

Ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalar va ularni matematik tahlil nuqtai nazaridan o'rganish

Gulbodom Oybek qizi Norqulova
BXU

Annotatsiya: Maqolada ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarning matematik tahlili, ularning struktura va funksional xususiyatlari, analitik va raqamli tahlil usullari, shuningdek, zamonaviy hisoblash algoritmlarida tutgan o'rni chuqur yoritilgan. Ko'p o'lchovli massivlar murakkab ma'lumotlarni ifodalashda eng qulay matematik modellardan biri bo'lib, ular tasvirlarni qayta ishlash, sun'iy intellekt, fizik modellashtirish, statistik tahlil, iqtisodiy prognozlash va matematik optimizatsiya kabi sohalarda keng qo'llanadi. Maqolada massiv funksiyalarining differensiallanuvchanlik, uzluksizlik, konvekslik, spektral xususiyatlar, normativ tavsiflari kabi jihatlar ilmiy asosda bayon etiladi. Didaktik qismda ushbu murakkab mavzuni o'qitishning samarali metodlari, bosqichli pedagogik yondashuvlar, vizual modellash va muammoli ta'limning afzalliklari ko'rsatib beriladi.

Kalit so'zlar: ko'p o'lchovli massivlar, massiv funksiyalari, matematik tahlil, differensiallanuvchanlik, konvekslik, spektral tahlil, normativ xususiyatlar, raqamli modellashtirish, algoritmlar, didaktika

Functions defined in multidimensional arrays and their study from the point of view of mathematical analysis

Gulbodom Oybek kizi Norqulova
BIU

Abstract: The article deeply covers the mathematical analysis of functions defined in multidimensional arrays, their structural and functional properties, analytical and numerical analysis methods, as well as their role in modern computational algorithms. Multidimensional arrays are one of the most convenient mathematical models for representing complex data, and they are widely used in such areas as image processing, artificial intelligence, physical modeling, statistical analysis, economic forecasting and mathematical optimization. The article describes on a scientific basis such aspects as differentiability, continuity, convexity, spectral properties, normative characteristics of array functions. The didactic part shows effective methods of teaching this complex topic, step-by-step pedagogical approaches, the advantages of visual modeling and problem-based learning.

Keywords: multidimensional arrays, array functions, mathematical analysis, differentiability, convexity, spectral analysis, normative properties, numerical modeling, algorithms, didactics

KIRISH. Zamonaviy axborot texnologiyalari, fan va texnika taraqqiyoti ko'p o'lchamli ma'lumotlar bilan ishlashni kun tartibiga qo'yimoqda. Tasvirlarni qayta ishlash, sun'iy intellekt, katta ma'lumotlar, ilmiy hisoblashlar, meteorologiya, iqtisodiy modellashtirish, kompyuter grafikasi va boshqa ko'plab sohalarida ma'lumotlar odatda ko'p o'lchovli massivlar shaklida saqlanadi va qayta ishlanadi. Shuning uchun ko'p o'lchovli massiv ustida aniqlangan funksiyalarni o'rganish zamonaviy matematik tahlilning muhim vazifalaridan biriga aylangan.

Massivda aniqlangan funksiyalar:

- ko'plab algoritmlar,
- matematik modellar,
- statistik tahlil vositalari,
- fizik jarayonlarni hisoblash modellari,
- sun'iy intellekt arxitekturasini

uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarini tahlil qilish quyidagi ilmiy savollarga javob beradi:

1. Massiv elementlari orasidagi bog'lanishlar qanday modellashtiriladi?
2. Funksiyaning analitik xususiyatlari algoritmnining aniqligiga va barqarorligiga qanday ta'sir qiladi?
3. Matematik tahlil usullari ko'p o'lchovli ma'lumotlar strukturasiga qanday moslashtirilishi mumkin?
4. Massiv funksiyalaridan samarali foydalanish uchun qanday raqamli usullar qo'llanadi?

Maqolaning asosiy maqsadi - ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarni matematik tahlil orqali chuqur tadqiq qilish, ularning nazariy va amaliy o'rnini yoritish hamda bu masalani o'qitishda qo'llaniladigan didaktik yondashuvlarni ilmiy asoslashdir.

ASOSIY QISM

1. Ko'p o'lchovli massivlarning matematik modeli

Ko'p o'lchovli massiv quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \{a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid 1 \leq i_k \leq N_k, k=1, \dots, n\}$$

Bu yerda:

- n - massivning o'lchamlar soni,
- $a_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ - massiv elementlari,

- N_k - k-o'lcham bo'yicha indeks chegarasi.

Massiv - diskret matematik obyekt bo'lsa-da, u ko'pincha uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtirish, ularni diskretlashtirish yoki modellashtirish vositasi sifatida qo'llanadi.

1.1. Massivlarning strukturaviy xususiyatlari

Massiv quyidagi struktura ko'rsatkichlari bilan tavsiflanadi:

- Tartib (o'lchamlar soni): 1D (vektor), 2D (matritsa), 3D (kub), ND (n-o'lchamli fazo).

