

Kubik splaynlar yordamida silliq egri chiziqlar hosil qilish

Asiya Umirbaeva

Bekzod Amonqulov

Afroʻz Qahhorov

Abrorjon Turgʻunov

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi TATU

Annotatsiya: Maqolada diskret nuqtalar toʻplami orqali silliq egri chiziqlarni hosil qilishning nazariy va amaliy jihatlari, xususan, kubik splaynlar usuli tadqiq etiladi. Kompyuter grafikasi, muhandislik dizayni va animatsiya sohalarida yuqori darajali polinomial interpolatsiyaning Runge hodisasi kabi salbiy taʼsirlarini bartaraf etishda kubik splaynlarning oʻrni va ahamiyati atroflicha tahlil qilingan. Tadqiqot doirasida splaynlarning matematik asosi - tugun nuqtalarida funksiya qiymati, birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar uzluksizligini taʼminlovchi shartlar tizimi keltirilgan. Shuningdek, "tabiiy" kubik splaynlar misolida chiziqli tenglamalar tizimini yechish algoritmi tushuntirilgan hamda ushbu nazariy yondashuvning amaliyotdagi samaradorligi Python dasturlash muhitida grafik modellash orqali asoslab berilgan. Olingan natijalar kubik splaynlarning murakkab trayektoriyalarni loyihalash va vizual estetikani saqlashdagi yuqori aniqlik hamda moslashuvchanlik xususiyatlarini tasdiqlaydi.

Kalit soʻzlar: kubik splayn, interpolatsiya, Runge hodisasi, silliq egri chiziqlar, tugun nuqtalari, ikkinchi tartibli hosila, matematik modellash

Creating smooth curves using cubic splines

Asiya Umirbaeva

Bekzod Amonkulov

Afroz Qahhorov

Abrorjon Turgunov

Muhammad al-Khwarizmi Technical University

Abstract: The article studies the theoretical and practical aspects of creating smooth curves using a set of discrete points, in particular, the cubic spline method. The role and importance of cubic splines in eliminating the negative effects of high-order polynomial interpolation, such as the Runge phenomenon, in the fields of computer graphics, engineering design, and animation are analyzed in detail. The mathematical basis of splines is presented as a system of conditions that ensure the continuity of the

function value at the nodal points, the first and second order derivatives. Also, the algorithm for solving a system of linear equations using the example of "natural" cubic splines is explained, and the effectiveness of this theoretical approach in practice is substantiated through graphical modeling in the Python programming environment. The results obtained confirm the high accuracy and flexibility of cubic splines in designing complex trajectories and maintaining visual aesthetics.

Keywords: cubic spline, interpolation, Runge phenomenon, smooth curves, nodal points, second-order derivative, mathematical modeling

Kirish. Tasviriyy geometriya, kompyuter grafikasi, muhandislik dizayni, animatsiya va ilmiy hisob-kitoblar kabi ko'plab zamonaviy sohalarda berilgan diskret nuqtalar to'plami orqali o'tuvchi yoki ularga yaqinlashuvchi silliq egri chiziqlar yaratish g'oyat muhim ahamiyatga ega. Ushbu egri chiziqlar uch o'lchamli modellashtirishda ob'ekt shakllarini aniqlashda, animatsiya jarayonlarida harakat traektoriyalarini silliqlashda, eksperimental ma'lumotlarni interpolatsiya qilishda va murakkab dizayn loyihalarida keng qo'llaniladi. An'anaviy polinomial interpolatsiya usullari, ayniqsa, ko'p sonli tugunlar bilan ishlatilganda, yuqori darajali poligonlarda ishlatilganda Runge hodisasi deb nomlanuvchi keraksiz va kutilmagan osillatsiyalarni keltirib chiqarishi mumkin. Bu hodisa egri chiziqning vizual silliqligini jiddiy buzadi va uning xulq-atvorini oldindan aytib bo'lmaydigan darajaga olib keladi, bu esa yuqori aniqlik va vizual estetika talab qilinadigan ilovalarda jiddiy muammo tug'diradi. Bu esa dizayn va tahlil jarayonlarida noxush oqibatlarga olib kelishi mumkin.

