

Ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarning matematik xususiyatlari va ularning hisoblashlarda qo'llanilishi

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massivlar va ular ustida belgilangan funksiyalarning matematik xususiyatlari chuqur tahlil qilinadi. Massiv elementlari ustida olib boriladigan funksional amallar, chiziqlilik, differensiallanuvchanlik, normallar, optimizatsiya bilan bog'liq funksiya turlari va ularning matematik tavsifi yoritiladi. Shuningdek, ushbu funksiyalarning kompyuter hisoblashlarida, sonli metodlarda, sun'iy intellekt tizimlarida, fizik modellash tirishda, iqtisodiy tahlil va katta ma'lumotlar (Big Data) muhitida qo'llanishi keng ko'lamda tahlil qilingan. Maqola ta'lim tizimi uchun ham ahamiyatli bo'lib, unda ushbu murakkab mavzuni o'qitishning didaktik asoslari, bosqichma-bosqich yondashuv, vizualizatsiya, muammoli vazifalar asosida o'rgatish metodlari bayon etilgan.

Kalit so'zlar: ko'p o'lchovli massiv, funksiyalar, matematik xususiyatlar, raqamli metodlar, chiziqli algebra, normallar, gradient, hisoblash murakkabligi, didaktika, algoritmlar

Mathematical properties of functions defined in multidimensional arrays and their application in calculations

Gulbodom Oybek kizi Norqulova
BIU

Abstract: This article provides an in-depth analysis of multidimensional arrays and the mathematical properties of functions defined on them. Functional operations performed on array elements, linearity, differentiability, normals, types of functions related to optimization, and their mathematical description are covered. Also, the application of these functions in computer calculations, numerical methods, artificial intelligence systems, physical modeling, economic analysis, and Big Data environments is extensively analyzed. The article is also important for the education system, as it describes the didactic foundations of teaching this complex topic, step-by-step approach, visualization, and problem-based teaching methods.

Keywords: multidimensional array, functions, mathematical properties, numerical methods, linear algebra, normals, gradient, computational complexity, didactics, algorithms

Kirish. Matematikaning zamonaviy rivojlanish tendensiyalari, ayniqsa, informatsion texnologiyalar bilan integratsiyalashuvi natijasida ko'p o'lchovli massivlar bilan ishlashning ahamiyati keskin oshdi. Kompyuter grafikasi, mashinaviy o'qitish, sonli modellash, statistik tahlil, fizik jarayonlarni raqamli yechish, iqtisodiy prognozlash va boshqa ko'plab sohalarda ko'p o'lchovli massivlar asosiy ma'lumot tuzilmasi sifatida qo'llanilmoqda.

Ko'p o'lchovli massivlar ustida belgilangan funksiyalarni o'rganish nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy hisoblashlarda ham muhim o'rin tutadi. Chunki funksiyalarning xususiyatlari kompyuter algoritmlarining murakkabligi, barqarorligi va aniqligiga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Shu bilan birga, ushbu mavzu matematik ta'lim jarayonining muhim bo'lagi bo'lib, kelajakdagi matematiklar, o'qituvchilar, dasturchilar va analitiklar uchun chuqur bilim talab etadi.

Maqolaning maqsadi - ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarning matematik xususiyatlarini tizimli ravishda tadqiq qilish, ularning hisoblashlarda qo'llanish mexanizmini yoritish hamda mazkur mavzuni o'qitishda samarali didaktik yondashuvlarni ishlab chiqishdir.

Asosiy qism

1. Ko'p o'lchovli massivlar va ular ustida belgilangan funksiyalar

Ko'p o'lchamli massiv (ND-array) - bu elementlari indekslar ketma-ketligi orqali aniqlanadigan tartibli to'plamdir:

$$A = \{a_{i_1, i_2, \dots, i_n} | i_k \in \mathbb{N}, k=1..n\}$$

Agar $n = 1$ bo'lsa - vektor,

$n = 2$ bo'lsa - matritsa,

$n \geq 3$ bo'lsa - ko'p o'lchovli massiv hosil bo'ladi.