- Indeksya tizimi: 0-based yoki 1-based.

- Elementlarning topologik joylashuvi: qator bo'yicha, ustun bo'yicha, blokli joylashuv.

- Zichlik darajasi: zich massivlar, siyrak massivlar.

- Chegaraviy shartlar: ko'rinmas elementlar, periodik indekslash va boshqalar.

Bu struktura funksiyaning tahlili va algoritm ishlab chiqilishiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi.

2. Ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalar

Ko'p o'lchovli massivlarda aniqlangan funksiyalar odatda quyidagi turlarga bo'linadi:

2.1. Elementar funksiyalar

$$f(A)=g(a_1, \dots, a_n) \quad f(A)=g(a_{\{1, \dots, n\}}) \quad f(A)=g(a_1, \dots, a_n)$$

Har bir elementga alohida qo'llanadi.

Misollar:

- $f(A)=A^2$ $f(A)=A^2$ $f(A)=A^2$
- $f(A)=\sin(A)$ $f(A)=\sin(A)$ $f(A)=\sin(A)$
- $f(A)=|A|$ $f(A)=|A|$ $f(A)=|A|$

2.2. Agregatsion funksiyalar

Massiv elementlari ustidan integrallash yoki yig'indi olish:

$$f(A)=\sum_{i=1, \dots, n} a_i \quad f(A)=\sum_{i=1, \dots, n} a_i \quad f(A)=\sum_{i=1, \dots, n} a_i$$

yoki

$$f(A)=\max_{i=1, \dots, n} a_i \quad f(A)=\max_{i=1, \dots, n} a_i \quad f(A)=\max_{i=1, \dots, n} a_i$$

2.3. Strukturaviy funksiyalar

Massivning geometriyasi va indeks tuzilishiga bog'liq funksiyalar:

- filtrlar,
- konvolyutsiyalar,
- morfologik operatorlar,
- grafiga asoslangan funksiyalar.

2.4. Chiziqli funksiyalar

$$f(A)=\alpha A + B \quad f(A)=\alpha A + B \quad f(A)=\alpha A + B$$

Chiziqlilik matematik tahlil uchun qulaylik yaratadi va ko'pgina algoritmlarda asosiy elementdir.

2.5. Chiziqsiz funksiyalar

Masalan:

- aktivatsiya funksiyalari (ReLU, sigmoid, tanh)
- potensial funksiyalar
- normativ funksiyalar
- logit funksiyalar

3. Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarining analitik xususiyatlari

Matematik tahlil nuqtai nazaridan massiv funksiyalari bir qator chuqur xususiyatlarga ega.

3.1. Uzlüksizlik

Diskret massiv uzluksiz funksiyaning diskret modeli bo'lishi mumkin.

Agar:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

bo'lsa, u holda uzluksizlik to'g'risida gapiriladi.

Massivlar holida uzluksizlik:

- interpolatsiya bilan,
- silliqalashtirish operatorlari bilan,
- limit jarayonlari orqali tahlil qilinadi.

3.2. Differensiallanuvchanlik

Funksiyaning gradienti:

$$\nabla f(A) = (\frac{\partial f}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_N}) \quad \nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_N} \right)$$

Bu xususiyat optimallashtirish, regressiya, neyron tarmoqlarni o'qitish kabi jarayonlar uchun juda muhim.

3.3. Konvekslik

Konveks funksiyalar algoritmik barqarorlikni kafolatlaydi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

3.4. Spektral xususiyatlar

Ko'p o'lchovli massiv funksiyalarida:

- Fourier spektri,
- DCT,
- o'z qiymatlar spektri,
- spektral radius

kabi tushunchalar qo'llanadi.

Bu tasvirni qayta ishlash, signallarni filtrlash, kompressiya, modellashtirishda qo'llanadi.

3.5. Normativ xususiyatlar

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_{i1}|^p + \dots + |a_{in}|^p \right)^{1/p}$$

Normaning mavjudligi algoritm barqarorligi uchun shartdir.

4. Tahlil usullari va ularning qo'llanilishi

4.1. Interpolatsiya va aproksimatsiya

Ko'p o'lchovli massivlar orqali uzluksiz funksiyalarni yaqinlashtirish:

- spline interpolatsiyasi,
- Lagrange polinomialari,
- Chebyshev aproksimatsiyasi.

4.2. Raqamli differensial operatorlar

Gradient, divergentsiya, Laplas operatori ko'p o'lchovli massivlarda quyidagicha diskretlashtiriladi:

$$\Delta u(i,j,k) \approx u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k} + u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k+2} - u_{i,j,k-2} + \dots - 6u_{i,j,k}$$

Bu operatorlar fizika va muhandislik modellarida asosiy rol o'ynaydi.

