Ba'zi fizik jarayonlarni differensial tenglamalar yordamida yechish

Husan Sanaqulovich Aktamov
Botirbek Akram-o'g'li Begmatov
SamDPI

Annotatsiya: Maqolada fizik jarayonlarni differensial tenglamalar yordamida matematik modellashtirish masalalari ikkita amaliy misol asosida yoritiladi. Birinchi masalada qarshilik kuchi tezlik kvadratiga proporsional bo'lgan muhitda harakatlanuvchi o'qning devor ichidagi harakati, ikkinchi masalada esa jismning atrof-muhit ta'sirida sovishi o'rganiladi. Har bir jarayon uchun fizik qonunlardan kelib chiqib differensial tenglama tuziladi, boshlang'ich va chegaraviy shartlar qo'llanadi hamda analitik yechim olinadi. Hisoblash natijalari fizik mazmun nuqtayi nazaridan izohlanadi.

Kalit so'zlar: differensial tenglama, matematik modellashtirish, kvadratik qarshilik, harakat tezligi, Nyutonning sovish qonuni, boshlang'ich shart, fizik jarayon

Solving Certain Physical Processes Using Differential Equations

Husan Sanaqulovich Aktamov
Botirbek Akram-o'g'li Begmatov
SamSPI

Abstract: This article explores the mathematical modeling of physical processes using differential equations, illustrated through two practical examples. The first example examines the motion of a projectile within a wall, where the resistance force is proportional to the square of its velocity; the second example investigates the cooling of an object under the influence of its environment. For each process, a differential equation is formulated based on physical laws, initial and boundary conditions are applied, and an analytical solution is derived. The computational results are interpreted from the perspective of their physical significance.

Keywords: differential equation, mathematical modeling, quadratic resistance, velocity of motion, Newton's law of cooling, initial condition, physical process

Differensial tenglamalar tabiat va texnikada uchraydigan o'zgaruvchan jarayonlarning matematik modelini tuzishda muhim vosita hisoblanadi. Jismning

(cc) BY

harakati, issiqlik almashinuvi, elektr zanjirlaridagi tokning o‘zgarishi, populyatsiya dinamikasi kabi ko‘plab hodisalar kattaliklarning vaqt yoki fazo bo‘yicha o‘zgarish tezligini ifodalovchi tenglamalar orqali tavsiflanadi. Bunday masalalarda asosiy vazifa - jarayonni belgilovchi fizik qonunni aniqlash, noma’lum funksiyani tanlash, differensial tenglama tuzish va berilgan shartlar asosida uning yechimini topishdan iborat.

Ushbu maqolada amaliy masalalar to‘plamidagi 1.30 va 1.33-masalalar asos qilib olinadi. Birinchi masala jismning qarshilik kuchi ta’siridagi harakatini, ikkinchisi esa jismning sovish jarayonini ifodalaydi. Misollar differensial tenglamalarning fizik mazmunini ochish, matematik modeldan foydalanish va natijani tahlil qilish ketma-ketligini ko‘rsatadi.

KVADRATIK QARSHILIK MUHITIDA O‘QNING HARAKATI

Masala sharti. O‘q boshlang‘ich $v_0 = 200\ m/s$ tezlik bilan harakatlanib, qalinligi $h = 10sm$ bo‘lgan devorni teshib o‘tadi. Devordan chiqqan paytdagi tezligi $v_1 = 80\ m/s$. Devorning qarshilik kuchi o‘q tezligining kvadratiga proporsional. O‘qning devor ichida harakatlanish vaqti T aniqlansin.

Masalani matematik modellashtirish. O‘qning harakat yo‘nalishini musbat deb olamiz. Devorning qarshilik kuchi harakatga qarama-qarshi yo‘nalganligi sababli Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra

$$m\ \frac{dv}{dt} = -k\ v^2, \quad k > 0$$

bu yerda m - o‘q massasi, $v(t)$ - uning tezligi, k - muhitning qarshilik koeffitsiyenti. Tenglamani vaqt bo‘yicha yechish mumkin, biroq devor qalinligi ma’lum bo‘lgani uchun x koordinatani mustaqil o‘zgaruvchi sifatida olish qulay. $v = \frac{dx}{dt}$ ekanidan zanjir qoidasini qo‘llaymiz:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = v\frac{dv}{dx}.$$

