

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining xususiyatlari va ularning matematik hamda amaliy masalalarni yechishda roli

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining asosiy xususiyatlari, matematik tavsiflari va amaliy masalalarni yechishdagi ahamiyati kompleks tadqiq qilingan. Massiv funksiyalarining tizimli tasnifi, ularning algebraik va analitik xossalari, kompozitsiya qoidalari va transformatsiya mexanizmlari batafsil o'rganilgan. Tadqiqotda funksiyalarning chiziqlilik, davomiylilik, differensiallanish va optimallik xususiyatlari tahlil qilingan. Ilmiy hisoblashlar, muhandislik masalalari, ma'lumotlar tahlili, tasvirlarni qayta ishlash, optimallashtirish nazariyasi va mashinali o'rganishda massiv funksiyalarining qo'llanilishi ko'rsatilgan. Funksiyalarning hisoblash murakkabligi, xotira samaradorligi va parallel bajarilish imkoniyatlari baholangan. Tadqiqot natijalari zamonaviy dasturlash amaliyotida massiv funksiyalaridan samarali foydalanish va murakkab matematik-amaliy masalalarni yechish uchun nazariy va metodologik asos yaratadi.

Kalit so'zlar: massiv funksiyalari, matematik xususiyatlar, amaliy masalalar, chiziqli operatorlar, funksional tahlil, hisoblash algoritmlari, ilmiy hisoblashlar, ma'lumotlar qayta ishlash, optimallashtirish, transformatsiya, kompozitsiya, samaradorlik tahlili, amaliy matematika

Properties of Multidimensional Array Functions and Their Role in Solving Mathematical and Applied Problems

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BIU

Abstract: This article provides a comprehensive study of the fundamental properties of multidimensional array functions, their mathematical characterization, and their importance in solving applied and mathematical problems. The systematic classification of array functions, their algebraic and analytical properties, composition rules, and transformation mechanisms are examined in detail. The study analyzes key characteristics of functions such as linearity, continuity, differentiability, and optimality. Applications of array functions in scientific computing, engineering problems, data analysis, image processing, optimization theory, and machine learning are presented. The computational complexity, memory efficiency, and parallel

execution capabilities of the functions are evaluated. The findings establish a theoretical and methodological foundation for the effective use of array functions in modern programming practice and for solving complex mathematical-applied problems.

Keywords: array functions, mathematical properties, applied problems, linear operators, functional analysis, computational algorithms, scientific computing, data processing, optimization, transformation, composition, efficiency analysis, applied mathematics

Kirish

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalari zamonaviy matematik va amaliy fanlarning markaziy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Ular abstrakt matematik ob'ektlarni konkret hisoblash operatsiyalariga bog'lovchi ko'priklar vazifasini o'taydi. Massiv funksiyalari nafaqat ma'lumotlarni transformatsiya qilish vositasi, balki murakkab matematik munosabatlarni ifodalash va amaliy masalalarni yechishning samarali usuli hisoblanadi.

Massiv funksiyalarining xususiyatlari bir necha jihatdan muhimdir. Birinchidan, matematik jihatdan ular funksional tahlil, chiziqli algebra va operator nazariyasining konkret namunalarini beradi. Ikkinchidan, hisoblash nuqtai nazaridan ular algoritm samaradorligi, xotira boshqaruvi va parallellashtirish imkoniyatlarini belgilaydi. Uchinchidan, amaliy jihatdan ular real dunyo masalalarini modellashtirish va yechish vositasi hisoblanadi.

Matematik masalalarni yechishda massiv funksiyalari muhim rol o'ynaydi. Chiziqli tenglamalar tizimini yechish, xos qiymatlarni topish, differensial tenglamalarni raqamli integratsiya qilish, optimallashtirish masalalari - barchasida massiv operatsiyalari asosiy vosita hisoblanadi. Chiziqli algebra apparati matritsalar va vektorlar orqali ifodalanadi va massiv funksiyalari bu ob'ektlar ustida ishlaydi.

