О суперпозиции одного линейного и одного квадратичного стохастического оператора типа вольтерра

Бобохон Мамуров
b.j.mamurov@buxdu.uz
Шахноза Хикматуллаева
Бухарский государственный университет

Аннотация: Изучается суперпозиция линейных и квадратичных операторов. Находятся неподвижные точки и определяется их тип.

Ключевые слова: линейные операторы, квадратичные стохастические операторы, суперпозиция, неподвижные точки

On the superposition of one linear and one quadratic stochastic operator of volterra type

Bobokhan Mamurov
b.j.mamurov@buxdu.uz
Shakhnoza Khikmatullayeva
Bukhara State University

Abstract: The superposition of linear and quadratic operators is studied. Fixed points are found and the type of these points is determined.

Keywords: linear operators, quadratic stochastic operators, superposition, fixed points

Изучение неподвижных точек произвольных операторов, в том числе квадратичных стохастических операторов, а также их типов и применений, является одной из важных задач [1-18].

С проблемами, связанными с квадратичными стохастическими операторами и их применениями, были проведены важные исследования, и в настоящее время такие исследования также продолжаются.

Определение 1. Если для любых элементов $x, y \in D(A)$ и любых чисел $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{C}$ выполняется условие $\alpha x + \beta y \in D(A)$ и равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y$$

то оператор A называется линейным оператором.

Определение 2. Пусть A и B - два линейных оператора, причём A действует из пространства E в пространство E_1, а B - из пространства E_1 в пространство E_2.

Оператор, который каждому элементу $x \in E$ ставит в соответствие элемент $z = B(Ax)$ в пространстве E_2 , называется произведением (или суперпозицией) операторов A и B.

Определение 3. Квадратичным стохастическим оператором называется оператор

$$V: S^{n-1} \to S^{n-1}$$

$$V: x_k' = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j \,, k = \overline{1, n} \ (1)$$

где $P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$.

Определение 4. Точка $x^* \in S^{m-1}$ назавем неподвижными точкам для оператора V, если $V(x^*) = x^*$ и множество всех неподвижных точек обозначается Fix(V).

Определение 5. Если J якобиан оператора V в неподвижной точке λ не имеет собственных значений на единичной окружности, то такая точка λ называется гиперболической неподвижной точкой.

Типы гиперболических неподвижных точек:

Если для якобиана $J(\lambda)$ матрицы все собственные значения по модулю меньше единицы, то неподвижная точка λ называется притягивающей.

Если все собственные значения по модулю больше единицы - то отталкивающей, а во всех остальных случаях - седловой точкой [18–27].

В данной статье мы рассмотрим оператор B=A·V (суперпозиции оператора A и V), где оператор A и V определяется матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \ 0 \ 0 \\ \beta \ \gamma \ 0 \\ 1-\alpha-\beta \ 1-\gamma \ 1 \end{pmatrix} и$$

$$V_{a,b,c} = \begin{cases} x_1^* = x_1(1 + ax_2 - bx_3), \\ x_2^* = x_2(1 - ax_1 + cx_3), \\ x_3^* = x_3(1 + bx_1 - cx_2), \end{cases}$$

где $a,c \in [-1,0]$ и $b, \alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta \in (0,1)$.

Через $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{mi}) \in S^{m-1}$, $i = 1,2,\dots,m$, обозначим вершины симплекса, где $\delta_{ij} -$ символ дельта Кронекера.

Теорема 1. Для стохастического оператора B справедливы следующие: $i)$ $Fix(B) = e_3 = (0,0,1)$;

ii) $e_3 = (0,0,1)$ является притягивающая.

