

# Koordinatalar tekisligida uchburchak yuzi: determinant usuli afzalliklari

O.U.Pulatov

D.A.Choriyeva

Samarqand davlat pedagogika instituti

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada analitik geometriyaning poydevori hisoblangan tekislikda koordinatalar sistemasi va uning geometrik ob'ektlarni tadqiq qilishdagi o'rnini tahlil qilinadi. Ishning asosiy mazmuni Dekart koordinatalari hamda affin koordinatalar sistemasining o'zaro bog'liqligini ko'rsatish, nuqtaning tekislikdagi o'rnini absissa va ordinata o'qlari orqali aniq ifodalashga qaratilgan. Maqolada metrik munosabatlar, xususan, ikki nuqta orasidagi masofa formulasi va kesmani berilgan nisbatda bo'lish usullari keltirib o'tilgan. Shuningdek, reper tushunchasi orqali tekislikdagi har qanday nuqtaning analitik ifodasini qurish hamda murakkab planimetrik masalalarni sodda hisoblashlar orqali yechish metodikasi bayon etilgan..

**Kalit so'zlar:** koordinatalar sistemasi, nuqta koordinatasi, masofa formulasi, kesmani nisbatda bo'lish, vektorlar, reper, tekislik

## Triangle face in the coordinate plane: advantages of the determinant method

O.U.Pulatov

D.A.Choriyeva

Samarkand State Pedagogical Institute

**Abstract:** This article analyzes the coordinate system in the plane, which is considered the foundation of analytical geometry, and its role in the study of geometric objects. The main content of the work is aimed at showing the interrelationship of Cartesian coordinates and the affine coordinate system, and at accurately expressing the position of a point in the plane through the abscissa and ordinate axes. The article presents metric relations, in particular, the distance formula between two points and methods for dividing a section in a given ratio. Also, the methodology for constructing an analytical expression of any point in the plane through the concept of a benchmark and solving complex planimetric problems through simple calculations is described.

**Keywords:** coordinate system, point coordinate, distance formula, dividing a section in a ratio, vectors, benchmark, plane

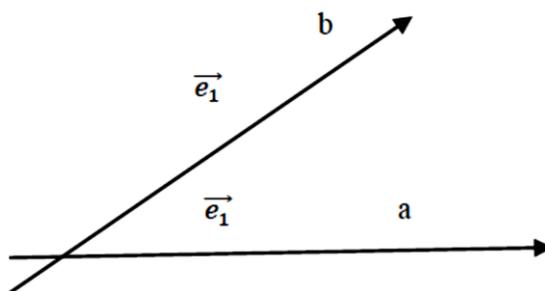
## Kirish

Tekislikdagi nuqtaning o'rnini ma'lum sonlar yordamida aniqlashga imkon beradigan usul ko'rsatilgan bo'lsa, tekislikda koordinatalar sistemasi berilgan deb aytamiz. Tekislikda koordinatalarning turli sistemalari mavjud bo'lib, ulardan biz soddasini kiritamiz.

Tekislikda koordinatalarning affin sistemasi

Tekislikda biror  $O$  nuqtadan qo'yilgan nokollinear ixtiyoriy ikki  $c$  vektor berilgan bo'lsin. Bu vektorlar sistemasi  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  bazisni aniqlaydi. Tekislikda  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  vektorlar orqali o'tuvchi  $a, b$  ( $a \cap b = O$ ) to'g'ri chiziqlarni olamiz.

Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  vektorlar bilan aniqlanuvchi  $a, b$  to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sistemani tekislikda koordinatalarning affin sistemasi yoki affin reper deyiladi (1-chizma) va uni  $B = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  ko'rinishda belgilanadi.  $O = a \cap b$  nuqta koordinatalar boshi,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  vektorlar esa koordinata vektorlari deyiladi. Musbat yo'nalishlari  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  vektorlar bilan aniqlangan  $a, b$  to'g'ri chiziqlar mos ravishda abstsissalar va ordinatalar o'qlari deb ataladi, ularni  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  bilan belgilaymiz.