Amaliy masalalarda massiv funksiyalarining roli yanada kengroqdir. Muhandislik hisoblashlarda strukturalarni tahlil qilish, issiqlik tarqalishi, suyuqlik dinamikasi kabi jarayonlarni modellashtirish massivlar orqali amalga oshiriladi. Ma'lumotlar fanida katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlash, tahlil qilish va vizualizatsiya qilish uchun massiv operatsiyalari zarur. Tasvirlarni qayta ishlashda har bir piksel massiv elementi sifatida qaraladi va filtrlash, transformatsiya, segmentatsiya kabi operatsiyalar massiv funksiyalari orqali bajariladi.

Mashinali o'rganish va sun'iy intellektda massiv funksiyalari markaziy o'rinni egallaydi. Neyron tarmoqlar og'irliklari matritsalar, aktivatsiyalar vektorlar sifatida saqlanadi. Forward propagation va backpropagation jarayonlari ketma-ket massiv operatsiyalari sifatida amalga oshiriladi. Tensorli operatsiyalar chuqur o'rganishning asosini tashkil etadi.

Funksiyalarning xususiyatlarini tushunish ularni to'g'ri qo'llash uchun zarur. Chiziqlilik xossasi superposition prinsipini beradi va ko'plab soddalashtirishlarga olib keladi. Davomiylik xossasi kichik kirishdagi o'zgarishlar kichik chiqishdagi o'zgarishlarga olib kelishini kafolatlaydi. Differentsiallanish xossasi gradient usullarini qo'llash imkonini beradi va optimallashtirish algoritmlarining asosini tashkil etadi.

Tadqiqotning maqsadi ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining asosiy xususiyatlarini sistemali tahlil qilish, ularning matematik asoslarini ochib berish va matematik hamda amaliy masalalarni yechishdagi rolini ko'rsatishdan iborat. Tadqiqot ob'ekti sifatida turli toifadagi massiv funksiyalari, ularning xususiyatlari va real masalalardagi qo'llanmalari tanlab olingan.

Asosiy qism

Massiv funksiyalarining asosiy toifalari va xususiyatlari

Massiv funksiyalari umumiy shaklda $f: D \rightarrow C$ ko'rinishda ifodalanadi, bu yerda D - domen (kirish massivlari to'plami), C - kodomen (chiqish massivlari to'plami). Funksiyaning turi kirish va chiqish massivlarining o'lchamlari, elementlar turi va operatsiya tabiati bilan belgilanadi.

Elementwise (element bo'yicha) funksiyalar har bir elementga mustaqil ravishda qo'llaniladi. Agar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skalar funksiya bo'lsa, uning vektorli versiyasi $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ quyidagicha: $F(x)_i = f(x_i)$. Misollar: kvadrat, eksponent, sinus. Xususiyatlari: parallellashtirish oson, vektorizatsiya mumkin, har bir element mustaqil. Hisoblash murakkabligi $O(n)$.

Redutsiya funksiyalari massivni bitta qiymatga "qisqartiradi": $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Misollar: sum, max, min, mean. Xususiyatlari: assosiativlik (ba'zi hollarda) parallel reduksiya ta'minlaydi. Tree reduction: $O(\log n)$ parallel depth, $O(n)$ work. Kommutativlik tartibdan qat'iy nazar natija bir xil bo'lishini kafolatlaydi.

Transformatsiya funksiyalari massiv shaklini o'zgartiradi: $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$. Misollar: transpose, reshape, flatten. Xususiyatlari: ko'pincha $O(1)$ vaqt (view operations), metadata o'zgaradi, lekin ma'lumotlar o'zgarmaydi. Ba'zi hollarda (non-contiguous data) copy talab qilinadi va $O(n)$ vaqt.

Chiziqli funksiyalar (operatorlar) superposition prinsipiga bo'ysinadi: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Matritsali ko'paytirish: $y = Ax$ eng muhim misol. Xususiyatlari: kompozitsiya ham chiziqli (AB matritsasi), teskari operator mavjud bo'lishi mumkin (A^{-1}), xos qiymatlar va xos vektorlar orqali tavsiflanadi.

Bilinear va ko'p chiziqli funksiyalar bir nechta argumentlarda chiziqli. Bilinear: $f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y)$ va $f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2)$. Misollar: ichki ko'paytma $\langle x, y \rangle$, matritsalarini ko'paytirish $C = AB$ (A va B bo'yicha alohida chiziqli). Tensorli operatsiyalar ko'p chiziqli funksiyalarning umumlashtirilishidir.

