

Ko'p o'lchovli massivlarning funksional bog'liqliklari va ularning matematik hamda hisoblash tadqiqotlaridagi xususiyatlari

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massivlarning funksional bog'liqliklari hamda matematik va hisoblash tadqiqotlaridagi o'rni sistemali tahlil qilingan. Massivlar orasidagi funksional munosabatlar, bog'liqlik turlari va ularning matematik ifodasi o'rganilgan. Tadqiqotda massivlarning hisoblash murakkabligi, algoritmik optimallik va samaradorlik masalalari ko'rib chiqilgan. Chiziqli algebra, differensial tenglamalar, optimallashtirish nazariyasi va statistik modellashtirish kontekstida massivlarning roli tahlil qilingan. Zamonaviy ilmiy hisoblashlar, ma'lumotlar tahlili va mashinali o'rganish algoritmlarida massiv operatsiyalarining qo'llanilishi batafsil yoritilgan. Tadqiqot natijalari matematik modellashtirish va hisoblash fanlarida massivlardan samarali foydalanish uchun nazariy va amaliy asos yaratadi.

Kalit so'zlar: funksional bog'liqliklar, matematik modellashtirish, hisoblash murakkabligi, chiziqli algebra, raqamli usullar, optimallashtirish, statistik tahlil, algoritmik samaradorlik, ilmiy hisoblashlar, tensor operatsiyalari, massiv tahlili, hisoblash tadqiqotlari, ma'lumotlar fanlari

Functional Dependencies of Multidimensional Arrays and Their Characteristics in Mathematical and Computational Research

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BIU

Abstract: This article presents a systematic analysis of the functional dependencies of multidimensional arrays and their role in mathematical and computational research. The functional relationships between arrays, types of dependencies, and their mathematical representations are examined. The study explores computational complexity, algorithmic optimality, and efficiency considerations related to arrays. The role of arrays in linear algebra, differential equations, optimization theory, and statistical modeling is analyzed. The application of

array operations in modern scientific computing, data analysis, and machine learning algorithms is discussed in detail. The results provide a theoretical and practical foundation for the effective use of arrays in mathematical modeling and computational sciences.

Keywords: functional dependencies, mathematical modeling, computational complexity, linear algebra, numerical methods, optimization, statistical analysis, algorithmic efficiency, scientific computing, tensor operations, array analysis, computational research, data science

Kirish

Ko'p o'lchovli massivlar zamonaviy matematik va hisoblash tadqiqotlarida markaziy o'rinni egallaydi. Ular nafaqat ma'lumotlarni saqlash vositasi, balki murakkab matematik ob'ektlar va hisoblash jarayonlarining tabiiy ifodasi hisoblanadi. Massivlarning funksional bog'liqliklari - bu massivlar orasidagi matematik munosabatlar, transformatsiyalar va ularning xususiyatlarini tavsiflash tizimidir.

Funksional bog'liqlik tushunchasi keng ma'noga ega. Eng oddiy darajada, bu massivlar orasidagi funksional munosabat: bitta massiv boshqa massivning funksiyasi sifatida ifodalanishi. Murakkabrog' bog'liqliklar matritsalar orasidagi chiziqli munosabatlar, tensorlar orasidagi ko'p chiziqli bog'lanishlar va differensial tenglamalarning diskret approximationsini o'z ichiga oladi.

Matematik tadqiqotlarda massivlar turli ob'ektlarni ifodalash uchun ishlatiladi. Chiziqli algebrada vektorlar va matritsalar asosiy tushunchalar bo'lib, ular chiziqli transformatsiyalar, vektorli fazolar va xos qiymatlar nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Raqamli tahlilda massivlar funksiyalarni diskretlashtirish, differensial va integral tenglamalarni yechish uchun zarur. Optimallashtirish nazariyasida parametrlar vektorlar va matritsa ko'rinishida ifodalanadi.

