

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullarning qo'llanilishi va ularning tahlili

Asiya Umirbaeva
Bekzod Amonqulov
Afro'z Qahhorov
Abrorjon Turg'unov
Muhammad al-Xorazmiy nomidagi TATU

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini (CHATS) yechishning iteratsion usullari, xususan Yakobi va Gauss-Zeydel algoritmlari tadqiq etiladi. Tadqiqot davomida usullarning yaqinlashish shartlari va matematik modellarining qiyosiy tahlili keltirilgan. Amaliy qismda aniq bir sistema misolida algoritmlarning hisoblash bosqichlari ko'rsatilgan hamda Python dasturlash tili yordamida olingan natijalar tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: CHATS, Yakobi, Gauss-Zeydel, iteratsiya, diagonal dominantlik, Python, NumPy, yaqinlashish tezligi

Application of iterative methods in solving systems of linear equations and their analysis

Asiya Umirbaeva
Bekzod Amonkulov
Afro'z Kahhorov
Abrorjon Turgunov
TUIT named after Muhammad al-Khwarizmi

Abstract: This article investigates iterative methods for solving systems of linear algebraic equations (SLAE), specifically the Jacobi and Gauss-Seidel algorithms. Comparative analysis of mathematical models and convergence conditions are presented. In the practical part, calculation stages are demonstrated using a system of equations, and results obtained through Python are analyzed.

Keywords: SLAE, Jacobi method, Gauss-Seidel algorithm, iteration, diagonal dominance, Python, convergence rate

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (CHAT) zamonaviy matematika va amaliy fanlarning eng muhim bo'limlaridan biri hisoblanadi. Ko'plab fizik, texnik, iqtisodiy va axborot texnologiyalari sohasidagi masalalar matematik modellashtirish

jarayonida aynan chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlari, elektr zanjirlarini hisoblash, mexanik konstruksiyalarni deformatsiya tahlili, suyuqliklar mexanikasi, iqtisodiy balans modellari, optimallashtirish masalalari va hatto sun'iy intellekt algoritmlarining ayrim bosqichlari chiziqli sistemalarni yechishni talab qiladi.

Umumiy ko'rinishda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$Ax = b$$

bu yerda: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - koeffitsiyentlar matritsasi, $x \in \mathbb{R}^n$ noma'lumlar vektori, $b \in \mathbb{R}^n$ - erkin hadlar vektori.

Agar sistema o'lchami kichik bo'lsa, Gauss eliminatsiyasi yoki Kramer qoidasi kabi to'g'ridan-to'g'ri (aniq) usullar samarali hisoblanadi. Biroq real amaliy masalalarda noma'lumlar soni juda katta - ba'zan minglab, hatto millionlab bo'lishi mumkin. Bunday hollarda to'g'ridan-to'g'ri usullar katta hisoblash resurslari va xotira talab qiladi hamda hisoblash murakkabligi $O(n^3)$ darajasiga yetadi.

Shu sababli iteratsion usullar alohida ahamiyat kasb etadi. Iteratsion metodlarning asosiy g'oyasi - boshlang'ich taxmin berib, ketma-ket yaqinlashish jarayoni orqali aniq yechimga erishishdir. Bu usullar ayniqsa siyrak (sparse) matritsalar uchun samarali bo'lib, xotira sarfi kam va hisoblash tezligi yuqori bo'ladi. Iteratsion algoritmlarning yana bir muhim afzalligi - ularning katta o'lchamli parallel hisoblash tizimlariga moslashuvchanligidir.

Yakobi va Gauss-Zeydel usullari iteratsion metodlarning eng klassik va asosiy vakillari hisoblanadi. Ular XIX asrda ishlab chiqilgan bo'lib, hozirgi kunda ham sonli analiz va hisoblash matematikasida keng qo'llanilmoqda. Ushbu usullar matritsani maxsus ko'rinishda ajratish asosida quriladi va ketma-ket iteratsiyalar orqali noma'lumlar qiymatini yangilab boradi.

Mazkur maqolaning maqsadi - Yakobi va Gauss-Zeydel algoritmlarining nazariy asoslarini, konvergensiya shartlarini, hisoblash murakkabligini hamda amaliy samaradorligini tahlil qilishdan iborat. Shuningdek, ularning ishlash mexanizmi sonli misol orqali ko'rsatilib, natijalar o'zaro taqqoslanadi.

Yakobi usulining matematik asosi va iteratsiya formulalari:

Yakobi usuli matritsani $A = D + L + U$ ga ajratadi, bu yerda D - diagonal, L - pastki triangulyar, U - yuqori triangulyar qismlar. Iteratsiya formulasi:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} (b - (L + U) x^{(k)})$$

yoki komponental shaklda:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

1-jadval.