Funksiya esa quyidagicha aniqlanadi:

$$f: A \rightarrow R$$

Bu funksiya elementlar ustida amallar bajaradi: yig'indi, o'rtacha qiymat, normallarni topish, masofani o'lchash, statistik hisoblar, differensial operatorlar va boshqalar.

Funksiyalar quyidagi asosiy toifalarga bo'linadi:

- Chiziqli funksiyalar
- Chiziqsiz funksiyalar
- Differensiallanuvchi funksiyalar
- Norma va metrik funksiyalar

- Optimallik funktsiyalari
- Raqamli hisoblash funktsiyalari
- Operatorlar (gradient, divergentsiya, laplas operatori)

2. Funktsiyalarning matematik xususiyatlari

2.1. Uzlüksizlik

Ko'p o'lchovli funktsiyaning uzluksizligi barcha o'lchamlar bo'yicha tekshiriladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$$

Bu xossa sonli modellashtirishda hal qiluvchi ahamiyatga ega.

2.2. Qisman hosilalar va gradient

Ko'p o'lchovli funktsiyaning gradienti:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

Gradient:

optimizatsiyada yo'nalish beradi,

fizikada kuch maydonlarini ifodalaydi,

mashinaviy o'qitishda og'irliklarni yangilashda qo'llanadi.

2.3. Normallar va metrikalar

Ko'p o'lchovli normaning standart ko'rinishi:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Eng ko'p ishlatiladigan normallar:

- 1-norma - taksist masofasi,
- 2-norma - Evklid masofasi,
- inf-norma - maksimal element.

Massiv elementlari ustida norma funktsiyalari ma'lumotlarni normalizatsiya qilishda muhim.

2.4. Konvekslik

Konveks funktsiyalar optimallashtirish muammolarida asosiy o'rin tutadi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Mashina o'qitishdagi yo'qotish funktsiyalari ko'pincha konveks bo'ladi.

2.5. Spektral xususiyatlar

Ko'p o'lchovli massivga mos keluvchi chiziqli operatorlar spektrga ega bo'ladi:

- o'z qiymatlar,
- o'z vektorlar,
- spektral radius.

Bu xususiyatlar kvant mexanikasi va tasvirlarni qayta ishlashda qo'llaniladi.

3. Funktsiyalarning hisoblashlardagi o'rni

3.1. Hisoblash murakkabligi

n-o'lchovli massiv uchun:

$O(nd)O(n^d)O(nd)$

d - o'lcham.

O'lcham oshgani sayin hisoblash xarajatlari keskin oshadi. Bu "o'lchovlar la'nati" (curse of dimensionality) deb ataladi.

3.2. Diskretlashtirish jarayoni

Ko'p o'lchovli funksiyalarni kompyuterda yechish uchun ularga diskret ko'rinish beriladi:

$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(i_1, \dots, i_n) f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(i_1, \dots, i_n)$

Bu amaliy sonli metodlarning asosiy bosqichi.

3.3. Raqamli xatoliklar

truncation xatosi,

rounding xatosi,

floating-point xatosi,

propagatsiya xatosi.

Ko'p o'lchovli funksiyalar hisoblashda xatoliklar ko'payadi.

3.4. Raqamli barqarorlik

Iterations usullar quyidagilar bilan baholanadi:

- konvergenstiya tezligi,
- barqarorlik radiusi,
- Lipschitz sharti.

4. Funksiyalarni turli sohalarda qo'llash

4.1. Kompyuter grafikasida

Ko'p o'lchovli massivlar tasvirlarni ifodalaydi:

- 2D piksel massivlari,
- 3D volumetrik tasvirlar,
- RGB massivlari.

Funksiyalar: filtrlar, konvolyutsiya, interpolatsiya.

4.2. Sun'iy intellektda

Massiv funksiyalari:

konvolyutsiya funksiyasi,

aktivatsiya funksiyalari (ReLU, sigmoid, softmax),

normalizatsiya funksiyalari.