Splaynlar konsepsiyasi va turlari. Splayn - bu har bir interpolatsiya intervalida alohida polinomial funksiya bo'lib, ular chegara nuqtalarida (odatda "tugunlar" yoki "tayanch nuqtalar" deb ataladi) bir-biriga silliq tarzda ulanadi. Splaynlarning asosiy xususiyati shundaki, ular butun egri chiziq bo'ylab bitta yuqori darajali polinomial funksiya ishlatish o'rniga, kichik, boshqariladigan segmentlarda past darajali polinomial funksiyalarni qo'llaydi. Bu usul yuqori darajali interpolatsiya bilan bog'liq bo'lgan Runge hodisasi kabi muammolarni oldini oladi va egri chiziqning mahalliy xususiyatlarini yuqori aniqlikda nazorat qilish imkonini beradi, bu esa dizaynerlarga va muhandislarga yanada aniqroq va moslashuvchan modellarni yaratish imkoniyatini beradi. Splaynlar o'z darajasi bo'yicha farqlanadi:

- 1-darajali (chiziqli splaynlar)
- 2-darajali (kvadratik splaynlar)
- 3-darajali (kubik splaynlar) va undan yuqori darajali splaynlar.

Har bir tur o'zining silliqlik darajasi, egri chiziqni modellashtirish qobiliyati va hisoblash murakkabligi bilan ajralib turadi, ularni turli ilovalar uchun mos keladigan yechimga aylantiradi.

Chiziqli splaynlar har bir tugun orasini to'g'ri chiziq bilan bog'laydi, bu esa egri chiziqning "burchakli" yoki "singan" ko'rinishiga olib keladi va faqat funksiyaning o'zi uzluksizligini ta'minlaydi (nol tartibli hosila uzluksiz). Bu esa silliqlik talab qilinadigan ilovalar uchun yetarli emas. Kvadratik splaynlar esa biroz silliqroq bo'ladi, chunki ular funksiya qiymati bilan birga birinchi tartibli hosila uzluksizligini ham ta'minlaydi. Biroq, ko'pgina amaliy ilovalar uchun eng vizual jihatdan yoqimli, estetik va matematik jihatdan silliq egri chiziqlar hosil qilish uchun kubik splaynlar eng afzal ko'riladi va eng keng qo'llaniladi. Kubik splaynlar har bir tugunda funksiya qiymati, birinchi hosila va ikkinchi hosila uzluksizligini ta'minlaydi. Bu esa, egri chiziqning "ko'rindigan" silliqlikini va egilish xususiyatini kafolatlaydi, ularni avtomobil kuzovlari dizayni, samolyot qanotlari aerodinamik shakllari, tibbiyotdagi tasvirlarni qayta ishlash va animatsiya kabi muhim sohalarda juda qimmatli qiladi.

Kubik splaynlarning matematik asoslari.

Kubik splayn - bu berilgan $n+1$ ta tayanch nuqta $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ orqali o'tuvchi va har bir $[x_i, x_{i+1}]$ intervalda uchinchi darajali polinom $S_i(x)$ bo'lgan funksiyadir. Har bir $S_i(x)$ segmenti quyidagi umumiy shaklga ega bo'ladi:

$$S_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3$$

bu yerda $i = 0, 1, \dots, n-1$ va a_i, b_i, c_i, d_i koeffitsientlari har bir segment uchun alohida hisoblanadi. Kubik splaynning yuqori darajadagi silliqlik shartlari uning tugunlarda uzluksizligini, birinchi tartibli hosilasining uzluksizligini va ikkinchi tartibli hosilasining uzluksizligini ta'minlaydi. Bular matematik jihatdan quyidagi shartlar orqali ifodalanadi:

1. $S_i(x_i) = y_i$ va $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (interpolyatsiya sharti, barcha tugunlardan o'tishni ta'minlaydi).
2. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ (birinchi hosilaning uzluksizligi, egri chiziqning burchagi silliq o'zgarishini bildiradi).
3. $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$ (ikkinchi hosilaning uzluksizligi, egri chiziqning egilishi silliq o'zgarishini kafolatlaydi).

Ushbu shartlar egri chiziqning har bir bo'lagi o'zaro silliq tarzda ulanishini ta'minlab, vizual jihatdan uzluksiz va estetik natija beradi.

