Bisentrik to'rtburchaklar, Fuss teoremasi va uning tatbiqlari

Nasriddin Raximov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Hanifa Nematulloyeva
Samarqand davlat pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada planimetriyaning murakkab obyektlaridan biri bo'lgan bisentrik to'rtburchaklar - ham ichki, ham tashqi aylana chizilgan metrik tizimlar tadqiq etilgan. Maqolaning asosiy markazida tashqi aylana radiusi (R), ichki aylana radiusi (r) va markazlararo masofa (d) o'rtasidagi algebraik bog'liqlikni ifodalovchi Fuss teoremasining analitik tahlili yotadi. Maqolada ushbu teoremaning zamonaviy isbotlash usullari qiyosiy o'rganilib, olingan natijalar geometrik modellashtirish va ekstrimal masalalarni yechishda muhim ilmiy ahamiyat kasb etadi.

Kalit so'zlar: bisentrik to'rtburchaklar, Fuss teoremasi, tangensial va siklik xossalar, tashqi va ichki aylana radiuslari, markazlararo masofa, geometrik modellashtirish, planimetrik optimallash, analitik geometriya

Bicentric rectangles, Fuss's theorem and its applications

Nasriddin Rakhimov
nasriddin.raximov@inbox.ru
Hanifa Nematulloyeva
Samarkand State Pedagogical Institute

Abstract: This article investigates one of the complex objects of plane geometry - bicentric quadrilaterals, which are metric systems possessing both an incircle and a circumcircle. The main focus of the paper is the analytical study of Fuss' theorem, which expresses the algebraic relationship between the circumradius (R), the inradius (r), and the distance between their centers (d). The article comparatively examines modern methods of proving this theorem, and the obtained results are of significant scientific importance in geometric modeling and solving extremal problems.

Keywords: Bicentric quadrilaterals, Fuss' theorem, tangential and cyclic properties, circumradius and inradius, distance between centers, geometric modeling, planimetric optimization, analytical geometry

KIRISH. Geometriyada bir vaqtni o'zida ham ichki, ham tashqi aylana chizish mumkin bo'lgan to'rtburchaklar bisentrik to'rtburchaklar deb ataladi. Bunday shakllar kamdan-kam uchrab, ularning mavjudligi tomonlar, radiuslar va aylanalar markazlari orasidagi qat'iy bog'liqliklarga asoslanadi.

Ushbu mavzuning dolzarbligi shundaki, bisentrik tizimlar orqali murakkab muhandislik konstruksiyalari va kompyuter grafikasi algoritmlarini optimallashtirish mumkin. Maqolaning asosiy maqsadi - ushbu shakllarning fundamental xossalarini tizimlashtirish hamda Fuss teoremasi orqali aylanalar orasidagi metrik munosabatlarni sodda va izchil yoritib berishdir.

Bisentrik to'rtburchaklarning zaruriy va yetarli shartlari

Ta'rif: Bisentrik to'rtburchaklar deb, bir vaqtning o'zida ham tangensial (ichki aylana chizilgan), ham siklik (tashqi aylana chizilgan) xossalarga ega bo'lgan to'rtburchaklarga aytiladi.

Tangensiallik xossasi va Pito teoremasi

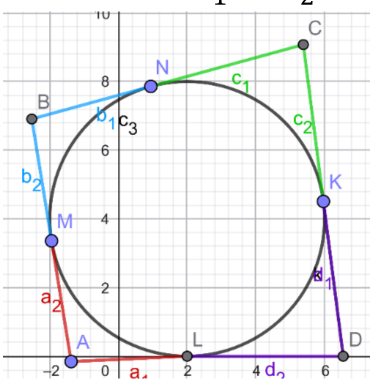
To'rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo'lishining zaruriy va yetarli sharti uning tomonlari orasidagi metrik bog'liqlik bilan belgilanadi. Bu qonuniyat geometriyada Pito teoremasi nomi bilan yuritiladi.

