

Gauss va LU-parchalanish usullari orqali CHATSni yechish

Asiya Umirbaeva

Afroʻz Qahhorov

Bekzod Amonkulov

Abrorjon Turgʻunov

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi TATU

Annotatsiya: Mazkur maqolada chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning samarali sonli usullari - Gauss va LU parchalanish usullari tahlil qilinadi. Gauss usulining bosqichma-bosqich uchburchak koʻrinishga keltirish jarayoni hamda teskari qoʻyish usuli asosida yechim topish mexanizmi yoritiladi. Shuningdek, LU parchalanish usulining mohiyati, yaʼni koeffitsiyentlar matritsasini pastki va yuqori uchburchak matritsalar koʻpaytmasi koʻrinishida ajratish jarayoni bayon etiladi. Har ikki usulning afzalliklari, qoʻllanish sohalari va amaliy ahamiyati koʻrsatib beriladi.

Kalit soʻzlar: chiziqli tenglamalar sistemasi, Gauss usuli, LU parchalanish, uchburchak matritsa, Doolittle usuli, sonli usullar, algebraik modellashtirish

Solving the SLAE using Gaussian and LU-decomposition methods

Asiya Umirbaeva

Afroʻz Qahhorov

Bekzod Amonkulov

Abrorjon Turgunov

TUIT named after Muhammad al-Khwarizmi

Abstract: This article analyzes effective numerical methods for solving a system of linear algebraic equations - Gaussian and LU decomposition methods. The process of step-by-step triangularization of the Gaussian method and the mechanism for finding a solution based on the inverse method are discussed. The essence of the LU decomposition method, that is, the process of separating the coefficient matrix into the form of a product of lower and upper triangular matrices, is also described. The advantages, areas of application and practical significance of both methods are shown.

Keywords: system of linear equations, Gaussian method, LU decomposition, triangular matrix, Doolittle method, numerical methods, algebraic modeling

[illegible]

Ushbu amallarni $n - 1$ marotaba bajarib, quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

[illegible]

Shu bilan yechimni birinchi bosqichi yakunlandi. 2-qism uchburchak ko‘rinishidagi (3) sistemani yechishdan iborat. Oxirgi tenglamadan x_n topiladi. Undan oldingi tenglamaga x_n ning topilgan qiymati qo‘yilib, x_{n-1} topiladi. Shu mulohazani davom ettirib, x_1 topiladi.

Ushbu

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases} \quad (4)$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish: Usulning birinchi qadami (4) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan x noma'lum chiqarishdan iborat. Dastlab, birinchi tenglamani (-2) ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamani ikkinchi tenglamaga qo'shamiz, so'ngra birinchi tenglamani (-3) ga ko'paytirib,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 7y - 10z = 8 \\ 4y - 14z = -12 \end{cases} \quad (5)$$

uchinchi tenglamaga qo'shamiz. Bu ishlar natijasida berilgan (4) sistemaga teng kuchli ushbu sistemani olamiz:

Bu sistemaning uchinchi tenglamasini 2 ga qisqartirib,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 7y - 10z = 8 \\ 2y - 7z = -6 \end{cases} \quad (6)$$

hosil qilamiz. Ikkinchi qism y noma'lumni (3) ning 3-tenglamasidan olinadi. Buning uchun shu sistemaning ikkinchi tenglamasini - $2/7$ ga ko'paytiramiz va uchinchi tenglamaga qo'shamiz. Buning natijasida ushbu teng kuchli sistemani olamiz:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 7y - 10z = 8 \\ -\frac{29}{7}z = -\frac{58}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Bu sistemaning uchinchi tenglamasini $-29/7$ ga bo'lib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 7y - 10z = 8 \\ z = 2 \end{cases} \quad (8)$$

(4) tenglamalar sistemasi uchburchakli deb ataladigan (8) shaklni oldi. Uchinchi tenglamadan $z=2$ ni olamiz, bu qiymatni (8) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, $y=4$ ni olamiz. $z=2$ va $y=4$ qiymatlarni (8) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $x=8$ ni olamiz: $x=8, y=4, z=2$ yechim olindi.

LU parchalanish usuli - bu chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usuli bo'lib, unda koeffitsiyentlar matritsasi A pastki uchburchak L va yuqori uchburchak U matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida $A=LU$ tarzda ajratiladi va sistema ketma-ket ikki oddiy sistema $LY=B$ hamda $UX=Y$ ni yechish orqali topiladi.

LU parchalanish usulining mohiyati LU parchalanish - bu matritsani ikki uchburchak matritsaga ajratish usuli: $A = LU$

Bu yerda: L (Lower triangular) - pastki uchburchak matritsa diagonal elementlari odatda 1 ga teng. U (Upper triangular) - yuqori uchburchak matritsa

Bu ajratish Gauss usulining matritsali ko'rinishi hisoblanadi.

Agar sistema: $AX=B$ va $A=LU$ bo'lsa, u holda: $LUX=B$.

Bu tenglama ikki sodda sistemaga ajraladi:

1. $LY=B$ - oldinga qo'yib hisoblash.

2. $UX=Y$ - orqaga qo'yib hisoblash.

LU parchalanish algoritmi (Doolittle usuli).