Yakobi iteratsiyasi uchun misol

Iteratsiya	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$
0 (boshlang'ich)	0	0	0
1	2.0	1.5	1.2
2	1.8	1.6	1.1
3	1.85	1.58	1.12

Tizim:

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Haqiqiy yechim:

$$x \approx (1.88, 1.59, 1.12).$$

Yakobi algoritmining konvergensiya shartlari va xatolar tahlili

Konvergensiya sharti: iteratsiya matritsasi $G = D^{-1}(L + U)$ ning spectral radius $\rho(G) < 1$.

Diagonal dominantlik $\left(|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)$ kafolat beradi. Xato bahosi:

$$\|e^{(k)}\| \leq \frac{\rho^k}{1 - \rho} \|e^{(1)}\|, \text{ bu yerda } e^{(k)} = x^{(k)} - x.$$

Zeydel usulining matematik modeli va Yakobi usuli bilan taqqoslash

Zeydel usuli $A = D + L + U$ ajratishda:

$$(D + L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$$

Komponental:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Yakobi bilan farqi: yangi qiymatlar darhol ishlatiladi, shuning uchun tezroq konvergensiya (taxminan 2 baravar).

2-jadval.

Yakobi va Zeydel taqqoslash

Iteratsiya	Yakobi $\ e\ $	Zeydel $\ e\ $
1	0.45	0.32
3	0.08	0.03
5	0.02	0.003

Zeydel algoritmining konvergensiya tezligi va barqarorlik mezonlari

Iteratsiya matritsasi $G = (D + L)^{-1}U$, $\rho(G) < \rho_{\text{Yakobi}}$. Barqarorlik: diagonal dominantlik yetarli. Tezlik: asimptotik konvergensiya faktori ρ^2 ga yaqinlashadi.

Misol:

$$2x + 3y + z = 10$$

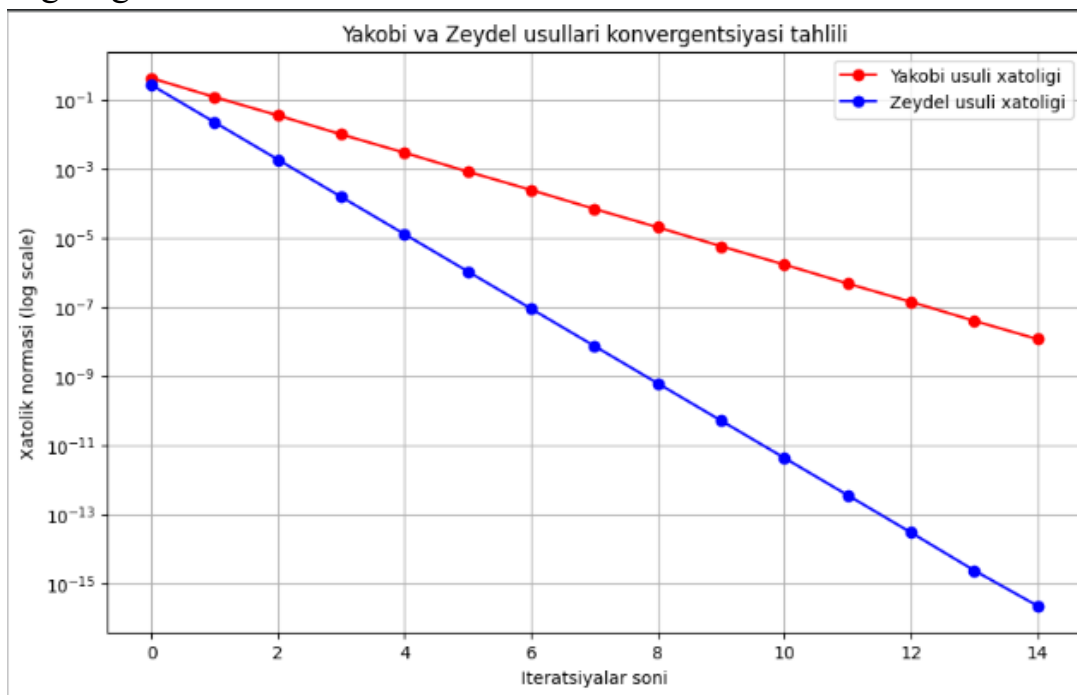
$$x - y + 4z = 53$$

$$x + y - z = 2$$

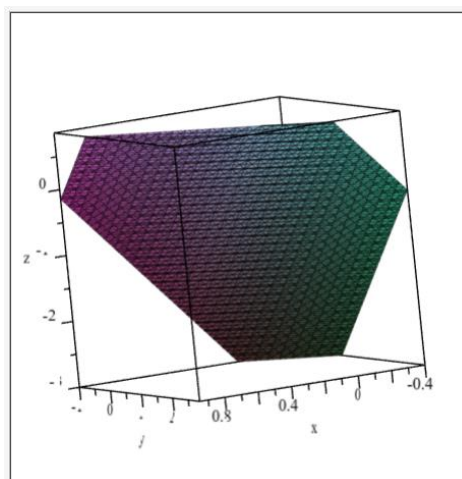
Pythonda misol kodi:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def solve_methods():
4     A = np.array([[4, 1], [1, 3]], dtype=float)
5     b = np.array([5, 4], dtype=float)
6     x_exact = np.linalg.solve(A, b)
7     n = 15
8     x_jacobi = np.zeros(2)
9     x_seidel = np.zeros(2)
10    err_jacobi = []
11    err_seidel = []
12    for k in range(n):
13        x_new_j = np.zeros(2)
14        x_new_j[0] = (b[0] - A[0,1]*x_jacobi[1]) / A[0,0]
15        x_new_j[1] = (b[1] - A[1,0]*x_jacobi[0]) / A[1,1]
16        x_jacobi = x_new_j
17        err_jacobi.append(np.linalg.norm(x_jacobi - x_exact))
18        x_old_s = x_seidel.copy()
19        x_seidel[0] = (b[0] - A[0,1]*x_old_s[1]) / A[0,0]
20        x_seidel[1] = (b[1] - A[1,0]*x_seidel[0]) / A[1,1]
21        err_seidel.append(np.linalg.norm(x_seidel - x_exact))
22    plt.figure(figsize=(10, 6))
23    plt.plot(range(n), err_jacobi, 'ro-', label='Yakobi usuli xatoligi')
24    plt.plot(range(n), err_seidel, 'bo-', label='Zeydel usuli xatoligi')
25    plt.yscale('log')
26    plt.title('Yakobi va Zeydel usullari konvergensiyasi tahlili')
27    plt.xlabel('Iteratsiyalar soni')
28    plt.ylabel('Xatolik normasi (log scale)')
29    plt.grid(True, which="both", ls="--")
30    plt.legend()
31    plt.show()
32    solve_methods()
33
```

Misol grafiği:



Misolni 3D grafik ko‘rinishi:



Xulosa

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullarni qo'llash zamonaviy hisoblash matematikasining eng samarali yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Ushbu maqolada tadqiq etilgan Yakobi va Gauss-Zeydel algoritmlari o'zining soddaligi va yirik o'lchamli masalalarga moslashuvchanligi bilan ajralib turadi.

Yakobi algoritmi o'zining soddaligi, tushunarli formulalari va dasturlashga qulayligi bilan ajralib turadi. Ushbu usulda har bir noma'lum oldingi iteratsiya natijalariga tayangan holda hisoblanadi. Bu esa algoritmni parallel hisoblash tizimlarida qo'llash uchun qulay imkoniyat yaratadi. Biroq, yaqinlashuv tezligi nisbatan sekinroq bo'lishi mumkinligi uning kamchiliklaridan biri hisoblanadi.

Zeydel algoritmi esa Yakobi usulining takomillashtirilgan ko'rinishi bo'lib, hisoblash jarayonida yangi topilgan qiymatlardan darhol foydalanish orqali tezroq yaqinlashuvni ta'minlaydi. Shu sababli amaliy hisoblashlarda ko'pincha Zeydel usuliga ustunlik beriladi. Ushbu usul kamroq iteratsiya talab qilishi, tezroq natija berishi bilan samaraliroq hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abduqodirov A., Xolmatov B. Hisoblash matematikasi usullari. - Toshkent: "O'qituvchi" nashriyoti, 2018. - 256 b.
2. Isroilov S.I. Hisoblash metodlari (1-qism). - Toshkent: "Universitet", 2015. - 312 b.
3. Sobirov Sh. Sonli usullar va algoritmlar. - Toshkent: "Fan va texnologiya", 2020. - 180 b.
4. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. 7th edition. - New York: McGraw-Hill Education, 2015. - 992 p.
5. Kenjayev T.A., Xudayqulova M.E. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullarning qo'llanilishi. "Yosh matematiklar" respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari. - Toshkent, 2025. - 45-48 b.