Kompozitsiya funksiyalar murakkab operatsiyalarni oddiy operatsiyalardan quradi: $h = g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$. Xususiyatlari: assosiativlik $(k \circ g) \circ f = k \circ (g \circ f)$,

identifikatsiya $\text{id} \circ f = f \circ \text{id} = f$. Neyron tarmoqlar kompozitsiyalarning klassik misoli: $y = f_L(f_{L-1}(\dots f_1(x)\dots))$.

Chiziqlilik va uning ahamiyati

Chiziqli funksiyalar matematik va amaliy jihatdan eng muhim toifa hisoblanadi. Ta'rif: f chiziqli agar $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ barcha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ va $x, y \in V$ uchun. Bu ikki xossani birlashtiradi: additivlik $f(x + y) = f(x) + f(y)$ va bir jinslilik $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Chiziqli operatorlarning asosiy xususiyatlari: (1) Nol vektorni nol vektorga akslantiradi: $f(0) = 0$. (2) Chiziqli kombinatsiyani saqlay: $f(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i f(x_i)$. (3) Matritsa orqali ifodalanadi: chekli o'lchovli fazolarda $f(x) = Ax$. (4) Kompozitsiya ham chiziqli: $g \circ f$ chiziqli agar f va g chiziqli bo'lsa.

Chiziqli tizimlar $Ax = b$ ko'plab masalalarning markazida. Ular fizik qonunlar (Kirchhoff qonunlari, elastiklik nazariyasi), iqtisodiy modellar (input-output tahlil, Leontief model), ma'lumotlar tahlili (regressiya, least squares) va ko'plab boshqa sohalarda paydo bo'ladi. Yechish usullari: to'g'ridan-to'g'ri (Gauss eliminatsiyasi, LU yoyilmasi) va iterativ (Jacobi, Gauss-Seidel, konjugat gradientlar).

Chiziqli approksimatsiya nochiziqli funksiyalarni mahalliy chiziqli funksiya bilan yaqinlashtiradi. Agar f differensiallanuvchi bo'lsa, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + Df(x)\Delta x$, bu yerda $Df(x)$ - Jacobian matritsasi. Bu chiziqli approksimatsiya Nyuton usuli, optimallashtirish algoritmlari va sensitivlik tahlilida qo'llaniladi.

Superposition prinsipi chiziqli tizimlarning asosiy xossasi. Agar x_1 va x_2 kirish uchun $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ chiqishlar bo'lsa, unda $\alpha x_1 + \beta x_2$ kirish uchun $\alpha y_1 + \beta y_2$ chiqish bo'ladi. Bu printsip signallarni qayta ishlash, elektr zanjirlari va ko'plab boshqa sohalarda fundamental ahamiyatga ega.

Chiziqli bo'lmagan (nochiziqli) funksiyalar ko'plab real muammolarda paydo bo'ladi. Kvadratik funksiyalar $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, ko'p nomli funksiyalar, transsendet funksiyalar ($\sin$, $\exp$) - barchasi nochiziqli. Nochiziqli tenglamalarni yechish uchun iterativ usullar (Nyuton, gradiyent tushish) qo'llaniladi. Ko'pincha nochiziqli masalani chiziqli qism qismlariga ajratish strategiyasi ishlatiladi.

Davomiylik va differensiallanish xususiyatlari

Davomiylik funksiyaning "silliqligini" tavsiflaydi. Funksiya $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ x_0 nuqtada davomiy, agar har bir $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ bo'lganda $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Intuitsiya: kichik kirish o'zgarishi kichik chiqish o'zgarishiga olib keladi. Barqarorlik uchun muhim xossa.

Lipschitz davomiyliги kuchliroq xossa: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ barcha x, y uchun, bu yerda L - Lipschitz doimiysi. Bu demak, funksiya o'zgarish tezligi chegaralangan. Lipschitz davomiy funksiyalar konvergenstiya tahlilida va xatoliklarni baholashda muhim. Masalan, agar f Lipschitz bo'lsa, Picard iteratsiyasi yaqinlashadi.

Differensiallanish mahalliy chiziqli approksimatsiyani beradi. Funksiya $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ x_0 da differensiallanuvchi, agar chiziqli operator $Df(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mavjud bo'lib,

$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(\|h\|)$. $Df(x_0)$ - Jacobian matritsasi ($m \times n$): $[Df(x_0)]_{ij} = \partial f_i / \partial x_j|_{x_0}$.