Doolittle usulida: L ning diagonali 1 ga teng olinadi.

Formulalar:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad i > j \quad (9)$$

Dastur kodi.

```

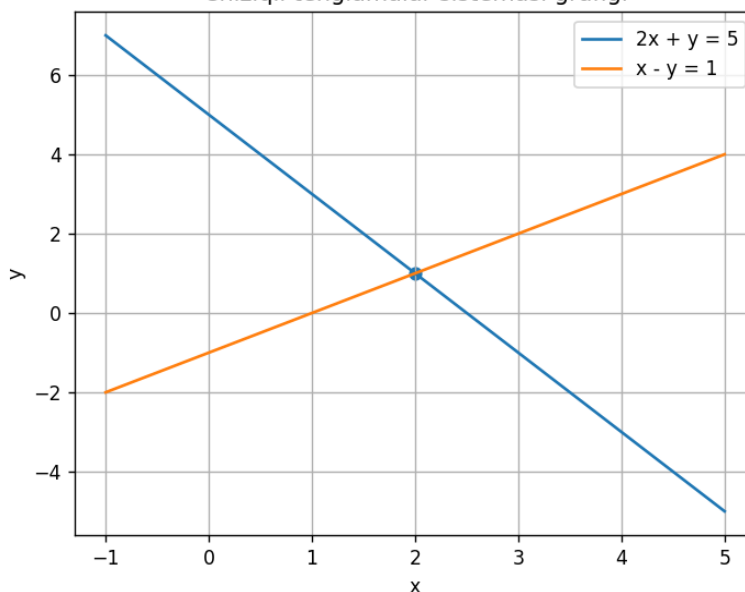
Gauss eliminatsiya dasturi

1 def gauss_elimination(A,B):
2     n=len(B)
3     for i in range(n):
4         if A[i][i]==0:
5             for k in range(i+1,n):
6                 if A[k][i]!=0:
7                     A[i],A[k]=A[k],A[i]
8                     B[i],B[k]=B[k],B[i]
9                     break
10            for j in range(i+1,n):
11                factor=A[j][i]/A[i][i]
12                for k in range(i,n):
13                    A[j][k]-=factor*A[i][k]
14                    B[j]-=factor*B[i]
15            X=[0]*n
16            for i in range(n-1,-1,-1):
17                s=sum(A[i][j]*X[j] for j in range(i+1,n))
18                X[i]=(B[i]-s)/A[i][i]
19            return X
20 A=[[2,1],[1,-1]]
21 B=[5,1]
22 yechim=gauss_elimination(A,B)
23 print("Yechim:",yechim)[1], acc.concat([res[0]]) : acc
24 }
25 return go(f, seed, [])
26 }

Natija:

1 Yechim: [2.0, 1.0]
    
```

Chiziqli tenglamalar sistemasi grafigi



Grafikda $2x + y = 5$ va $x - y = 1$ tenglamalarining to'g'ri chiziqlari tasvirlangan. Ular (2, 1) nuqtada kesishadi. Shu nuqta sistemaning yagona yechimi hisoblanadi.

Birinchi tenglama kamayuvchi to'g'ri chiziq bo'lib, manfiy qiyalikka ega - ya'ni x ortishi bilan y kamayadi. Ikkinchi tenglama esa o'suvchi to'g'ri chiziq bo'lib, musbat qiyalikka ega - x ortishi bilan y ham ortadi. Umuman olganda, grafik chiziqli sistemaning geometrik ma'nosini yaqqol namoyon etadi: har bir tenglama - bu tekislikdagi to'g'ri chiziq, ularning kesishish nuqtasi esa sistemaning yechimidir.

Xulosa. Gauss usuli va LU parchalanish usuli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga xizmat qiluvchi samarali algebraik usullar bo'lib, ularning ikkalasi ham tenglamalar sistemasini bosqichma-bosqich soddalashtirish g'oyasiga asoslanadi. Gauss usulida sistema elementar satr o'zgartirishlari yordamida uchburchak ko'rinishga keltiriladi va noma'lumlar orqaga qo'yib hisoblash orqali topiladi. Bu usul oddiy, tushunarli va kichik o'lchamli sistemalar uchun qulay hisoblanadi. LU parchalanish usuli esa Gauss usulining matritsali umumlashtirilgan ko'rinishi bo'lib, koeffitsiyentlar matritsasini oldindan pastki va yuqori uchburchak matritsalariga ajratish orqali yechimni topadi. Bu usul, ayniqsa, bir xil koeffitsiyentlar matritsasi bilan bir nechta ozod hadlar berilgan hollarda, hisoblash vaqtini sezilarli darajada tejaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. - 4th ed. - Belmont: Brooks/Cole, 2006. - 576 p.
2. Demidovich B. P., Maron I. A. Computational Mathematics. - Moscow: Mir Publishers, 1973. - 716 p.
3. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. - 2nd ed. - Berlin: Springer, 2007. - 655 p.
4. Axmedov A., Jo'rayev T. Oliy matematika. Chiziqli algebra va analitik geometriya. - Toshkent: O'qituvchi, 2015. - 320 b.
5. Isroilov M. I. Hisoblash usullari. - Toshkent: Fan va texnologiya, 2018. - 280 b.