Hisoblash tadqiqotlari nuqtai nazaridan massivlar samaradorlikning asosiy ko'rsatkichlarini belgilaydi. Xotira tashkil etilishi, ma'lumotlarga murojaat namunasi, parallellashtirish imkoniyati - barchasi massivlarning tuzilishi va ular ustida bajariladigan operatsiyalarga bog'liq. Hisoblash murakkabligi tahlili algoritmlarning samaradorligini baholash va optimal yechimlarni topish uchun zarur.

Zamonaviy ilmiy dasturlash kutubxonalari (NumPy, SciPy, MATLAB, R) massivlar bilan ishlash uchun keng imkoniyatlar taqdim etadi. Ular matematik operatsiyalarni optimallashtiradi, parallel hisoblashni qo'llab-quvvatlaydi va murakkab algoritmlarni amalga oshirish uchun qulay interfeys beradi. Ma'lumotlar fanlari va mashinali o'rganishda tensorli operatsiyalar (TensorFlow, PyTorch) massivlarning yuqori o'lchovli umumlashtirilishiga asoslanadi.

Tadqiqotning maqsadi ko'p o'lchovli massivlarning funksional bog'liqliklarini chuqur o'rganish, matematik va hisoblash tadqiqotlaridagi ularning rolini tahlil qilish

va zamonaviy ilmiy hisoblashlarda samarali qo'llash uchun nazariy asos yaratishdan iborat. Tadqiqot ob'ekti sifatida massivlar orasidagi turli xil funksional munosabatlar, ularning matematik xususiyatlari va hisoblash jihatlaridan samaradorligi tanlab olingan.

Asosiy qism

Funksional bog'liqliklarning asosiy turlari

Funksional bog'liqlik eng oddiy shaklda bitta massivning boshqa massivga bog'liqligini ifodalaydi. Agar $B = f(A)$ bo'lsa, B massiv A massivning funksiyasi hisoblanadi. Bu bog'liqlik turli shakllarda bo'lishi mumkin: element-wise (har bir element alohida), strukturaviy (butun massiv) yoki murakkab transformatsiya orqali.

Chiziqli bog'liqlik - eng muhim va keng tarqalgan tur. Agar $y = Ax$ bo'lsa, bu yerda A - matritsa, x va y - vektorlar, chiziqli bog'liqlik mavjud. Xususiyatlari: superposition prinsipi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, nol vektorga nol akslantirish $A(0) = 0$. Chiziqli transformatsiyalar chiziqli algebra, differensial tenglamalar va ko'plab boshqa sohalarida asosiy rol o'ynaydi.

Bilinear va multilinear bog'liqliklar ikki yoki ko'proq massivlar orasidagi bog'liqlikni ifodalaydi. Bilinear forma $B(x, y)$ - x va y bo'yicha alohida chiziqli. Masalan, matritsalarini ko'paytirish $C = AB$ bilinear: har bir A qatori va B ustuni bo'yicha chiziqli. Tensorli ko'paytma multilinear operatsiya hisoblanadi.

Differensial bog'liqliklar massivlar orasida hosilalar orqali ifodalanadi. Differensial tenglamalar $du/dt = F(u, t)$ diskretlashtirilganda, $u(t)$ massiv sifatida ifodalanadi va F massiv funksiyasi bo'ladi. Raqamli integratsiya usullari (Eyler, Runge-Kutta) massivlar orasidagi rekurrent munosabatlarni yaratadi.

Integral bog'liqliklar bir massivning boshqasining integrali sifatida ifodalanishini bildiradi. Diskret holatda: $B[i] = \sum_j K[i,j] A[j]$, bu yerda K - integral yadro (kernel). Bu konvolyutsiya operatsiyasining asosi bo'lib, signallar qayta ishlash va tasvirlarni filtrlashda qo'llaniladi.