Gradient ∇f skalar funksiya $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uchun qisman hosilalar vektori: $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)^T$. Gradient eng tez o'sish yo'nalishini ko'rsatadi. Optimallashtirish algoritmlari (gradient descent, BFGS) gradientdan foydalanadi. Kritik nuqtalarda gradient nolga teng: $\nabla f(x^*) = 0$.

Hessian matritsasi H ikkinchi tartibli qisman hosilalar matritsasi: $H_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$. Hessian funksiyaning "egriligini" tavsiflaydi. Agar H musbat aniq bo'lsa, funksiya lokal minimum ga ega. Nyuton usuli Hessian dan foydalanadi: $x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$.

Chain rule (zanjir qoidasi) kompozitsiya hosilasini beradi: agar $h = g \circ f$ bo'lsa, $Dh(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$. Matritsali ko'rinishda: $[Dh(x)]_{ij} = \sum_k [Dg(f(x))]_{ik} [Df(x)]_{kj}$. Backpropagation zanjir qoidasining iterativ qo'llanilishi: gradientlarni orqaga tarqatish.

Directional derivative yo'nalish bo'yicha hosila: $D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \{f(x + tv) - f(x)\} / t = \nabla f(x) \cdot v$. Bu v yo'nalishda funksiyaning o'zgarish tezligini beradi. Maksimal o'zgarish gradient yo'nalishida: $D_v f$ maksimal bo'lganda $v \parallel \nabla f$.

Konvekslik va optimallashtirish masalalari

Konveks funksiya $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quyidagi xossaga ega: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ barcha x, y va $0 \leq \lambda \leq 1$ uchun. Geometrik ma'no: funksiya grafi har qanday ikkita nuqta orasidagi vatardan pastda. Konveks funksiyalar optimallashtirish nazariyasida markaziy rol o'ynaydi.

Konveks funksiyalarning xususiyatlari: (1) Har qanday lokal minimum global minimumdir. (2) Kritik nuqta ($\nabla f = 0$) global minimum. (3) Konveks funksiyalarning yig'indisi va musbat chiziqli kombinatsiyasi konveks. (4) Differensiallanuvchi konveks funksiya uchun: $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$ (birinchi tartib sharti).

Qat'iy konveks funksiya: tengsizlik qat'iy ($\lambda \in (0, 1)$ va $x \neq y$ uchun). Qat'iy konveks funksiyaning yagona global minimumi bor. Masalan, $f(x) = \|x\|^2$ qat'iy konveks. Kvadratik funksiya $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x$ konveks $\Leftrightarrow A$ musbat yarimo'q, qat'iy konveks $\Leftrightarrow A$ musbat aniq.

Gradient descent: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$. Konveks funksiyalar uchun konvergeniya kafolati: agar α_k to'g'ri tanlansan, $x_k \rightarrow x^*$ (global minimum). Konvergeniya tezligi sharti raqomiga bog'liq. Strongly konveks funksiyalar uchun chiziqli konvergeniya: $\|x_k - x^*\| \leq C^k \|x_0 - x^*\|$.

Constrained optimization: $\min f(x)$ s.t. $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$. Konveks optimallashtirish: f konveks, tengsizlik cheklovlari konveks to'plam hosil qiladi, tenglik cheklovi affin. KKT shartlari: $\nabla f(x^*) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_j \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$, $\lambda \geq 0$, $\lambda_i g_i(x^*) = 0$. Konveks muammolar uchun KKT zaruriy va yetarli.

Duality (duallik) har bir primal muammoga dual muammo mos keladi. Weak duality: dual optimallik $\leq$ primal optimallik. Strong duality (konveks muammolarda,

Slater shartida): dualar tengdir. Dual muammo ba'zan yechish osonroq yoki cheklovlar kamroq. SVM (Support Vector Machines) dual formulatsiyada yechiladi.

Chiziqli algebra operatsiyalari va masalalar

Matritsali ko'paytirish $C = AB$ fundamental operatsiya. Naive algoritmi: $C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$, $O(n^3)$ vaqt. Strassen algoritmi: $O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.807})$. Praktika BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) kutubxonalari highly optimized: cache blocking, vectorization, parallelization.