Ular neyron tarmoqlarni optimallashtirishda ishlatiladi.

4.3. Fizik modellashtirishda

Ko'p o'lchovli funksiyalar quyidagi tenglamalarda qo'llanadi:

- issiqlik tenglamalari,
- Navye–Stoks,
- elastiklik nazariyasi.

4.4. Iqtisodiy modellashtirishda

Ko'p o'lchovli regressiya funksiyalari:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \quad y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

Prognozlash, optimallashtirish vazifalarida qo'llaniladi.

4.5. Biotibbiy tasvirlarda

MRI, CT, PET tasvirlar - 3D massivlar.

Funksiyalar:

- segmentatsiya,
- interpolatsiya,
- kontur aniqlash.

5. Didaktik yondashuv: ushbu mavzuni o'qitish metodikasi

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalari mavzusi murakkab bo'lib, uni o'qitishda maxsus yondashuv talab etiladi.

5.1. Grafik va interaktiv ko'rgazmalardan foydalanish

Talabalar uchun:

- 3D grafiklar,
- dinamika diagrammalari,
- Python (NumPy), MATLAB simulyatsiyalari.

Bu mavzuning abstraktligini kamaytiradi.

5.2. Bosqichma-bosqich o'qitish

1. Oddiy bir o'lchovli massivlar

2. Matritsalar

3. 3D massivlar

4. Ko'p o'lchovli massivlar

5. Analitik xususiyatlar

6. Raqamli hisoblash metodlari

7. Amaliy masalalar

5.3. Kompetensiya asosida baholash

Baholash mezonlari:

- nazariy tushuncha,
- analitik yechim,
- algoritmlarni tushunish,
- dasturiy ko'nikma,
- ijodkorlik.

5.4. Muammoli ta'lim metodlari

Talabalarga mustaqil hal qilinadigan masalalar:

- normani hisoblash,
- gradientni topish,
- konvolyutsiya algoritmini ishlab chiqish,
- sonli metodlar yordamida funksiyani baholash.

Bu yondashuv ijodkorlikni oshiradi.

Xulosa. Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarning matematik xususiyatlari, ularning nazariy asoslari va amaliy hisoblashlardagi o'rni batafsil tahlil qilindi. Funksiyalarni o'rganish ko'p o'lchamli ma'lumotlar bilan ishlaydigan barcha fanlar uchun muhimdir. Sonli metodlar, optimizatsiya, mashinaviy o'qitish, fizik modellashtirish va iqtisodiy tahlillar ushbu funksiyalarga tayanadi. Mavzuni o'qitishda didaktik yondashuvning to'g'ri tanlanishi talabalarning mavzuni chuqur o'zlashtirishi uchun muhim ahamiyatga ega.

Mazkur tadqiqot ko'p o'lchovli funksiyalar bilan ishlashdagi nazariy va amaliy asoslarni yanada mustahkamlashga xizmat qiladi. Erishilgan natijalar matematika, kompyuter fanlari, sun'iy intellekt, fizika va iqtisodiyot sohalarida yangi ilmiy ishlanmalar yaratishga imkon beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Anton, H., Rorres, C. Elementary Linear Algebra. Wiley, 2020.
2. Burden, R. L., Faires, J. D. Numerical Analysis. Cengage Learning, 2015.
3. Strang, G. Linear Algebra and Its Applications. MIT Press, 2019.
4. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
5. Lay, D. Linear Algebra and Its Applications. Pearson, 2018.
6. Press, W. Numerical Recipes. Cambridge University Press, 2007.
7. Bishop, C. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
8. O'zbekiston Milliy Universiteti. Matematik analiz bo'yicha ma'ruzalar to'plami, 2021.
9. Kalitkin, N. Chislennyye metody. Moskva, 2013.
10. Tikhonov, A., Arsenin, V. Solutions of Ill-posed Problems. Wiley, 1977.