Statistik bog'liqliklar massivlar orasidagi ehtimoliy munosabatlarni tavsiflaydi. Korrelyatsiya, regressiya, ko'p o'zgaruvchili taqsimotlar - barchasi massivlar orqali ifodalanadi. Kovariatsiya matritsasi tasodifiy vektorlar orasidagi bog'liqlikni to'liq tavsiflaydi: $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])^T]$.

Topologik bog'liqliklar massivlarning yaqinlik va uzluksizlik xususiyatlarini tavsiflaydi. Metrik fazolarda $d(A, B)$ - ikki massiv orasidagi masofa. Operator normasi $\|T\|$ - operator T ning "kuchlashish" darajasi. Bu tushunchalar konvergentsiya, barqarorlik va approksimatsiya nazariyasida muhim.

Chiziqli algebra va matritsali operatsiyalar

Chiziqli algebra massivlarning funksional bog'liqliklarini o'rganishning asosiy vositasi hisoblanadi. Vektorli fazolar V va W orasidagi chiziqli transformatsiya $T: V \rightarrow W$ matritsa orqali ifodalanadi. Agar $V = \mathbb{R}^n$ va $W = \mathbb{R}^m$ bo'lsa, T matritsasi $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ va $y = Ax$.

Matritsalarini ko'paytirish fundamental operatsiya: $C = AB$, bu yerda $C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$. Bu ikki chiziqli transformatsiyaning kompozitsiyasini ifodalaydi: $C = B \circ A$. Standart algoritmi $O(n^3)$ murakkablikka ega. Strassen algoritmi $O(n^{2.807})$, lekin katta n uchun samarali. Cache-optimized algoritmlar (BLAS) amaliy tizimlarda keng qo'llaniladi.

Xos qiymatlar va xos vektorlar matritsaning fundamental xususiyatlaridir. Agar $Av = \lambda v$ bo'lsa, λ - xos qiymat, v - xos vektor. Xarakteristik polinom $\det(A - \lambda I) = 0$ xos qiymatlarni beradi. Spektral yoyilma: agar A simmetrik bo'lsa, $A = Q\Lambda Q^T$, bu yerda Q - ortogonal matritsa (xos vektorlar), Λ - diagonal (xos qiymatlar).

Singular qiymatlarga ajratish (SVD) har qanday matritsa uchun: $A = U\Sigma V^T$. U va V - ortogonal, Σ - diagonal (singular qiymatlar). SVD ko'plab qo'llanmalarga ega: psevdoteskari matritsa $A^+ = V\Sigma^+U^T$, matritsa rangi, eng yaxshi past-rangli approksimatsiya. Principal Component Analysis (PCA) SVD ga asoslangan.

Chiziqli tizimlar $Ax = b$ ko'plab muammolarning markazida. Yechish usullari: to'g'ridan-to'g'ri (Gauss, LU, Cholesky) - $O(n^3)$, iterativ (Jacobi, Gauss-Seidel, CG) - siyrak matritsalar uchun samarali. Prekonditsionerlash iterativ usullarni tezlashtiradi. Krylov kichik fazolari (GMRES, BiCGSTAB) zamonavir yondashuv.

Matritsa norma va sharti raqami barqarorlik uchun muhim. Frobenius norma: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$. Spektral norma: $\|A\|_2 = \sigma_{\max}$ (eng katta singular qiymat). Sharti raqami $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ noto'g'ri qo'yilganlikni o'lchaydi. Agar $\kappa(A)$ katta bo'lsa, kichik xatoliklar katta natija xatolariga olib keladi.

Tensorlar (yuqori o'lchovli massivlar) ko'p chiziqli algebrani talab qiladi. Tensorni qisqartirish (contraction): $C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$ matritsalarini ko'paytirishning umumlashtirilishi. Tucker va CP tensorli yoyilmalari katta tensorlarni siqish imkonini beradi. Tensor networks kvant mexanikasi va mashinali o'rganishda qo'llaniladi.