Доказательство.

$$B = A\left(V_{a,b,c}(x)\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 1-\alpha-\beta & 1-\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1 + ax_2 - bx_3) \\ x_2(1 - ax_1 + cx_3) \\ x_3(1 + bx_1 - cx_2) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha x_1(1+ax_2-bx_3) \\ \beta x_1(1+ax_2-bx_3)+\gamma x_2(1-ax_1+cx_3) \\ (1-\alpha-\beta)x_1(1+ax_2-bx_3)+(1-\gamma)x_2(1-ax_1+cx_3)+x_3(1+bx_1-cx_2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Найдём неподвижные точки оператора B $(Bx = x)$.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1(1+ax_2-bx_3) \\ x_2 = \beta x_1(1+ax_2-bx_3)+\gamma x_2(1-ax_1+cx_3) \\ x_3 = (1-\alpha-\beta)x_1(1+ax_2-bx_3)+(1-\gamma)x_2(1-ax_1+cx_3)+x_3(1+bx_1-cx_2) \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение системы (2) решаем относительно x_1.

$$\big(1-\alpha(1+ax_2-bx_3)\big)x_1 = 0 \;=>\; x_1 = 0,$$

$$\alpha(1+ax_2-bx_3) = 1 => (1+ax_2-bx_3) = \frac{1}{\alpha}.$$

Если $\alpha = 1$, то $ax_2 = bx_3$. Поскольку $a < 0\,, b > 0$ то такой вариант не можеть быть .

Значить, $0 < \alpha < 1 \;=> ax_2 + bx_3 = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0\; ax_2 > bx_3$,так как

$a < 0, b > 0$ то этот вариант тоже не можеть быть.

От второго уравнения (2) уравнение системы найдем x_2.

$$x_2 = \beta x_1 + \alpha\beta x_1x_2 - \beta b x_1x_3 + \gamma x_2 - \gamma a x_1x_2 + \gamma c x_2x_3$$

$$(1-\alpha\beta x_1 - \gamma + \gamma a x_1 - \gamma c x_3)x_2 = \beta x_1 - \beta b x_1x_3 = \beta x_1(1-bx_3)$$

$$x_2 = \frac{\beta x_1(1-bx_3)}{1-a\beta x_1-\gamma+\gamma a x_1-\gamma c x_3},$$

$$x_1^* = 0\,, x_2^* = 0, x_3^* = 1 - x_1^* - x_2^* = 1$$

Это показиваеть, что $\mathbf{e_3}$ =(0,0,1) является неподвижная точка для оператора B.

Теперь определим тип неподвижной точки $\mathbf{e_3}$ =(0,0,1) для оператора B. Из того, что 1 и 2 уравнении системы (2) следует что: $x_3^* = 1 - x_1^* - x_2^*$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1\big(1+ax_2-b(1-x_1-x_2)\big) \\ x_2 = \beta x_1\big(1+ax_2-b(1-x_1-x_2)\big)+\gamma x_2\big(1-ax_1+c(1-x_1-x_2)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1(1+\alpha x_2-b+bx_1+bx_2) = \alpha x_1+\alpha\alpha x_1x_2-b\alpha x_1+\alpha b{x_1}^2+\alpha b x_1x_2 \\ x_2 = \beta x_1+\alpha\beta x_1x_2+\beta b x_1+\beta b{x_1}^2+\beta b x_1x_2+\gamma x_2-\gamma\alpha x_1x_2+\gamma c x_2-\gamma c x_1x_2-\gamma c{x_2}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \alpha(1-b)x_1+\alpha(\alpha+b)x_1x_2+\alpha b{x_1}^2 \\ x_2' = \beta(1-b)x_1+(\beta\alpha+\beta b-\gamma\alpha-\gamma c)x_1x_2+\beta b{x_1}^2+\gamma(1+c)x_2-\gamma c{x_2}^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \alpha(1-b)+\alpha(\alpha+b)x_2+2\alpha b x_1;$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = \alpha(\alpha+b)x_1;$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = \beta(1-b)+(\beta\alpha+\beta b-\gamma\alpha-\gamma c)x_2+2\beta b x_1$$

$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = (\beta\alpha+\beta b-\gamma\alpha-\gamma c)x_1+\gamma(1+c)-2\gamma c x_2$$

$$\left.\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{e_3}=(0,0,1)} = \alpha(1-b);\ \left.\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{e_3}=(0,0,1)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{e_3}=(0,0,1)} = \beta(1-b);\ \left.\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{e_3}=(0,0,1)} = \gamma(1+c);$$

$$I = \begin{pmatrix} \alpha(1-b) & 0 \\ \beta(1-b) & \gamma(1+c) \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha(1-b)-\lambda & 0 \\ \beta(1-b) & \gamma(1+c)-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\alpha(1-b)-\lambda)(\gamma(1+c)-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = \alpha(1-b), \lambda_2 = \gamma(1+c)$$

Так как $b > 0, c < 0$, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \gamma < 1$,поэтому $\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$.