Teorema(Pito teoremasi): Agar to'rtburchakning ketma-ket tomonlari *a, b, c, d* bo'lsa, u holda ichki aylana mavjudligi uchun quyidagi tenglik bajarilishi shart:

$$a + c = b + d$$

Teorema isboti: To'rtburchakning uchlarini *A, B, C, D*, tomonlarini esa a, b, c, d deb belgilaymiz. Ichki aylana to'rtburchak tomonlariga tegishli ravishda M, N, K, L nuqtalarda urinsin. Aylanaga bitta nuqtadan o'tkazilgan urinmalar tengligi xossasiga ko'ra, har bir uchdan urinish nuqtalarigacha bo'lgan masofalarni quyidagicha belgilaymiz:

$$AM = AL = a_1 = a_2 = x$$
$$BM = BN = b_1 = b_2 = y$$
$$CN = CK = c_1 = c_2 = z$$
$$DK = DL = d_1 = d_2 = t$$



1-rasm. Teorema shartiga mos shakl

Endi to'rtburchakning tomonlarini ushbu kesmalar yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$a = AB = a_2 + b_2 = x + y$$

$$b = BC = b_1 + c_1 = y + z$$
$$c = CD = c_2 + d_1 = z + t$$
$$d = AD = a_1 + d_1 = x + t$$

Qarama - qarshi tomonlar yig'indisini hisoblaymiz:

$$a + c = x + y + z + t$$
$$b + d = x + y + z + t$$

Bundan:

$$a + c = b + d$$

tengligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Siklik to'rtburchaklar

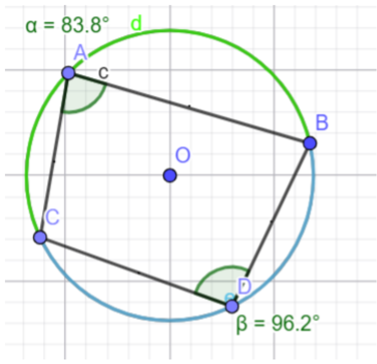
Ta'rif: Agar to'rtburchakning barcha uchlari bitta aylanada yotsa, bunday to'rtburchak siklik (aylanaga ichki chizilgan) to'rtburchak deb ataladi.

Xossasi: To'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin bo'lishi uchun uning qarama-qarshi burchaklari yig'indisi 180° ga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^0$$

Isboti: Bu xossa tayanilgan yoylarning o'lchoviga asoslanadi. $\angle A$ burchak $\overset{\frown}{BDC}$yoyiga, $\angle D$ burchak esa $\overset{\frown}{BAC}$ yoyiga tayanadi. Bu ikki yoyning yig'indisi to'liq aylanani (360°) tashkil qilgani uchun, ichki chizilgan burchaklar yig'indisi uning yarmi, ya'ni 180° bo'ladi. Ya'ni:

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BDC} \ \angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC}$$



2-rasm. Berilganlarga mos shakl

$$\angle A + \angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BDC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BDC} + \overset{\frown}{BAC}\right) = 360° \cdot \frac{1}{2} = 180°$$

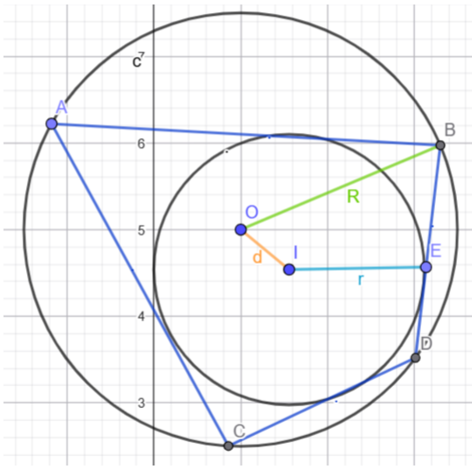
$\angle B + \angle C = 180^0$ ham xuddi shu tartibda isbotlanadi. Xossa isbotlandi.

FUSS TEOREMASI VA UNING TATBIQLARI

Bisentrik to'rtburchaklar geometriyasida eng muhim masalalardan biri - bu tashqi aylana radiusi (R), ichki aylana radiusi (r) va markazlararo masofa (d) orasidagi miqdoriy bog'liqlikni topishdir. 1792-yilda Shveysariya matematigi Nikolay Fuss (Leonard Eylerning shogirdi) ushbu bog'liqlikni isbotlab berdi.