Differensial va integral operatorlar

Differensial operatorlar massivlar orasidagi infinitesimal bog'liqliklarni tavsiflaydi. Diskret hosilalar chekli farqlar orqali approksimatsiya qilinadi. Birinchi hosila: $f'(x) \approx (f(x+h) - f(x-h))/(2h)$ (markaziy farq, $O(h^2)$ xatolik). Ikkinchi hosila: $f''(x) \approx (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))/h^2$.

Gradient ∇f ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun qisman hosilalar vektori: $\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$. Diskret holatda chekli farqlar bilan approksimatsiya. Laplace operatori $\Delta f = \sum_i \partial^2 f/\partial x_i^2$ diffuziya tenglamalarida muhim. Diskret Laplacian matritsasi sifatida ifodalanadi.

Differensial tenglamalar (DE) massivlar orqali diskretlashtiriladi. Oddiy DE: $dy/dt = f(y, t)$. Diskretlashtirish: $y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n)$ (Euler usuli). Yuqori tartibli usullar (Runge-Kutta): $y_{n+1} = y_n + h \sum_i b_i k_i$, bu yerda k_i - oraliq bosqichlar. Multistep usullar (Adams, BDF) bir nechta oldingi qiymatlardan foydalanadi.

Qisman differensial tenglamalar (PDE) fazoviy va vaqt o'zgaruvchilarini o'z ichiga oladi. Issiqlik tenglama: $\partial u / \partial t = \alpha \partial^2 u / \partial x^2$. Diskretlashtirish: meshni yaratish (x, t) fazoda, chekli farqlar yoki chekli elementlar usuli. Natija - chiziqli tizim yoki rekurrent munosabat.

Integral operatorlar: $(Kf)(x) = \int K(x, y) f(y) dy$. Diskret analogi: $(Kf)_i = \sum_j K_{ij} f_j$ - matritsali ko'paytirish. Fredholm tenglamalari: $f = Kf + g$. Volterra tenglamalari: $f_i = \sum_{j \leq i} K_{ij} f_j + g_i$ (uchburchak matritsa). Yechish usullari: to'g'ridan-to'g'ri (kichik n uchun), iterativ (katta n uchun).

Operator tenglamalari umumiy shaklda: $Lu = f$, bu yerda L - differensial yoki integral operator. Weak formulatsiya (zaif shaklantirish): $\int v Lu dx = \int v f dx$ barcha test funksiyalar v uchun. Bu Galerkin usuli va chekli elementlar usulining asosi. Diskretlashtirish matritsali tizimga olib keladi: $Au = f$.

Spektral usullar yuqori tartibli approksimatsiya beradi. Funksiyani bazis funksiyalari (Fourier, Chebyshev, Legendre) bo'yicha yoyilma: $u(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$. Koeffitsientlar c_n vektori sifatida. Differensial operatorni matritsaga aylantirish va algebraik tizimni yechish. Spektral usullar silliq funksiyalar uchun eksponensial konvergenatsiya beradi.

Optimallashtirish va variatsion masalalar

Optimallashtirish muammolari ko'pincha massivlar orqali ifodalanadi: $\min_x f(x)$, bu yerda $x \in \mathbb{R}^n$ - parametrlar vektori. Gradient usullari: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$. Qadam uzunligi α_k line search yoki fixed step size orqali tanlanadi. Konvergenatsiya tezligi sharti raqomiga bog'liq.

Nyuton usuli ikkinchi tartibli ma'lumotdan foydalanadi: $x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$, bu yerda H - Hessian matritsasi. Kvadratik konvergenatsiya, lekin Hessian hisoblash qimmat ($O(n^3)$). Kvazi-Nyuton usullari (BFGS, L-BFGS) Hessian teskari approksimatsiyasini saqlab yangilaydi - $O(n^2)$ yoki $O(n)$.