Это показываеть, что неподвижная точка $\mathbf{e_3} = (0,0,1)$ – пртягягивающая.

Теорема доказано.

Использованная литература

1. Ганиходжаев Р.Н. Математический сборник. 183(1992), №8. 119-140 стр.

2. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes. Journal of Physics: Conferense Series. 697 (2016), 012017.

3. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type (σ/μ). arXiv: 2004.01702 . Pp. 1-14. math.D.S

4. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type (/). Markov Processes Relat.Fields 26, 915-933 (2020).

5. Мамуров Б.Ж. О кубических стохастических процессов. Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С.72.

6. Мамуров Б.Ж. О решения эволюционных уравнений для кубических стохастических процессов. Сборник материалов международной конференции. КРОМШ-2019. 305-307 стр.

7. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S2. “Scientific Progress”. Int.sientoific-Pract.conf. Tashkent. 2021, March 15. Стр.121-122.

8. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite enotypes. Scientific reports of Bukhara State University. 1:5,2018. Pp. 18-21.

9. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора. Наука, техника и образование. 2021. №2 (77). Часть 2.Стр.10-15.

10. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов. Bulletin of Institute of Mathematics 2019. №6, pp.35-39.

11. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S2. Тезисы рес.науч.конф.”Сарымсаковские чтения”, Тошкент-2021.стр.100-101.

12. Mamurov B.Zh. The convex combinations of quadratic operators on S2 Abstracts of theVII inter.conf.Modern prob.of applied mat.inf.tex.Al Khwar.21.pp,87.

13. Mamurov B.J.,Bazorova D. Biologiya va tibbiyotdagi ba’zi matematik modellar haqida. Science and edication. Volume 1, issuse 8 UIF-2022:8.2. 418-426.

14. Mamurov B.J.,Bazorova D. Kvadratik stoxostik operatorlarga olib kelinadigan ba’zi modellar haqida. Science and edication. Volume 4, iss use 3.March 2023. 41-48.

15. Jamilov U.U., Mamurov B.J. Asymptotical behavior of trajectories of non-Volterra quadratic stochastic operators. Lobachevskii Journal of Mathematics (JM).2022,Vol 43,№11,pp 3174-3182.

16. Mamurov B.J. A conver combination of two quadratic stoxastic operators acting in the 2D simplex. Изв. вузов Математика . 2023(7), pp 66-70.

17. Мамуров Б.Д. Сходимость траекторий невольтерровского квадрадичного стохастичного оператора. Изв. вузов Математика. 2024(10), 45-50 стр.

18. Superposition of linear and quadratic operators arising in statistical mechanics. Proc. of SPIE Vol. 13803, 138030M 2025 SPIE.

19. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Kombinatorika haqidagi dastlabki ko‘nikmalarni shakllantirish. “Science and education” scientific jornal,oktober 2021/volume 2, Issue 10,pp 497-505.

20. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.Kombinatorik munosabatlar va ularning geometrik isbotlari haqida. Pedagogik mahorat.2021,oktyabr. Maxsus son. 20-23-bet. ISSN 2181-0842 / Impact Factor 4.526 16 "Science and Education" Scientific Journal / www.openscience.uz February 2025 / Volume 6 Issue 2

21. Мамуров Б.Ж., Абдуллаев Ж. Регрессионный анализ как средство изучения зависимости между переменными // European science. 2021.№ 2 (58).С. 7-9.

22. Мамуров Б.Ж, Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования, № 18 (96).Часть 2. Москва, 2020,-37-39 стр

23. Mamurov B, Amrilloyeva K. Tasodifiy hodisa tushunchasi haqida. SCIENTIFIC PROGRESS. №2. 2021, c.463-467

24. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли элементов истории математики в преподавании математики. Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom 27-29 May, 2020. C. 701-702.

25. Мамуров Б.Ж. Неравномерной оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин . Молодой учёный. 197:11 (2018). С. 3-5.

26. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин. Academy. 55:4 (2020). Pp. 13-14