Chiziqli tizimlar $Ax = b$ yechish. Dense matritsalar uchun: LU yoyilmasi $O(n^3)$, keyin forward/backward substitution $O(n^2)$ har bir b uchun. Cholesky (simmetrik musbat aniq uchun) ikki baravar tezroq. QR yoyilmasi (least squares uchun) barqaror. Siyrak matritsalar uchun: iterativ usullar (CG, GMRES) $O(n^2)$ yoki undan yaxshi (sparsity pattern ga bog'liq).

Xos qiyatlar va xos vektorlar $Av = \lambda v$. Power method: eng katta xos qiymatni topadi, $O(n^2)$ har iteratsiyada. QR algoritmi: barcha xos qiyatlarni topadi, $O(n^3)$ preprocessing + $O(n^2)$ har iteratsiya. Jacobi va Givens rotatsiyalari simmetrik matritsalar uchun. Arnoldi/Lanczos iteratsiyalari katta siyrak matritsalar uchun.

Singular Value Decomposition (SVD) $A = U\Sigma V^T$. Golub-Kahan bidiagonalizatsiya + iterativ diagonalizatsiya. $O(mn^2)$ yoki $O(m^2n)$ (m va n dan kichigi). Truncated SVD: faqat k ta eng katta singular qiymat, randomized algoritmlari $O(mn \log k)$. Qo'llanmalar: dimensionality reduction, image compression, recommender systems.

Least squares muammosi $\min_x \|Ax - b\|^2$. Normal tenglamalar: $A^T Ax = A^T b$, lekin sharti raqomi katta bo'lishi mumkin. QR yoyilmasi: $A = QR$, $Rx = Q^T b$ - barqaraliroq. SVD yechimi: $x = A^+ b = V\Sigma^+ U^T b$, bu yerda Σ^+ - psevdoteskari. Regularizatsiya (Tikhonov): $\min \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2$ overfittingni oldini oladi.

Eigenvalue problems differensial tenglamalar, vibrations, stability analysis da paydo bo'ladi. Generalized eigenvalue problem: $Ax = \lambda Bx$. Finite element method (FEM) bunday muammolarga olib keladi. Shift-and-invert strategy tezlashtiradi. Krylov subspace methods katta sparse muammolar uchun.

Differensial tenglamalar va raqamli usullar

Ordinary Differential Equations (ODE) $dy/dt = f(y, t)$. Diskretlashtirish: $y_{n+1} = y_n + h \Phi(y_n, t_n, h)$, bu yerda h - qadam, Φ - usul. Eyler: $\Phi = f(y_n, t_n)$, $O(h)$ xatolik. Runge-Kutta usullari: RK4 $O(h^4)$ xatolik, keng qo'llaniladi. Adaptive step size: xatolikni boshqarish, samaradorlikni oshirish.

Stiff ODE muammolari implicit usullarni talab qiladi. Backward Euler: $y_{n+1} = y_n + h f(y_{n+1}, t_{n+1})$ - implicit, lekin barqaror. BDF (Backward Differentiation Formulas) - multistep implicit usullar. Har qadamda nochiziqli tizim Nyuton usuli bilan yechiladi. Jacobian matritsasi $\partial f / \partial y$ kerak.

Partial Differential Equations (PDE) fazoviy va vaqt o'zgaruvchilari bilan. Issiqlik tenglamasi: $\partial u / \partial t = \alpha \partial^2 u / \partial x^2$. Method of lines: fazoni diskretlashtirish (chekli farqlar), vaqt bo'yicha ODE yechuvchi. Explicit usullar (Forward Euler + central differences): stability chekloviga ega (CFL sharti). Implicit usullar (Backward Euler, Crank-Nicolson): har qadamda chiziqli tizim yechiladi, lekin unconditionally stable.

Finite Element Method (FEM) murakkab geometriya va BC uchun. Domain ni elementlarga bo'lish (mesh generation). Weak formulation: $\int v Lu \, dx = \int v f \, dx$ test funksiyalar v uchun. Galerkin usuli: $u \approx \sum_i u_i \varphi_i(x)$ (bazis funksiyalari). Natija: chiziqli yoki nochiziqli tizim $Ku = F$. K - stiffness matrix (sparse, structured).