Cheklangan optimallashtirish: $\min f(x)$ s.t. $g(x) = 0$, $h(x) \leq 0$. Lagranj funksiyasi: $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$. Karush-Kuhn-Tucker (KKT) shartlari zaruriy: $\nabla_x L = 0$, $g(x) = 0$, $h(x) \leq 0$, $\mu \geq 0$, $\mu^T h(x) = 0$. Ichki nuqta usullari, SQP (Sequential Quadratic Programming) keng qo'llaniladi.

Konveks optimallashtirish global minimumni kafolatlaydi. Agar f konveks va cheklovlar konveks to'plam hosil qilsa, har qanday lokal minimum globaldir. Chiziqli dasturlash: $\min c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ - konveks. Simpleks usuli va ichki nuqta usullari polinomial vaqtda yechadi. Kvadratik dasturlash: $\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ - Q musbat yarimo'q bo'lsa konveks.

Variatsion masalalar funksional minimallashtirish: $\min_u J[u] = \int L(u, u', x) dx$. Eyler-Lagranj tenglama: $\partial L / \partial u - d/dx(\partial L / \partial u') = 0$. Diskretlashtirish: u massiv sifatida, $J[u] \rightarrow J(u)$ - chekli o'lchovli funksiya. Optimallashtirish usullari qo'llaniladi. PDE

cheklangan optimallashtirish (PDE-constrained optimization) - variatsion masalalarning umumlashtirilishi.

Stoxastik optimallashtirish katta hajmli ma'lumotlar uchun. Stochastic Gradient Descent (SGD): $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \tilde{f}(x_k)$, bu yerda $\tilde{f}$ - f ning shovqinli approksimatsiyasi (mini-batch gradient). Variance reduction usullari (SVRG, SAGA) konvergentsiyani yaxshilaydi. Adam, RMSprop - adaptiv qadam usullari, chuqur o'rganishda mashhur.

Global optimallashtirish lokal minimumlar muammosini hal qilishga harakat qiladi. Genetik algoritmlar, simulated annealing, particle swarm - metahevrstika usullar. Bayesian optimallashtirish - expensive funksiyalar uchun (masalan, hyperparameter tuning). Convex relaxation - nokonveks muammoni konveks approksimatsiya qilish.

Statistik modellashtirish va ma'lumotlar tahlili

Statistik modellashtirish massivlar orqali ma'lumotlar va parametrlarni ifodalaydi. X - $n \times p$ ma'lumotlar matritsasi (n - namunalar, p - xususiyatlar). y - n o'lchovli natija vektori. Chiziqli regressiya: $y = X\beta + \varepsilon$, bu yerda β - p o'lchovli parametrlar vektori, ε - xatolar. Eng kichik kvadratlar: $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$.

Ko'p o'zgaruvchili statistika: ma'lumotlar matritsasi X dan ko'plab statistikalar hisoblanadi. O'rtacha vektor: $\hat{\mu} = (1/n) \sum_i x_i$. Kovariatsiya matritsasi: $\Sigma = (1/(n-1)) \sum_i (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T$. Korrelyatsiya matritsasi: $R_{ij} = \Sigma_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$. Bu matritsalar ma'lumotlarning strukturasi tavsiflaydi.

Principal Component Analysis (PCA) - o'lchamni kamaytirish usuli. Maqsad: X ni past o'lchovli Y ga proyeksiya qilish. $Y = XW$, bu yerda W - proyeksiya matritsasi. W ustunlari Σ ning xos vektorlari (eng katta xos qiymatlarga mos). SVD orqali hisoblash: $X = U\Sigma V^T$, $W = V$. PCA ma'lumotlarni vizualizatsiya qilish va noise filtrlash uchun ishlatiladi.

Klasterlashtirish ma'lumotlarni guruhlariga bo'lish. K-means: har bir nuqta eng yaqin markazga tayinlanadi. Markazlar: $c_k = (1/|C_k|) \sum_{i \in C_k} x_i$. Iterativ algoritm: (1) Tayinlash (assignment): har bir x_i ni eng yaqin c_k ga. (2) Yangilash: c_k ni qayta hisoblash. Maqsad funksiya: $\min \sum_k \sum_{i \in C_k} \|x_i - c_k\|^2$. Lloyd algoritmi lokal minimumga yaqinlashadi.

