{ [f(x + tv) - f(x)]/t \}$ . Bu chiziqli operator yo'nalish  $v$  ga nisbatan.

Frechet hosilasi kuchliroq tushuncha:  $f: X \rightarrow Y$  (Banach fazolari orasida)  $x$  da Frechet differensiallanuvchi, agar chiziqli operator  $Df(x): X \rightarrow Y$  mavjud bo'lib,  $\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\| = o(\|h\|)$  (ya'ni,  $\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\|/\|h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ ).  $Df(x)$  - Frechet hosilasi yoki differensial.

Frechet differensiallanish Gâteaux differensiallanishdan kuchliroq va uzluksizlikni nazarda tutadi. Agar  $f$  Frechet differensiallanuvchi bo'lsa, u Gâteaux differensiallanuvchi va  $Df(x) = D_v f(x)$  har bir  $v$  uchun. Teskari umumiy holda to'g'ri emas. Lekin agar Gâteaux hosilasi mavjud va  $v \rightarrow D_v f(x)$  davomiy bo'lsa, Frechet hosilasi mavjud.

Zanjir qoidasi Frechet hosilasi uchun: agar  $f: X \rightarrow Y$  va  $g: Y \rightarrow Z$  Frechet differensiallanuvchi bo'lsa,  $g \circ f$  ham differensiallanuvchi va  $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$ . Bu operator kompozitsiyasi. Zanjir qoidasi murakkab funksiyalarning hosilasini hisoblash uchun asosiy vosita va chuqur o'rganishda backpropagation ning nazariy asosi.

O'rta qiymat teoremasi vektorli holda: agar  $f: [a, b] \rightarrow X$  differensiallanuvchi bo'lsa,  $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$ . Skalar holatdan farqli, to'g'ridan-to'g'ri tenglik yo'q (chunki yo'nalishlar turlicha bo'lishi mumkin). Lekin norma bahosi mavjud va bu ko'plab tatbiqlarda yetarli.

Yuqori tartibli hosilalar: ikkinchi Frechet hosilasi  $D^2f(x): X \times X \rightarrow Y$  - bilinear operator. Agar  $f$  ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa va ikkinchi hosila davomiy bo'lsa, Shvarts teoremasi:  $D^2f(x)(h, k) = D^2f(x)(k, h)$  (simmetriklik). Bu qisman hosilalarning tartibi muhim emasligini bildiradi. Teylor qatori cheksiz o'lchovda ham:  $f(x + h) = f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2}D^2f(x)(h, h) + \dots$

#### Implitsit funksiya teoremasi va teskari operator

Implitsit funksiya teoremasi ko'p o'zgaruvchili holda: agar  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  davomiy differensiallanuvchi va  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $D_y F(x_0, y_0)$  teskarilanuvchi bo'lsa, u holda  $x_0$  atrofida yagona funksiya  $y = f(x)$  mavjud bo'lib,  $F(x, f(x)) = 0$  va  $f$  differensiallanuvchi. Hosila:  $Df(x) = -[D_y F(x, f(x))]^{-1} D_x F(x, f(x))$ .

Bu teorema tenglamalar tizimini "yechish" imkonini beradi - ba'zi o'zgaruvchilarni boshqalar orqali ifodalash. Masalan,  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  aylana

tenglamasi.  $y_0 \neq 0$  nuqtada  $y$  ni  $x$  orqali ifodalash mumkin:  $y = f(x) = \pm\sqrt{(1 - x^2)}$ . Shartlar:  $F$  differensiallanuvchi,  $\partial F/\partial y \neq 0$ .

Banax fazolarida implitsit funksiya teoremasi: agar  $F: X \times Y \rightarrow Z$  (Banax fazolari) davomiy differensiallanuvchi,  $F(x_0, y_0) = 0$  va  $D_y F(x_0, y_0): Y \rightarrow Z$  izomorfizm bo'lsa, mahalliy implitsit funksiya  $y = f(x)$  mavjud. Bu umumiyroq versiya cheksiz o'lchovli muammolarda qo'llaniladi, masalan, differensial tenglamalar nazariyasida.