4.3. Konvolyutsion operatorlar

Ko'p o'lchovli massivlar uchun aniqlanadigan eng muhim funksionallardan biri:

$$f(i,j) = \sum_{m,n} A(i-m,j-n) K(m,n) f(i,j) = \sum_{m,n} A(i-m,j-n) K(m,n) f(i,j)$$

Kompyuter grafikasida:

- silliqlash,
- keskinlashtirish,
- konturlarni aniqlash,
- tasvir segmentatsiyasi

uchun qo'llanadi.

4.4. Statistika tahlil

Ko'p o'lchovli massivlarda statistik funksiyalar:

- matematik kutilma,
- dispersiya,
- kovariatsiya,
- korelyatsiya

ma'lumotlar tahlilida muhim rol o'ynaydi.

5. Amaliy modellar va qo'llanilish sohalari

5.1. Sun'iy intellekt

Tensorlar - massivlarning umumiy shakli:

- konvolyutsion tarmoqlar
- rekurrent tarmoqlar
- attention modellar

- o‘z-o‘zini o‘rgatish algoritmlari
- ko‘p o‘lchovli massiv funksiyalariga asoslanadi.

5.2. Fizik modellashtirish

Massiv orqali quyidagilar modellashtiriladi:

- issiqlik tarqalishi,
- bosim maydoni,
- elektromagnit to‘lqinlar,
- suyuqlik dinamikasi.

5.3. Tasvirlar va 3D grafiklar

3D massivlar quyidagilarni ifodalaydi:

- 3D ob’ektlar,
- havo harorati maydonlari,
- MRI kesitlari,
- kompyuter tomografiyasi tasvirlari.

5.4. Iqtisodiy modellar

Makroiqtisodiy modellar ko‘p o‘lchovli fazoda tuziladi:

$$Y=f(K,L,T,A) \quad Y=f(K,L,T,A) \quad Y=f(K,L,T,A)$$

Bu yerda o‘zgaruvchilar ko‘p o‘lchamli massiv sifatida ko‘riladi.

6. Didaktik yondashuvlar

6.1. Bosqichma-bosqich o‘qitish

1. Vektor va matritsalar
2. Ko‘p o‘lchovli massivlar
3. Elementar funksiyalar
4. Analitik operatorlar
5. Diskret tahlil
6. Algoritmik qo‘llanilish

Bu ketma-ketlik talabalarning mavzuni mukammal o‘zlashtirishini ta’minlaydi.

6.2. Vizual modellashtirish

Quyidagi dasturlar yordam beradi:

- Matlab
- NumPy
- TensorFlow
- Maple
- Mathematica

6.3. Muammoli ta’lim

Talabalar quyidagi vazifalarni mustaqil bajaradi:

- konvolyutsion filtr yaratish,
- massiv interpolatsiyasi,
- 3D ma’lumotlarni vizual tahlil qilish,

- raqamli differensial operatorlarni dasturlash.

6.4. Amaliy loyihalarga asoslangan ta'lim

Talabalardan quyidagilar talab qilinishi mumkin:

- tasvirlarni qayta ishlash dasturi yaratish,
- ko'p o'lchovli optimallashtirish masalasini yechish,
- fizik simulyatsiya modeli yaratish.

XULOSA. Maqolada ko'p o'lchovli massivlarda belgilangan funksiyalarni matematik tahlil nuqtai nazaridan o'rganishning nazariy va amaliy jihatlari keng yoritildi. Massiv funksiyalarining uzluksizlik, differensiallanuvchanlik, konvekslik, spektral va normativ xususiyatlari matematik nuqtai nazardan tushuntirildi. Ularning algoritmlar va modellar yaratishdagi o'rni ilmiy asoslar bilan ko'rsatildi.

Ko'p o'lchovli massivlar ustida qurilgan funksiyalar sun'iy intellekt, tasvirlarni qayta ishlash, fizik jarayonlarni modellashtirish, iqtisodiy prognozlash, statistik tahlil kabi ko'plab yo'nalishlarning asosiy matematik vositasi hisoblanadi.

Didaktik tahlillar ushbu murakkab mavzuni bosqichli, vizual, muammoli va amaliy loyihalarga asoslangan o'qitish uni samarali o'zlashtirish imkonini berishini ko'rsatadi.

Mazkur sohada tadqiqotlar davom ettirilishi matematik tahlil, raqamli hisoblashlar va intellektual tizimlar rivojiga sezilarli hissa qo'shadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang, G. Linear Algebra and Learning from Data. MIT Press, 2019.
2. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
3. Horn, R., Johnson, C. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 2013.
4. Press, W. et al. Numerical Recipes. Cambridge University Press, 2007.
5. Tikhonov, A.N., Samarskiy, A. Matematik modellashtirish asoslari. Moskva, 1985.
6. Kalitkin, N. Chislennyye Metody. Fizmatlit, 2013.
7. Bishop, C. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
8. Golub, G., Van Loan, C. Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, 2012.
9. O'zMU Matematika fakulteti - Raqamli metodlar ma'ruzalar to'plami, 2022.
10. NumPy va TensorFlow rasmiy hujjatlari, 2023.