Klassifikatsiya: $y = f(x)$, bu yerda y - diskret kategoriya. Logistic regressiya: $P(y=1|x) = \sigma(\beta^T x)$, bu yerda $\sigma(z) = 1/(1+e^{-z})$ - sigmoid. Support Vector Machines (SVM): max-margin classifier, yadro usullari (kernel trick) nonlinear chegaralar uchun. Decision trees, random forests - ensemble usullar.

Vaqt qatorlari tahlili: $\{y_t\}$ - vaqt bo'yicha kuzatishlar. Autoregression (AR): $y_t = \sum_i \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t$. Moving average (MA): $y_t = \sum_i \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$. ARIMA modeli - AR va MA kombinatsiyasi. Matritsa shaklida: $y = \Phi y_{\text{past}} + \varepsilon$, bu yerda Φ - AR koeffitsientlari

matritsasi. State-space models: $x_t = Ax_{t-1} + w_t$ (holat), $y_t = Cx_t + v_t$ (kuzatish). Kalman filter - optimal holat bahosi.

Bayesian tahlil parametrlar taqsimotini o'rganadi. Prior taqsimot $p(\theta)$, likelihood $p(y|\theta)$, posterior $p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta)$. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) - posterior dan namunalar olish. Gibbs sampling, Metropolis-Hastings - MCMC usullari. Variational inference - posterior approksimatsiyasi optimallashtirish orqali.

Mashinali o'rganish va neyron tarmoqlar

Mashinali o'rganish massivlarni keng qo'llaydi. Supervised learning: (X, y) ma'lumotlaridan $f: X \rightarrow y$ funksiyani o'rganish. X - input massiv, y - output vektor/skalar. Model parametrlari θ optimallashtirish orqali topiladi: $\min_{\theta} L(f_{\theta}(X), y)$, bu yerda L - loss funksiyasi (masalan, mean squared error).

Neyron tarmoqlar qatlamli strukturaga ega. Har bir qatlam: $h_l = \sigma(W_l h_{l-1} + b_l)$, bu yerda W_l - og'irliklar matritsasi, b_l - bias vektori, σ - activation funksiyasi (sigmoid, ReLU, tanh). Kirish $h_0 = x$, chiqish $\hat{y} = h_L$. Forward pass - hisoblash, backward pass (backpropagation) - gradientlarni hisoblash.

Backpropagation zanjir qoidasiga asoslangan. Loss L ni parametrlarga nisbatan gradient: $\partial L / \partial W_1 = \partial L / \partial h_1 \cdot \partial h_1 / \partial W_1$. $\partial L / \partial h_1$ orqaga tarqaladi: $\partial L / \partial h_{l-1} = W_l^T (\partial L / \partial h_l \odot \sigma'(W_l h_{l-1} + b_l))$, bu yerda $\odot$ - element-wise ko'paytirish. Avtomatik differentsiatsiya (TensorFlow, PyTorch) bu jarayonni avtomatlashtiradi.

Convolutional Neural Networks (CNN) tasvirlar uchun. Konvolyutsiya qatlami: $(W * x)_{ij} = \sum_{mn} W_{mn} x_{i+m,j+n}$ - mahalliy filterlar. Pooling qatlami: o'lchamni kamaytirish (max pooling, average pooling). CNN spatial ierarxiyani o'rganadi: past darajali xususiyatlar (edges) dan yuqori darajali (ob'ektlar) gacha.

Recurrent Neural Networks (RNN) ketma-ketliklar uchun. Holat: $h_t = \sigma(W_x x_t + W_h h_{t-1} + b)$. Output: $y_t = W_y h_t$. Long Short-Term Memory (LSTM) va Gated Recurrent Unit (GRU) - vanishing gradient muammosini hal qiladi. Attention mexanizmi - muhim qismlarga e'tibor, Transformer arxitekturasini - NLP da inqilob.