1-chizma

## 2. Tekislikda dekart koordinatalari sistemasi. <sup>1</sup>

1-ta'rif. Affin reper  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  ning koordinata vektorlari  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  ortonormalangan bazisni tashkil etsin, ya'ni  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$  bo'lsin. Bu holda biz koordinatalarning to'g'ri burchakli sistemasi, qisqacha, dekart reperi berildi deb aytamiz. Bunday repelni  $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$  ko'rinishida belgilaymiz. Bu yerda  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1, \vec{i}\vec{j} = 0$  Bu holda koordinata o'qlari perpendikulyardir. Dekart reperi affin reperning xususiy holi bo'lgani uchun affin reperga nisbatan o'rinli mulohazalar dekart reperida ham o'z kuchini saqlaydi.

Ammo dekart reperidagi ayrim mulohazalar affin reperda doimo o'rinli bo'lavermaydi.

Ta'rif.  $A, B$  nuqtalar orasidagi masofa deb,  $\overline{A, B}$  (yoki  $\overline{BA}$ ) vektorning uzunligiga aytiladi. Demak, ta'rifga ko'ra  $p(A, B) = |\overline{A, B}|$

<sup>1</sup> К Останов, ОУ Пулатов, АА Азимов, Использование нестандартных исследовательских задач в процессе обучения геометрии

Endi koordinatalari bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasini topaylik. Tekislikda  $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$  Dekart reperi berilgan bo'lib, bu reperga nisbatan  $A, B$  nuqtalar ushbu koordinatalarga ega bo'lsin:

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , U holda  $\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$ ,  $\vec{OB} = \{x_2, y_2\}$ ,  $\vec{OA} = \{x_1, y_1\}$  bo'lib,  $\vec{OB}$  va  $\vec{OA}$  vektorlarning ayirmasi bo'lgan  $AB$  — vektor ushbu koordinatalarga egadir:

$$\vec{AB} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\} \quad p(A, B) = \sqrt{|\vec{AB}|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

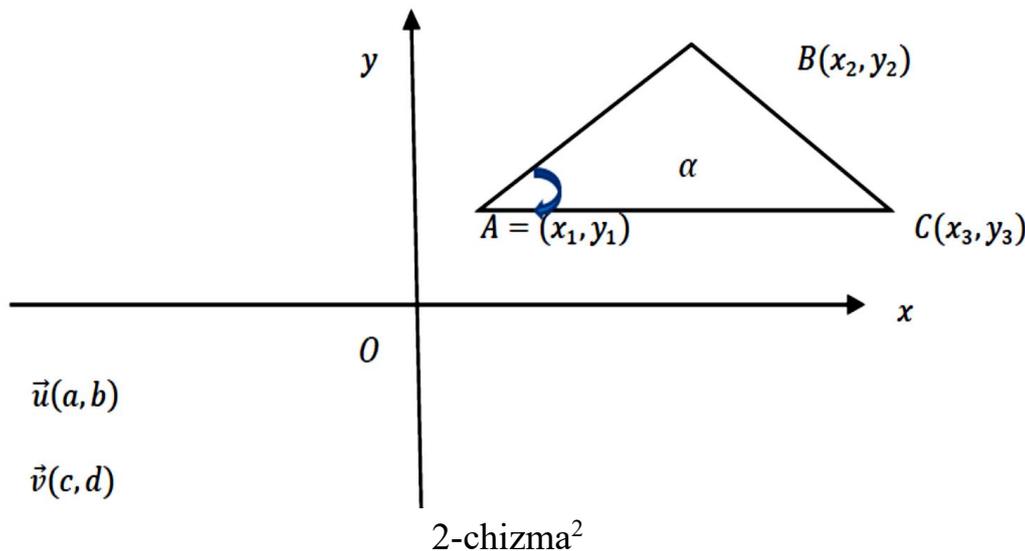
Demak, berilgan  $A(x_1, y_1)$  va  $B(x_2, y_2)$ , nuqtalar orasidagi masofa ushbu formula bo'yicha topiladi:  $p(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Misol:  $A(-1, 0), B(2, 3)$  nuqtalar orasidagi masofa hisoblansin.