Teorema: Agar aylanalar mos ravishda bisentrik to'rtburchakning tashqi va ichki aylanasi bo'lsa, u holda quyidagi algebraik munosabat o'rinli:

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$



3-rasm. Berilganlarga mos shakl

Tashqi aylana: markazi O, radiusi R. Ichki aylana: markazi I, radiusi r.

$OI = d$ (markazlararo masofa). $ABCD$ - bisentrik to‘rtburchak.

1-bosqich: Inmarkaz burchaklari simmetriyasini qo‘llash.

Tangensial to‘rtburchaklar uchun ichki bissektrisalar va inmarkaz hosil qilgan qarama-qarshi burchaklar yig‘indisi 180° ga teng bo‘lganligi sababli:

$$\angle AIB+\angle CID=180^\circ$$

Ushbu xossaga ko‘ra, $\cos\angle AIB=-\cos\angle CID$ munosabati kelib chiqadi. AI va BI bissektrisalari hamda r radius orasidagi to‘g‘ri burchakli uchburchaklar metrikasidan (yarim burchaklar tangenslari ayniyatlaridan) foydalanib, AI va CI kesmalari uzunliklarini radius r orqali guruhlasak, quyidagi muhim lemma hosil bo‘ladi:

$$\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{CI^2}=\frac{1}{r^2}\quad\text{(1-tenglama)}$$

2-bosqich: Nuqtaning aylanaga nisbatan quvvati va d masofa.

AI va CI nurlarini to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida tashqi aylanagacha davom ettiramiz. Nuqtaning aylanaga nisbatan quvvati (Power of a Point) xossasiga ko‘ra, sirkummarkaz O va inmarkaz I orasidagi masofa d bo‘lsa, I nuqtadan o‘tuvchi vatar kesmalari ko‘paytmasi o‘zgarmas bo‘lib, R^2-d^2ga teng bo‘ladi.

Geometrik burchaklar goniometriyasi va sirkummarkaz atrofidagi proeksiyalar tahlili yordamida AI va CI nurlarining tashqi aylana bilan kesishish nuqtalari hamda$O$ markaz orasidagi masofalar hisoblanganda, quyidagi guruhlangan metrik invariant kelib chiqadi:

$$AI\cdot CI=R^2-d^2\quad\text{(2-tenglama)}$$

3-bosqich: Kosinuslar teoremasi sintezi.

O, I va to‘rtburchak uchlari hosil qilgan $\triangle AOI\ va\ \triangle COI$ uchburchaklarida AI va CI kesmalari uchun kosinuslar teoremasini yozamiz:

$$AI^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\angle AOI$$
$$CI^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\angle COI$$

Bissentrik to‘rtburchaklarda $\angle AOI\ va\ \angle COI$ burchaklarining o‘zaro bog‘liqlik xossasiga ko‘ra, ushbu ikki tenglamani hadma-had qo‘shish orqali burchak xarakteristikalari yo‘qotiladi va kvadratlar yig‘indisi uchun quyidagi sodda ifoda qoladi:

$$AI^2 + CI^2 = 2(R^2 + d^2) \quad \text{(3-tenglama)}$$

4-bosqich: Algebraik shakl almashtirish.

Endi (1-tenglama)ning chap tomonini umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{AI^2 + CI^2}{AI^2 \cdot CI^2} = \frac{1}{r^2}$$

Ushbu hosil bo‘lgan ifodaning suratiga (3-tenglama)dagi qiymatni, maxrajiga esa (2-tenglama)dagi ko‘paytmaning kvadratini ($AI^2 \cdot CI^2 = (R^2 - d^2)^2$) olib borib qo‘yamiz:

$$\frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Ushbu tenglikni Fussning dastlabki ko‘rinishiga keltirish uchun chap tomonning suratini sun’iy ravishda quyidagicha ajratib yozamiz:

$$2(R^2 + d^2) = (R + d)^2 + (R - d)^2$$

Buni tenglamaga qayta joylashtiramiz:

$$\frac{(R + d)^2 + (R - d)^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Maxrajdagi $(R^2 - d^2)^2$ ifodasi $(R - d)^2(R + d)^2$ ekanligini hisobga olib, kasrni hadma-had bo‘lib chiqamiz:

$$\frac{(R + d)^2}{(R - d)^2(R + d)^2} + \frac{(R - d)^2}{(R - d)^2(R + d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Tegishli qavslar qisqarib ketgandan so‘ng, Fuss teoremasining yakuniy klassik shakli hosil bo‘ladi:

$$\frac{1}{(R - d)^2} + \frac{1}{(R + d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Teorema isbotlandi.