Tensor operatsiyalari chuqur o'rganishda markaziy. Matritsa-vektor ko'paytirish, elementwise operatsiyalar, konvolyutsiya - barchasi tensorlarda. Efficient implementation: BLAS, cuBLAS (GPU), cuDNN (deep learning). Automatic differentiation orqali gradientlar hisoblanadi. Mixed precision training - tezlashtirish uchun float16 va float32 ni birlashtirish.

Regularizatsiya overfitting'ni oldini oladi. L2 regularization: $L(\theta) = L_0(\theta) + \lambda \|\theta\|^2$, gradient descent θ ga decay qo'shadi. Dropout - training davomida tasodifiy neyronlarni o'chirish. Batch normalization - har bir qatlamda aktivatsiyalarni normalizatsiya qilish, konvergensiyani tezlashtiradi. Data augmentation - trening ma'lumotlarini sun'iy oshirish (rotation, crop).

Hisoblash samaradorligi va parallel algoritmlar

Hisoblash murakkabligi algoritmlarning samaradorligini o'lchaydi. Vaqt murakkabligi $T(n)$ - operatsiyalar soni n o'lchamli kirish uchun. Xotira murakkabligi $S(n)$ - zarur xotira hajmi. Big-O notation: $O(f(n))$ - yuqori chegara. Masalan, matritsalarini ko'paytirish $O(n^3)$, saralash $O(n \log n)$.

Cache samaradorligi zamonaviy protsessorlarda muhim. Cache hierarchy: L1 (32-64KB, 1-2 cycles), L2 (256KB-1MB, 10-20 cycles), L3 (8-64MB, 40-50 cycles), RAM (GB, 100+ cycles). Cache-oblivious algoritmlar cache hajmini bilmagan holda optimaldir. Blocking (tiling) - ma'lumotlarni kichik bloklarga bo'lish, cache'da sig'adigan o'lchamda.

Vektorizatsiya SIMD (Single Instruction Multiple Data) dan foydalanadi. Zamonaviy protsessorlar bir vaqtning o'zida 4-8 (AVX-256) yoki 8-16 (AVX-512) float operatsiyalarni bajaradi. Compiler auto-vectorization, intrinsics (qo'lda), yoki high-level wrappers (NumPy). Loop tiling va strip mining vektorizatsiya uchun loqplarni tayyorlaydi.

Parallel algoritmlar multicore va GPU da ishlaydi. Shared memory parallelism: OpenMP - CPU uchun, CUDA/OpenCL - GPU uchun. Distributed memory: MPI - cluster'lar uchun. Data parallelism - bir xil operatsiya turli ma'lumotlarda (map). Task parallelism - turli operatsiyalar parallel (pipeline).

Matrix multiplication parallel algoritmlari: Naive - har bir element parallel ($O(n^3/P)$ processors P bilan). Cannon's algorithm - 2D torus topology, $O(n^3/P)$. SUMMA (Scalable Universal Matrix Multiplication Algorithm) - communication-efficient. cuBLAS va CUBLAS_GEMM GPU da highly optimized.

MapReduce katta hajmdagi ma'lumotlar uchun. Map bosqichi: har bir input bo'lakka funksiya qo'llaniladi (parallel). Reduce bosqichi: natijalar agregatsiya qilinadi. Hadoop, Spark - MapReduce tizimlar. Functionally: $\text{map } f [x_1, \dots, x_n] = [f(x_1), \dots, f(x_n)]$, $\text{reduce } g z [x_1, \dots, x_n] = g(x_n, \dots g(x_2, g(x_1, z)))$.