Ushbu uchta shart har bir ichki tugun x_i uchun qo'llanilib, $4n$ ta noma'lum a_i, b_i, c_i, d_i koeffitsientlarini topish uchun $4n-2$ ta tenglama beradi. Yechimni yakunlash uchun qo'shimcha ikkita chegara sharti talab qilinadi. Eng keng tarqalgan chegara shartlaridan biri "tabiiy" kubik splayn deb ataladi, bunda egri chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtalaridagi ikkinchi hosilalari nolga teng deb qabul qilinadi:

$$S_0''(x_0) = 0 \text{ va } S_{n-1}''(x_n) = 0.$$

Bu shart egri chiziqning uchlarida "to'g'rilanishi"ni, ya'ni egilmasligini anglatadi. Boshqa bir muhim tur "qattiq" (clamped) kubik splayn bo'lib, unda boshlang'ich va oxirgi nuqtalardagi birinchi hosilalar berilgan qiymatlarga tenglashtiriladi:

$$S_0'(x_0) = f_0' \text{ va } S_{n-1}'(x_n) = f_n'$$

Bu holatda foydalanuvchi egri chiziqning uchlarida qanday burchak ostida chiqishini nazorat qila oladi. Ushbu shartlar to'plami chiziqli tenglamalar tizimini hosil qiladi, uni samarali usullar bilan yechish orqali barcha a_i , b_i , c_i , d_i koeffitsientlari aniqlanadi va egri chiziqning aniq shakli hosil bo'ladi.

Amaliy misol

Berilgan tugun nuqtalari:

$$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = (1, 2), \quad (x_2, y_2) = (2, 0), \quad (x_3, y_3) = (3, 2)$$

1-qadam: Interval uzunliklarini aniqlash (h_i)

Har bir interval uchun masofa $h_i = x_{i+1} - x_i$ formulasi bilan topiladi:

$$h_0 = 1 - 0 = 1$$

$$h_1 = 2 - 1 = 1$$

$$h_2 = 3 - 2 = 1$$

2-qadam: Chegaraviy shartlar va tenglamalar tizimi

"Tabiiy" splayn shartiga ko'ra, chekka nuqtalarda ikkinchi hosila nolga teng deb olinadi: $M_0 = 0$ va $M_3 = 0$.

Ichki tugunlar (M_1, M_2) uchun asosiy tenglama:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

$$i=1 \text{ uchun: } 4M_1 + M_2 = 6(-2 - 1) \Rightarrow 4M_1 + M_2 = -18$$

$$i=2 \text{ uchun: } M_1 + 4M_2 = 6((2 - 0)/1 - (0 - 2)/1) \Rightarrow M_1 + 4M_2 = 24$$

3-qadam: Sistemaning yechimi (M qiymatlari)

Sistemani yechish natijasida ikkinchi hosilalar qiymati topiladi:

$$M_1 = -6.4$$

$$M_2 = 7.6$$

4-qadam: Segmentlar uchun koeffitsientlarni hisoblash

Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ oralig'ida splayn quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$1\text{-segment: } S_0(x) = -1.0667x^3 + 2.0667x + 1$$

$$2\text{-segment: } S_1(x) = 2.3333(x-1)^3 - 3.2(x-1)^2 - 1.1333(x-1) + 2$$

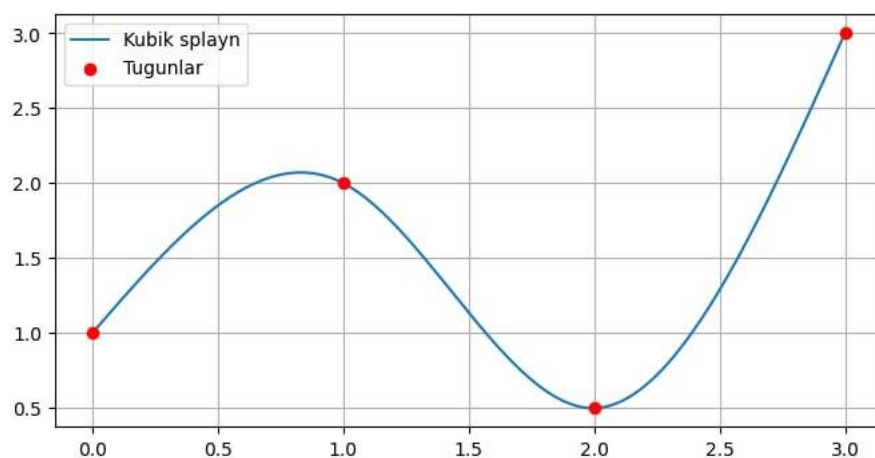
$$3\text{-segment: } S_2(x) = -1.2667(x-2)^3 + 3.8(x-2)^2 - 0.5333(x-2) + 0$$