Spectral methods global polinomlar bilan approksimatsiya. Fourier spectral method: $u(x) = \sum_n \hat{u}_n e^{inx}$. Chebyshev spectral method: $u(x) = \sum_n a_n T_n(x)$. Differensial operatorlarni spektral fazoda qo'llash - ko'paytirish (Fourier uchun), matritsa (Chebyshev uchun). Eksponensial konvergentsiya silliq funksiyalar uchun, lekin global - discontinuities muammosi.

Time-dependent PDE: separation of variables, semi-discretization. Advection tenglamasi $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$: upwind schemes (ustida), Lax-Wendroff, flux-limiter usullari. Nonlinear conservation laws: shock'lar riemann solvers bilan. Hyperbolic, parabolic, elliptic PDE turli xususiyatlar va usullar talab qiladi.

Tasvirlarni qayta ishlash va signallar tahlili

Raqamli tasvir - ikki o'lchovli massiv $I(i, j)$, bu yerda i, j - piksel koordinatalari, qiymat - intensivlik (grayscale) yoki rang (RGB). Rangli tasvir - uch o'lchovli massiv $I(i, j, c)$, $c \in \{R, G, B\}$. Tasvirni yuklash, saqlash, ko'rsatish - asosiy operatsiyalar. Format konvertatsiyasi (JPEG, PNG, BMP), rang modellari (RGB, HSV, YCbCr).

Konvolyutsiya - tasvirlarni filtrlash asosi. Diskret konvolyutsiya: $(I * K)(i, j) = \sum_m \sum_n I(i-m, j-n) K(m, n)$, bu yerda K - filtr kerneli (kernel). Gaussian blur: K - Gaussian funksiyasi, noise ni kamaytiradi. Sharpening: K center qiymat katta, qo'shnilar manfiy. Edge detection: Sobel, Prewitt, Canny kernellari gradiyentni hisoblaydi.

Fourier transformatsiyasi tasvir chastotali komponentlarini tahlil qiladi. 2D DFT: $F(u, v) = \sum_i \sum_j I(i, j) e^{-2\pi i (ui/M + vj/N)}$. Fast Fourier Transform (FFT) $O(N \log N)$ tezligida. Chastotali filtrlash: $F(u, v)$ ni ko'paytirish (low-pass, high-pass, band-pass), keyin teskari FFT. Qo'llanmalar: noise filterlash, pattern analysis, compression.

Morphological operations binary yoki grayscale tasvirlarda strukturaviy o'zgarishlar. Dilation: $A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$, ob'ektlarni kengaytiradi. Erosion: $A \ominus B = \{z \mid B_z \subseteq A\}$, ob'ektlarni siqadi. Opening: erosion keyin dilation, kichik noise'ni olib tashlaydi. Closing: dilation keyin erosion, kichik teshiklarni to'ldiradi. Structuring element B - kernel.

Image segmentation - tasvirni mazmunli qismlarga bo'lish. Thresholding: binary segmentation, $I(i, j) > T \rightarrow 1$, aks holda 0. Otsu usuli: optimal threshold avtomatik

topish. Region growing: seed nuqtadan boshlash, o'xshash qo'shnilarni qo'shish. Watershed algoritmi: gradient kabi "topografiya" ga qarab bo'lish.

Feature extraction - tasvir xususiyatlarini ajratib olish. Edge detection (Canny), corner detection (Harris), blob detection (LoG, DoG). SIFT (Scale-Invariant Feature Transform), SURF - keypoints va descriptors. Deep learning usullari (CNN) avtomatik feature learning: past darajali (edges) dan yuqori darajali (ob'ektlar) gacha.

Statistik tahlil va ma'lumotlar modellash

Ma'lumotlar matritsasi X ($n \times p$): n - observations, p - features. Preprocessing: normalization (mean=0, std=1), standardization, missing values imputation. Outlier detection: statistical tests, visualization (boxplot, scatter), isolation forest.

Principal Component Analysis (PCA) o'lchamni kamaytirish. Kovariatsiya matritsasi $\Sigma = (1/(n-1)) X^T X$. Xos yoyilmasi: $\Sigma = Q \Lambda Q^T$. Prinsipal komponentlar - Q ning ustunlari (xos vektorlar). Proyeksiya: $Y = XQ$. Variance explained: $\lambda_i / \sum_j \lambda_j$. Scree plot: optimal komponentlar sonini tanlash. Qo'llanmalar: visualization (2D/3D), noise reduction, compression.