GPU hisoblashlari: NVIDIA GPU'larda minglab yadro (cores). CUDA programming model: kernel - GPU'da parallel bajariladigan funksiya, thread hierarchy - grid/block/thread. Memory hierarchy: global (slow, GB), shared (fast, KB per block), registers (very fast, per thread). Coalesced memory access, occupancy optimization - performance uchun kritik.

Xulosa

Ko'p o'lchovli massivlarning funksional bog'liqliklari va matematik hamda hisoblash tadqiqotlaridagi xususiyatlarini o'rganish natijasida quyidagi asosiy xulosalarga kelamiz.

Funksional bog'liqliklar massivlar orasidagi murakkab matematikasiy munosabatlarni tavsiflaydi. Chiziqli, bilinear, differensial, integral va statistik bog'liqliklar turli xil matematikasiy va amaliy kontekstlarda paydo bo'ladi. Bu

bog'liqliklar massiv operatsiyalarini sistemalashtirish va umumlashtirish imkonini beradi.

Chiziqli algebra massivlarning funksional tavsifining asosiy vositasidir. Matritsali operatsiyalar, xos qiymatlar nazariyasi, SVD kabi fundamental tushunchalar ko'plab ilmiy hisoblashlarda qo'llaniladi. Spektral tahlil matritsalarining chuqur xususiyatlarini ochib beradi va ko'plab qo'llanmalarga ega.

Differensial va integral operatorlar massivlar orqali diskretlashtiriladi va raqamli yechimlar topiladi. PDE, ODE yechish usullari chekli farqlar, chekli elementlar va spektral usullarga asoslanadi. Bu usullar ilmiy va muhandislik hisoblashlarning asosini tashkil etadi.

Optimallashtirish nazariyasi massiv parametrlarini topish va eng yaxshi yechimlarni aniqlash uchun zarur. Gradient usullari, Nyuton va kvazi-Nyuton usullari, konveks optimallashtirish keng qo'llaniladi. Variatsion masalalar funksional minimallashtirishning diskret analoglariga olib keladi.

Statistik modellash ma'lumotlar matritsalarini va parametrlar vektorlari orqali amalga oshiriladi. Regressiya, PCA, klasterlashtirish, klassifikatsiya - barchasi chiziqli algebra operatsiyalariga asoslanadi. Ko'p o'zgaruvchili statistika kovariatsiya va korrelyatsiya matritsalarini o'rganadi.

Mashinali o'rganish va neyron tarmoqlar massivlar va tensorlar bilan intensiv ishlaydi. Og'irliklar matritsalarini, aktivatsiyalar vektorlari, gradientlar - barchasi massiv operatsiyalari orqali hisoblanadi. Backpropagation zanjir qoidasining matritsali shakli hisoblanadi.

Hisoblash samaradorligi massiv operatsiyalarining amaliy jihatlaridan eng muhimidir. Cache samaradorligi, vektorizatsiya, parallel hisoblash algoritmlarni sezilarli tezlashtiradi. GPU hisoblashlari katta massivlar uchun 10-100x tezlashtirish beradi.

Massivlarning funksional bog'liqliklari nazariy va amaliy jihatdan chuqur o'rganilgan. Ular zamonaviy ilmiy hisoblashlar, ma'lumotlar fanlari va mashinali o'rganishning asosini tashkil etadi. Matematik rigor va hisoblash samaradorligini birlashtirish muvaffaqiyatli ilovalar yaratish uchun zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang G. Introduction to Linear Algebra, 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press, 2016. 584 p.
2. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations, 4th Edition. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
3. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. 361 p.
4. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization, 2nd Edition. Springer, 2006. 664 p.

5. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
6. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016. 775 p.
7. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006. 738 p.
8. Murphy K.P. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012. 1067 p.
9. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning, 2nd Edition. Springer, 2009. 745 p.
10. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
11. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM, 2007. 341 p.
12. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics, 2nd Edition. Springer, 2007. 657 p.
13. Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J. et al. Array programming with NumPy // Nature. 2020. Vol. 585. P. 357-362.
14. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.