Bissentrik to‘rtburchaklarni modellashtirish va qurish

Muhandislik va arxitekturada berilgan ikki aylana (tashqi va ichki) asosida to‘rtburchak qurish talab etilishi mumkin.

Tatbiqi: Agar bizda radiuslari R va $r$bo‘lgan ikkita aylana bo‘lsa, Fuss teoremasi yordamida ular orasidagi masofa d ni hisoblab, markazlarni aniq joylashtirish mumkin. Bu konstruksiyaning geometrik jihatdan "yopilishini" (ya'ni to‘rtburchakning uchlari va tomonlari aylanalar bilan aniq kesishishini) kafolatlaydi.

Poncelet porizmasining xususiy holi sifatida

Fuss teoremasi matematikadagi mashhur Poncelet porizmasining

$n = 4$ (to‘rtburchak) holidagi ifodasidir.

Tatbiqi: Bu teorema shuni isbotlaydiki, agar bitta bisotsentrik to‘rtburchak mavjud bo‘lsa, u holda ushbu ikki aylana orasida cheksiz ko‘p bisotsentrik to‘rtburchaklar mavjud bo‘ladi. Bu mexanika va dinamik tizimlarda aylanma harakatlarni chiziqli harakatlarga simmetrik o‘tkazishda qo‘llaniladi.

Optika va yorug‘lik akslanishi (Bilyard masalalari)

Matematik bilyard nazariyasida aylanalar ichidagi trayektoriyalarni o‘rganishda Fuss teoremasi ishlatiladi.

Tatbiqi: Agar yorug‘lik nuri yoki bilyard shari tashqi aylana ichida harakatlanib, ichki aylanaga urinma hosil qilsa, 4 ta urilishdan keyin u yana o‘zining boshlang‘ich nuqtasiga qaytib keladi. Bu optik asboblarda nurning yo‘nalishini aniq hisoblashda yordam beradi.

Metrik bog‘liqliklarni soddalashtirish

Murakkab geometrik hisob-kitoblarda burchaklarni o‘lchash qiyin bo‘lgan hollarda Fuss teoremasi chiziqli o‘lchovlarga o‘tish imkonini beradi.

Tatbiqi: Masalan, agar tashqi va ichki radiuslar ma'lum bo‘lsa, markazlar orasidagi masofa (d) orqali to‘rtburchakning diagonallari va burchaklarini trigonometrik jadvallarsiz aniqlash mumkin.

XULOSA. Ushbu ilmiy ishda biosentrik to‘rtburchaklar geometriyasi va Fuss teoremasi tahlil qilindi. Quyidagi natijalarga erishildi: Bissentrik to‘rtburchak mavjud bo‘lishi uchun uning ham Pito, ham siklik shartlariga javob berishi zarurligi asoslandi. Poncelet porizmasi asosida GeoGebrada yaratilgan dinamik model bunday to‘rtburchaklarning cheksiz ko‘p ekanligini vizual isbotladi. Tadqiqot natijalari maktab geometriya kursini boyitishda va olimpiada masalalarini yechishda metodik manba bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Pogorelov, A. V. (1994). Geometriya: O‘rta maktablar uchun darslik. Toshkent: "O‘qituvchi".

2. Ismoilov, A. I., Solayev, M., & Yusupov, A. (2018). Geometriya: 7-9 sinflar uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent.

3. Dörrie, H. (1965). 100 Great Problems of Elementary Mathematics. New York: Dover.

4. Josefsson, M. (2010). "Calculations Concerning the Areas of Bicentric Quadrilaterals". Mathematical Gazette.

5. Ziyoviddinov, G‘. (2015). Maktab geometriya kursida masalalar yechish usullari. Samarqand.

6. GeoGebra Dynamic Mathematics Software. [Elektron resurs] – URL: https://www.geogebra.org. (Vizual modellashtirish va chizmalar uchun).