Linear regression: $y = X\beta + \varepsilon$. Least squares: $\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$. Ridge regression: $\beta_{\text{ridge}} = (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T y$, regularization multicollinearity va overfitting ni hal qiladi. Lasso: L1 regularization, feature selection. Elastic net: L1 va L2 kombinatsiyasi. Generalized linear models (GLM): logistic regression (binary y), Poisson regression (count data).

Time series tahlili: $\{y_t\}$ - vaqt bo'yicha kuzatishlar. Autocorrelation function (ACF): $\rho(k) = \text{Corr}(y_t, y_{t+k})$, temporal dependencies ni ko'rsatadi. ARIMA model: AutoRegressive Integrated Moving Average. State-space models va Kalman filtering: $x_t = A x_{t-1} + w_t$ (latent state), $y_t = C x_t + v_t$ (observation). Forecasting: trend, seasonality, noise komponentlari.

Multivariate statistics: ko'p o'zgaruvchilar orasidagi munosabatlar. Covariance matrix Σ - o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik. Correlation matrix R - normalized. Mahalanobis distance: $d^2(x, \mu) = (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$, correlation hisobga olingan masofa. Hotelling T^2 test - multivariate analog of t-test.

Factor analysis latent o'zgaruvchilarni topadi: $X = \Lambda F + \varepsilon$, bu yerda F - latent factors, Λ - loadings. PCA dan farqi: error term ε . Exploratory vs confirmatory factor analysis. Rotation usullari (varimax, oblimin) interpretatsiyani yaxshilaydi.

Mashinali o'rganish algoritmlari

Supervised learning: training data (X, y) , maqsad: $f: X \rightarrow y$ mapping o'rganish. Loss function $L(\hat{y}, y)$: squared loss (regression), cross-entropy (classification). Empirical risk minimization: $\min_{\theta} (1/n) \sum_i L(f_{\theta}(x_i), y_i)$. Regularization: $\min_{\theta} L + \lambda R(\theta)$, bu yerda R - regularizer (L2, L1, elastic net).

Neural networks: multilayer perceptron. Forward pass: $h_0 = x$, $h_l = \sigma(W_l h_{l-1} + b_l)$, $\hat{y} = h_L$. Activation functions: sigmoid, tanh, ReLU, Leaky ReLU. Backward pass

(backpropagation): $\partial L / \partial W_1$ va $\partial L / \partial b_1$ ni zanjir qoidasi orqali hisoblash. Gradient descent: $W_1 \leftarrow W_1 - \alpha \partial L / \partial W_1$. Mini-batch SGD: kichik batch'larda gradientlarni hisoblash.

Convolutional Neural Networks (CNN) tasvirlar uchun. Convolutional layer: feature maps, local receptive fields, weight sharing. Pooling layer: spatial downsampling (max pooling, average pooling). Architecture: alternating conv-pool layers, keyin fully connected. Famous architectures: LeNet, AlexNet, VGG, ResNet, Inception. Transfer learning: pretrained modelfdan feature extraction yoki fine-tuning.

Recurrent Neural Networks (RNN) sequential data uchun. Hidden state: $h_t = \sigma(W_x x_t + W_h h_{t-1} + b)$. Backpropagation Through Time (BPTT): gradientlarni vaqt orqaga tarqatish. Vanishing/exploding gradient muammosi. LSTM va GRU: gating mechanisms, long-term dependencies. Applications: language modeling, machine translation, speech recognition.

Unsupervised learning: faqat X, label'siz. K-means clustering: har bir nuqta eng yaqin centroidga, centroidlar yangilanadi. Hierarchical clustering: agglomerative (bottom-up) yoki divisive (top-down), dendrogram. Gaussian Mixture Models (GMM): probabilistic clustering, EM algorithm. Dimensionality reduction: PCA, t-SNE, autoencoders.

Reinforcement learning: agent muhitda harakat qiladi, reward oladi. Markov Decision Process (MDP): states, actions, transitions, rewards. Policy $\pi(a|s)$: qaysi action state s da. Value function $V^{\pi}(s)$: expected cumulative reward. Q-learning: $Q(s, a) = \text{reward} + \gamma \max_{a'} Q(s', a')$ (Bellman equation). Deep Q-Networks (DQN): Q-function neural network bilan approksimatsiya. Policy gradient methods, Actor-Critic.