Dastur kodi

```

Kubik Splayn

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 x = np.array([0.0, 1.0, 2.0, 3.0], dtype=float)
4 y = np.array([1.0, 2.0, 0.5, 3.0], dtype=float)
5 n = len(x) - 1
6 h = np.diff(x)
7 A = np.zeros((n + 1, n + 1), dtype=float)
8 b = np.zeros(n + 1, dtype=float)
9 A[0, 0] = 1.0
10 A[n, n] = 1.0
11 for i in range(1, n):
12     A[i, i - 1] = h[i - 1]
13     A[i, i] = 2.0 * (h[i - 1] + h[i])
14     A[i, i + 1] = h[i]
15     b[i] = 6.0 * ((y[i + 1] - y[i]) / h[i] - (y[i] - y[i - 1]) / h[i - 1])
16 M = np.linalg.solve(A, b)
17 def get_spline(val):
18     if val < x[0] or val > x[-1]:
19         return None
20     i = np.searchsorted(x, val) - 1
21     i = np.clip(i, 0, n - 1)
22     hi = h[i]
23     t1 = M[i] * (x[i + 1] - val) ** 3 / (6.0 * hi)
24     t2 = M[i + 1] * (val - x[i]) ** 3 / (6.0 * hi)
25     t3 = (y[i] - M[i] * hi ** 2 / 6.0) * (x[i + 1] - val) / hi
26     t4 = (y[i + 1] - M[i + 1] * hi ** 2 / 6.0) * (val - x[i]) / hi
27     return t1 + t2 + t3 + t4
28 xs = np.linspace(x.min(), x.max(), 400)
29 ys = np.array([get_spline(v) for v in xs], dtype=float)
30 plt.plot(xs, ys)
31 plt.scatter(x, y, color="red")
32 plt.grid(True)
33 plt.show()
    
```



Ushbu grafikda berilgan diskret nuqtalar to‘plami asosida kubik splayn (cubic spline) usuli yordamida qurilgan silliq egri chiziq tasvirlangan. Ma’lumotlarni qayta ishlash va matematik modellashirishda ushbu usul funksiyaning uzluksizligini ta’minlash uchun eng samarali instrumentlardan biri hisoblanadi.

Grafikda 4 ta asosiy tayanch nuqtalar (qizil rangda) belgilangan:

$$P_0(0, 1), P_1(1, 2), P_2(2, 0.5), P_3(3, 3).$$

Ushbu nuqtalar "tugunlar" deb ataladi va interpolyatsiya jarayonida egri chiziq aynan shu nuqtalar ustidan o‘tishi majburiydir.

Xulosa

Kubik splaynlar silliq va estetik egri chiziqlar yaratish uchun kuchli matematik vosita bo'lib, ularning uzluksiz hosilalari va lokal nazorat qobiliyati ularni ko'plab ilmiy va muhandislik sohalarida bebaho qiladi. Ular Runge hodisasini bartaraf etish, aniqlikni oshirish va egri chiziqlar ustida samarali nazoratni ta'minlash orqali kompyuter grafikasi, CAD/CAM tizimlari va ma'lumotlarni interpolyatsiyasida standart yechimga aylangan. Ushbu usulning universal qo'llanishi uning samaradorligi va moslashuvchanligini yaqqol ko'rsatadi. Bu texnika zamonaviy texnologik taraqqiyotda muhim o'rin tutadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. De Boor, C. (2001). A. Practical Guide to Splines (Revised Edition). Springer.
2. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical Analysis (9th ed.). Brooks/Cole.
3. Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. (1996). Computer Graphics: Principles and Practice (2nd ed.). Addison-Wesley.
4. Mortenson, M. E. (1999). Geometric Modeling. John Wiley & Sons.
5. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). Cambridge University Press.