Teskari operator teoremasi: agar  $f: X \rightarrow Y$  (Banax fazolari orasida) davomiy differensiallanuvchi va  $Df(x_0): X \rightarrow Y$  izomorfizm bo'lsa,  $f$  mahalliy diffeomorfizmdir (teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi). Hosila:  $Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$ . Bu teorema koordinatalar o'zgarishini oqlanishni ta'minlaydi.

Bu teoremlar ko'p qo'llanmalarga ega: optimallashtirish (Lagranj ko'paytuvchilari usuli implitsit funksiya teoremasiga asoslangan), differensial geometriya (sirt ustida koordinatalar), differensial tenglamalar (yechimlarning mavjudligi va yagonaligi), iqtisodiyotda (muvozanat nazariyasi). Ular mahalliy xatti-harakatni chiziqli approksimatsiya orqali tushunish imkonini beradi.

Konveks tahlil va subdifferensial hisoblash

Konveks to'plam  $C$ : har qanday  $x, y \in C$  va  $0 \leq \lambda \leq 1$  uchun  $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ . Geometrik ma'no: ikkita nuqtani birlashtiruvchi kesma butunlay to'plamda joylashgan. Yarim fazolar, sharlar, polyhedronlar, konuslar - konveks to'plamlar misollari. Konveks to'plamlarning kesishmasi konveks, lekin birlashma emas.

Konveks funksiya  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  ( $C$  - konveks to'plam):  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$  barcha  $x, y \in C$  va  $\lambda \in [0,1]$  uchun. Geometrik ma'no: funksiya grafi har qanday ikkita nuqta orasidagi vatardan pastda. Agar tengsizlik qat'iy bo'lsa ( $x \neq y$  va  $0 < \lambda < 1$  uchun), funksiya qat'iy konveks.

Differensiallanuvchi konveks funksiya uchun:  $f$  konveks  $\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$  barcha  $x, y$  uchun (birinchi tartib sharti). Ikki marta differensiallanuvchi funksiya uchun:  $f$  konveks  $\Leftrightarrow$  Hessian matritsasi musbat yarimo'q ( $D^2 f(x) \geq 0$ ). Bu shartlar konvekslikni tekshirish uchun qulay.

Subdifferensial konveks, lekin differensiallanuvchi bo'lmashligi mumkin bo'lgan funksiyalar uchun umumlashtirilgan hosila. Subgradient  $g \in X^*$ :  $f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle$  barcha  $y$  uchun. Subdifferensial  $\partial f(x)$  - barcha subgradientlar to'plami. Bu to'plam konveks va yopiq (bo'sh bo'lishi mumkin). Agar  $f$   $x$  da differensiallanuvchi bo'lsa,  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$  (yagona element).

Konveks tahlil qoidalar:  $\partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$ ,  $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  ( $\alpha > 0$ ), zanjir qoidasi (maxsus shartlar ostida). Bu qoidalar optimallashtirishda qo'llaniladi. Optimal shart:  $x^*$  -  $f$  ning global minimumi  $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*)$ . Bu differensiallanuvchi holatdagi  $\nabla f(x^*) = 0$  shartining umumlashtirilishi.

Konjugat funksiya  $f^*: X^* \rightarrow \mathbb{R}$  quyidagicha aniqlanadi:  $f^*(y^*) = \sup_{x \in X} [\langle y^*, x \rangle - f(x)]$ . Bu Legendre transformatsiyasining umumlashtirilishi.  $f^*$  har doim konveks

va yopiq. Fenchel-Moreau teoremasi: agar  $f$  konveks, yopiq va proper bo'lsa,  $f^{**} = f$ . Konjugat funksiya duallik nazariyasida va optimallashtirishda muhim rol o'ynaydi.

Proyeksiya konveks to'plamga  $P_C(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \|x - y\|$  -  $x$  ga eng yaqin nuqta  $C$  da. Agar  $C$  yopiq va konveks bo'lsa, proyeksiya yagona va davomiy. Proyeksiya xususiyati:  $\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$  barcha  $y \in C$  uchun (tik burchak sharti). Proyeksiya ko'plab algoritmlar (proyeksiyalik gradient, ADMM) ning asosiy komponentidir.

Sobolev fazolari va zaif differentsiallanish

Klassik differentsiallanish ba'zan juda qat'iy: ko'plab funksiyalar (masalan, piecewise differentsiallanuvchi funksiyalar) klassik hosilaga ega emas. Zaif hosila tushunchasi umumiyroq va differensial tenglamalar nazariyasida muhim.