Yechish: Berilgan  $A$  va  $B$  nuqtalar orasidagi masofani yuqoridagi formulaga asosan:

$$p(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Koordinatalar sistemasida uchta nuqtaning koordinatalari orqali yasalgan uchburchakning yuzini topish:



$$a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1, \quad c = x_3 - x_1, \quad d = y_3 - y_1$$

$$\frac{ac+bd}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos \alpha \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{(ac+bd)^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2}$$

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2$$

Soddalashtiramiz

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha = (ad - bc)^2$$

Tenglikning ikkala tomoniga 1/2 ni ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{2} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (ad - bc)^2$$

<sup>2</sup> К Остапов, ОУ Пулатов, АА Тилавбойев - Достижения науки и образования, 2018, Об особенностях решения задач на исследование при изучении курса геометрии

Tenglikning chap tomoni ixtiyoriy uchburchakning yuzini topish formulasiga teng.

$$S = \frac{1}{2}(ad - bc)^2$$

$|a| = a^2$  bu tenglikdan foydalanib quyidagi ifodani yozib olamiz.

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

Yuqoridagi tenglikni determinant ko'rinishida tasvirlaymiz.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ Uchburchak yuzini vektorlar orqali ifodalaymiz:}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)|$$

Soddalshtiramiz:

$$S = \frac{1}{2} |x_2y_3 - x_2y_1 + x_1y_1 - y_2x_3 + y_2x_1 + y_1x_3 - y_1x_1|$$

Tartibga solamiz:

$$S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

Ushbu formula uchburchak yuzini koordinatalar orqali topishning asosiy formulasi.

Endi bu ifodani 3-tartibli determinant usulida tasvirlashni ko'ramiz:

Qavs ichidagi har bitta ifodani (2x2) o'lchamli determinant ko'rinishiga keltiramiz:

$$(y_2 - y_3) = \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (y_3 - y_1) = \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} \quad (y_1 - y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Bu qiymatlarni ifodaga qo'ysak:

$$S = \frac{1}{2} \left| x_1 \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Yuqoridagi yoyilma uchinchi tartibli determinantning birinchi ustun bo'yicha yoyilmasi hisoblanadi. Ya'ni:

determinantni istalgan satr yoki ustun elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga  $A_{ij}$  ko'paytirib, natijalarni qo'shish orqali hisoblash mumkin.

$$x_1A_{11} + x_2A_{21} + x_3A_{31} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, hasil qilmoqchi bo'lgan formulamiz quyidagi ko'rinishga keladi:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Bu formulalardan foydalanishning asosiy maqsadi ixtiyoriy uchburchakning 3 ta uchidagi nuqtalarning koordinatalari berilgan bo'lsa uning yuzini tez va oson topishdan iborat.

Misol: Koordinatalar sistemasida ushbu  $A(1,2), B(4,6), C(6,3)$  nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan yasalgan uchburchakning yuzini toping.

Yuqoridagi determinant formulasi orqali hisoblaymiz.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ bu ifodani uchburchak usuli bilan ochib chiqamiz.}$$

$$S = \frac{1}{2} |1(6 - 3) - 2(4 - 6) + 1(12 - 36)| = \frac{1}{2} |3 + 4 - 24| = \frac{1}{2} |-17| = \frac{17}{2} = 8,5$$

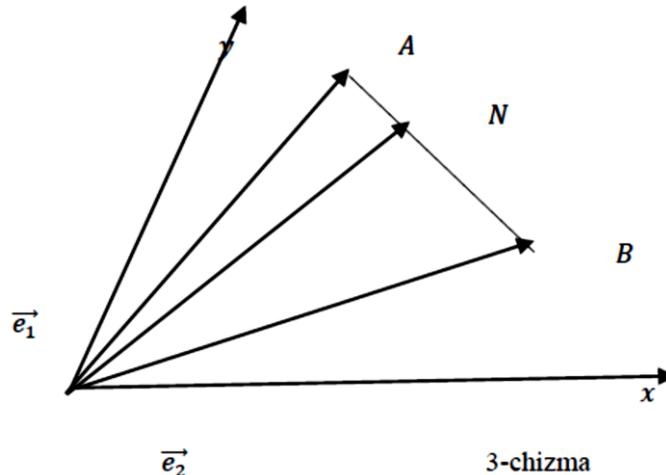
Uchburchakning yuzasi:  $S = 8,5$

3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish  $A, B$  tekislikdagi turli ikki nuqta,  $N$  esa  $(AB)$  to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$\vec{AN}, \vec{NB}$  vektorlar kollinear bo'lgani uchun shunday  $d$  son mavjud bo'ladiki,