Xulosa

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining xususiyatlari va matematik hamda amaliy masalalarni yechishdagi rolini tadqiq qilish natijasida quyidagi fundamental xulosalarga kelimiz.

Massiv funksiyalarining tizimli tasnifi va xususiyatlari dasturlash va matematik modellashtirish uchun muhim asos yaratadi. Elementwise, redutsiya, transformatsiya, chiziqli va ko'p chiziqli funksiyalar har biri o'z xususiyatlari va qo'llanish sohalariga ega. Funksiyalarning kompozitsiyasi murakkab operatsiyalarni oddiy operatsiyalardan qurish imkonini beradi.

Chiziqlilik xossasi matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lib, superposition prinsipi, chiziqli tizimlar va ko'plab soddalashtirishlarga olib keladi. Chiziqli operatorlar matritsalar orqali ifodalanadi va ularning xususiyatlari (xos qiyatlar, singular qiymatlar) chuqur matematik ma'noga ega.

Davomiylik va differensiallanish funksiyalarning analitik xususiyatlarini tavsiflaydi. Davomiy funksiyalar barqaror, differensiallanuvchi funksiyalar mahalliy

chiziqli approksimatsiyaga ega. Gradient va Hessian optimallashtirish algoritmlarining asosini tashkil etadi.

Konvekslik optimallashtirish nazariyasida markaziy rol o'ynaydi. Konveks funksiyalar lokal minimumga ega emas, global minimum mavjud va gradient usullari yaxshi ishlaydi. Konveks optimallashtirish ko'plab amaliy masalalarda qo'llaniladi.

Chiziqli algebra operatsiyalari ilmiy hisoblashlarning asosini tashkil etadi. Matritsalarini ko'paytirish, chiziqli tizimlarni yechish, xos qiyatlar va SVD - barchasi massiv funksiyalari orqali amalga oshiriladi. Samarali algoritmlar va kutubxonalar (BLAS, LAPACK) amaliy tizimlar uchun muhim.

Differensial tenglamalarni raqamli yechish massiv diskretizatsiyasiga asoslanadi. ODE va PDE usullari chekli farqlar, chekli elementlar va spektral usullarni o'z ichiga oladi. Bu usullar fizika, muhandislik va boshqa sohalarida keng qo'llaniladi.

Tasvirlarni qayta ishlash va signallar tahlili massiv operatsiyalarining muhim qo'llanmasi hisoblanadi. Konvolyutsiya, Fourier transformatsiyasi, morphological operations va feature extraction tasvirlarni tahlil qilish va tushunishda asosiy vositalar.

Statistik tahlil va ma'lumotlar modellash ma'lumotlar matritsalarini orqali amalga oshiriladi. PCA, regression, time series, multivariate statistics - barchasi chiziqli algebra va statistikaning kombinatsiyasidir. Bu usullar ma'lumotlar fanida keng qo'llaniladi.

Mashinali o'rganish algoritmlari massiv operatsiyalarining eng murakkab qo'llanmalaridan biri. Neural networks, CNN, RNN va reinforcement learning tensorli hisoblashlarga asoslanadi. Backpropagation, gradient descent va boshqa optimallashtirish usullari massiv funksiyalarining chuqur tushunishini talab qiladi.

Umumiy xulosa: ko'p o'lchovli massiv funksiyalari zamonaviy matematik va amaliy fanlarning asosiy vositasi hisoblanadi. Ularning xususiyatlarini to'liq tushunish samarali algoritmlar yaratish, murakkab masalalarni yechish va yangi tadqiqot yo'nalishlarini ochish uchun zarur.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang G. Introduction to Linear Algebra, 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press, 2016. 584 p.
2. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations, 4th Edition. Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
3. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization, 2nd Edition. Springer, 2006. 664 p.
4. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.
5. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016. 775 p.

6. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006. 738 p.
7. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
8. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM, 2007. 341 p.
9. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Edition. Pearson, 2018. 1168 p.
10. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning, 2nd Edition. Springer, 2009. 745 p.
11. Murphy K.P. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. MIT Press, 2012. 1067 p.
12. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics, 2nd Edition. Springer, 2007. 657 p.
13. Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J. et al. Array programming with NumPy // Nature. 2020. Vol. 585. P. 357-362.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.