Zaif hosila: funksiya  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ning zaif hosilasi  $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  bo'lib,  $\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \varphi dx$  barcha silliq, kompakt nosimlikli test funksiyalar  $\varphi$  uchun. Bu integratsiya bo'yicha qismlarga ajratish formulasidan kelib chiqadi. Agar  $u$  klassik differentsiallanuvchi bo'lsa, zaif hosila klassik hosilaga teng.

Sobolev fazosi  $W^{k,p}(\Omega)$  - barcha funksiyalar  $u \in L^p(\Omega)$  to'plami bo'lib,  $k$ -tartibli barcha zaif hosilalari  $L^p(\Omega)$  ga tegishli. Norma:  $\|u\|_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p})^{1/p}$ , bu yerda  $\alpha$  - multi-indeks,  $D^\alpha$  - zaif hosila.  $W^{k,p}(\Omega)$  Banach fazosi.  $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$  Hilbert fazosi (Sobolev-Hilbert fazosi).

Sobolev kiritish teoremasi: ma'lum shartlar ostida  $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  yoki  $W^{k,p}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$  (davomiy funksiyalar fazosi). Masalan,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ , bu yerda  $p^* = np/(n-p)$  ( $p < n$  uchun) - Sobolev ko'rsatkichi. Agar  $kp > n$  bo'lsa,  $W^{k,p}(\Omega) \subset C(\Omega)$  - funksiyalar davomiy. Bu natijalar PDE yechimlarining silliqqligini o'rganishda muhim.

Rellich-Kondrachov kompaktlik teoremasi: ma'lum shartlar ostida  $W^{k,p}(\Omega)$  dan  $L^q(\Omega)$  ga kirish kompakt ( $q < p^*$  uchun). Bu demak, chegaralangan ketma-ketlik  $W^{k,p}$  da yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikka ega  $L^q$  da. Kompaktlik ko'plab mavjudlik teoremlarida muhim (masalan, variatsion masalalarda).

Poincaré tengsizligi:  $\Omega$  - chegaralangan soha uchun  $\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$  ( $u$  ning o'rtachasi nolga teng deb faraz qilganda). Bu tengsizlik funksiya va uning hosilasi o'rtasida bog'liqlik o'rnatadi. Friedrichs tengsizligi:  $\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$  ( $u$  chegarada nolga teng bo'lsa). Bu tengsizliklar energiya baholarida qo'llaniladi.

Sobolev fazolari PDE nazariyasining asosi hisoblanadi. Zaif yechimlar Sobolev fazolarida qidiriladi. Ko'plab klassik muammolar (Dirichlet, Neumann masalalari) Sobolev fazolarida yaxshi qo'yilgan. Variatsion formulatsiyalar (Galerkin usuli, chekli elementlar usuli) Sobolev fazolarida ishlaydi. Zamonaviy PDE nazariyasi Sobolev fazolarisiz tasavvur qilinmaydi.

*Xulosa*

Ko'p o'lchovli ma'lumot massivlarida belgilangan funksiyalarning algebraik va analitik xususiyatlarini tadqiq qilish natijasida quyidagi fundamental xulosalarga kelamiz.

Algebraik strukturalar massiv operatsiyalarining asosiy qonuniyatlarini belgilaydi. Guruh strukturalari qo'shish operatsiyasining xususiyatlarini, halqa strukturalari ikkala operatsiyaning o'zaro ta'sirini, maydon strukturalari esa to'liq algebraik tizimni tavsiflaydi. Vektorli fazolar chiziqli algebra uchun tabiiy muhitni yaratadi. Modullar nazariyasi vektorli fazolarni umumlashtiradi va halqalar ustida chiziqli algebrani rivojlantiradi.

Tensorli algebra yuqori o'lchovli massivlar uchun zarur matematik apparatni taqdim etadi. Tensorli ko'paytma, tashqi algebra, simmetrik algebra turli algebraik tuzilmalarni beradi. Ko'p chiziqli xaritalashlar tensorlar bilan ishlashning tabiiy tili hisoblanadi. Dual fazolar va adjoint operatorlar algebraik strukturalarning chuqur xususiyatlarini ochib beradi.