$$\vec{AN} = d \vec{NB} (*)$$

Agar  $N$  nuqta  $[AB]$  kesmada yotsa, ayni kesmani ichki ravishda bo'lsa,  $\vec{AN}$  va  $\vec{NB}$  vektorlar bir xil yo'nalishli bo'lib,  $d > 0$  va  $N$  nuqta  $[AB]$  kesmada yotmasdan, lekin  $AB[]$  to'g'ri chiziqda yotsa,  $\vec{AN}$  va  $\vec{NB}$  vektorlar qarama-qarshi yo'nalishli bo'lib,  $d < 0$ . Biz  $N$  nuqta bu holda  $[AB]$  ni tashqi ravishda bo'ladi deb aytamiz.  $d$  son uchta  $A, B, N$  nuqtaning oddiy nisbati deb ataladi. Biz uni  $(AB, N) = d$  bilan belgilaymiz, (\*) dan  $d = (AB, N) = \frac{\vec{AN}}{\vec{NB}}$ .



Tekislikda  $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  reper berilgan bo'lsin. Bu reperda  $A, B, N$  nuqtalar  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  va  $N(x, y)$  koordinatalarga ega bo'lsin (2-chizma). Bu nuqtalarning radius-vektorlarini quyidagicha belgilaymiz:

$$\vec{OA} = \vec{r}_1, \quad \vec{OB} = \vec{r}_2, \quad \vec{ON} = \vec{r}$$

U holda  $\vec{AN} = \vec{ON} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{r}_1$ ,  $\vec{NB} = \vec{OB} - \vec{ON} = \vec{r}_2 - \vec{r}$  bo'lib bularni  $\vec{AN} = d\vec{NB}$  ifodaga qo'yamiz:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = d(\vec{r}_2 - \vec{r}) \text{ yoki } (1 + d)\vec{r} = \vec{r}_1 + d\vec{r}_2 \text{ bundan } 1 + d \neq 0 \text{ farazda}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + d\vec{r}_2}{1 + d} (**)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu ifoda bo'luvchi  $N$  nuqtaning radius-vektorini aniqlaydi. (\*\*) ni koordinatalarga

yoʻzaylik.  $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ,  $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ ,  $\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$  boʻlgani uchun (\*\*\*) dan

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2}{1+d} + \frac{x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2}{1+d}$$

Yoki

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{x_1+dx_2}{1+d}\vec{e}_1 + \frac{y_1+dy_2}{1+d}\vec{e}_2$$

$\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  vektorlarning chiziqli ekanligidan ( $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  vektorlar oldidagi koeffitsientlarni nolga tenglaymiz):

$$x = \frac{x_1+dx_2}{1+d}, \quad y = \frac{y_1+dy_2}{1+d}$$

Bu tengliklar orqali kesmani  $d$  nisbatda boʻlgan  $N$  nuqtaning koordinatalarini topamiz.

### Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rasulov, T. H., Qurbonov, G'. G'. , Hamdamov, Z. N. Analitik geometriyadan misol va masalalar: o'quv qo'llanma.
2. Kamolov, M. Analitik geometriya. Toshkent: "O'qituvchi" nashriyoti.
3. Pogorelov, A. V. Geometriya: I qism. Toshkent: "O'qituvchi" nashriyoti.
4. Narmanov, A. Ya. Analitik geometriya. Toshkent: "O'qituvchi", 2008.
5. К Остапов, ОУ Пулатов, АА Азимов, Использование нестандартных исследовательских задач в процессе обучения геометрии
6. К Остапов, ОУ Пулатов, АА Тилавбойев - Достижения науки и образования, 2018, Об особенностях решения задач на исследование при изучении курса геометрии