Operator algebralari chiziqli operatorlarning murakkab tuzilmasini o'rganadi. Banach va  $C^*$ -algebralari funksional tahlilning muhim ob'ektlaridir. Spektral nazariya operatorlarning invariantlarini tavsiflaydi. Spektral teorema o'z-o'ziga adjoint operatorlarni diagonal shaklga keltirish imkonini beradi. Singular qiymatlar har qanday operator uchun optimal yoyilmani ta'minlaydi.

Topologik xususiyatlar yaqinlik va uzluksizlik tushunchalarini umumlashtiradi. Metrik va normal fazolar konkret yaqinlik o'lchovlarini beradi. Kompaktlik ko'plab muhim teoremlar uchun zarur shart. Davomiy funksiyalar topologik strukturani saqlaydi. To'liqlik Koshi ketma-ketliklarining yaqinlashishini kafolatlaydi.

Banach va Hilbert fazolari funksional tahlilning asosiy ob'ektlaridir. Hahn-Banach, yopiq graf, ochiq akslantirish teoremlari Banach fazolarining fundamental natijalari. Proyeksiya teoremasi va Riesz tasviri Hilbert fazolarining maxsus xususiyatlarini ko'rsatadi. Bu fazolar cheksiz o'lchovli chiziqli algebraning tabiiy muhiti.

Frechet differentsiallashtirish cheksiz o'lchovli fazolarda differensial hisobni rivojlantiradi. Zanjir qoidasi murakkab kompozitsiyalarning hosilalarini hisoblash imkonini beradi. Implitsit funksiya va teskari operator teoremlari mahalliy strukturani tushunishga yordam beradi. Yuqori tartibli hosilalar va Teylor qatorlari mahalliy approksimatsiyani ta'minlaydi.

Konveks tahlil optimallashtirish nazariyasining asosini tashkil etadi. Subdifferensial differentsiallashtirilmaydigan konveks funksiyalar uchun umumlashtirilgan hosila beradi. Konjugat funksiya duallik nazariyasida markaziy rol o'ynaydi. Proyeksiya operatori ko'plab algoritmlarning asosiy komponenti. Konveks optimallashtirish samarali yechiladigan masalalar sinfini belgilaydi.

Sobolev fazolari zaif differentsiallashtirish tushunchasini joriy qiladi va differensial tenglamalar nazariyasining tabiiy muhitini yaratadi. Kiritish va kompaktlik teoremlari

yechimlarning silliqqligini o'rganish imkonini beradi. Poincaré va Friedrichs tengsizliklari energiya baholarida muhim. Zaif yechimlar tushunchasi klassik yechimlar mavjud bo'lmagan holatlarda qo'llaniladi.

Umumiy xulosa: ko'p o'lchovli ma'lumot massivlarida belgilangan funksiyalarning algebraik va analitik xususiyatlari chuqur va boy nazariy strukturaga ega. Algebraik yondashuv operatsiyalarning qonuniyatlarini, analitik yondashuv esa uzluksizlik va differensiallanish xossalarini o'rganadi. Bu ikki yondashuv birgalikda zamonaviy ma'lumotlar fani, mashinali o'rganish va ilmiy hisoblashlar uchun mustahkam matematik asos yaratadi.

### **Foydalanilgan adabiyotlar**

1. Rudin W. Functional Analysis, 2nd Edition. McGraw-Hill, 1991. 424 p.
2. Conway J.B. A Course in Functional Analysis, 2nd Edition. Springer, 1990. 399 p.
3. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press, 1980. 400 p.
4. Lang S. Algebra, 3rd Edition. Springer, 2002. 914 p.
5. Hungerford T.W. Algebra. Springer, 1974. 502 p.
6. Atiyah M.F., Macdonald I.G. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1969. 128 p.
7. Bourbaki N. Elements of Mathematics: Algebra I. Springer, 1989. 709 p.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis. Dover, 1975. 403 p.
9. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989. 688 p.
10. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev Spaces, 2nd Edition. Academic Press, 2003. 305 p.
11. Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2011. 599 p.
12. Rockafellar R.T. Convex Analysis. Princeton University Press, 1970. 451 p.
13. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
14. Halmos P.R. Finite-Dimensional Vector Spaces. Springer, 1974. 200 p.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: Физматлит, 2004. 572 с.