Shuni harakat tenglamasiga qo‘yib, quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\mathrm{m}v\frac{dv}{dx} = -\mathrm{k}\,v^2 \implies \frac{dv}{dx} = -(\frac{k}{m})v.$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz:

$$dv/v = -(k/m)\,dx \implies ln\,v = -(k/m)x + C.$$

Boshlang‘ich shart $x = 0$ da $v = v_0$ bo‘lgani uchun $C = ln\,v_0$. Demak, tezlikning devor ichidagi masofaga bog‘liqligi

$$v(x) = v_0\,exp[-(k/m)x]$$

ko‘rinishga ega. $x = h$ da $v = v_1$ bo‘lishidan

$$k/m = (1/h)\, ln(v_0/v_1).$$

Shunday qilib, qarshilik koeffitsiyentining massaga nisbatini berilgan tezliklar va devor qalinligi orqali aniqladik. Endi vaqtni topish uchun $dx/dt = v(x)$ munosabatidan foydalanamiz.

O‘QNING DEVOR ICHIDA HARAKATLANISH VAQTINI ANIQLASH

Tezlik $v = dx/dt$ bo‘lgani sababli $dt = dx/v(x)$. O‘qning devor ichida bosib o‘tgan yo‘li 0 dan h gacha o‘zgaradi. Shuning uchun umumiy vaqt

$$T = \int_0^h dx/v(x) = (1/v_0) \int_0^h exp[(k/m)x]\, dx.$$

Integralni hisoblaymiz:

$$T = (m/(k\, v_0))\, [exp((k/m)h) - 1].$$

Oldin olingan $k/m = (1/h)ln(v_0/v_1)$ tenglikni qo‘ysak, $exp((k/m)h) = v_0/v_1$ bo‘ladi. Natijada vaqt uchun qulay formula hosil qilinadi:

$$T = h(v_0 - v_1) \,/\, [v_0\, v_1\, ln(v_0/v_1)].$$

Berilgan kattaliklarni SI birliklarida yozamiz: $h = 10\, sm = 0{,}10\, m$; $v_0 = 200\, m/s$; $v_1 = 80\, m/s$. Ularni formulaga qo‘yish natijasida

$$T = 0{,}10 \cdot (200 - 80) \,/\, [200 \cdot 80 \cdot ln(200/80)]$$

$T \approx 0{,}000818\, s = 0{,}818\, ms$.

Demak, o‘q devor ichidan taxminan $8{,}18 \cdot 10^{-4}$ sekundda o‘tadi. Natijaning juda kichik chiqishi o‘q tezligining katta ekanligi va devor qalinligining atigi 0,10 m bo‘lishi bilan izohlanadi.

Modelning fizik talqini. Olingan $v(x) = v_0 exp[-(k/m)x]$ formula tezlik devor ichida masofa ortishi bilan eksponensial ravishda kamayishini ko‘rsatadi. Qarshilik kuchi tezlik kvadratiga proporsional bo‘lsa-da, fazoviy koordinata bo‘yicha yozilgan tenglama tezlikning x ga nisbatan birinchi darajali chiziqli tenglamasiga keladi. Bu almashtirish masalani yechishni soddalashtiradi. Modelda qarshilik koeffitsiyenti devor bo‘ylab o‘zgarmas, o‘q massasi esa doimiy deb qaraladi.

Ta’limiy jihati. Ushbu masalani o‘qitishda avval Nyutonning ikkinchi qonuni va qarshilik kuchining yo‘nalishi muhokama qilinadi. Keyin $v = dx/dt$ munosabati orqali vaqt bo‘yicha hosiladan koordinata bo‘yicha hosilaga o‘tish ko‘rsatiladi. Yakunda o‘lchov birliklarini SI tizimiga keltirish va natijaning fizik ma’nosini tekshirish talab etiladi. Shu tariqa talaba fizik qonunni differensial tenglamaga aylantirish, boshlang‘ich ma’lumotlardan parametrni aniqlash va integral orqali vaqtni hisoblash ko‘nikmalarini egallaydi.

JISMNING HAVODA SOVISH JARAYONI

Masala sharti. Jismning havoda sovish tezligi jism temperaturasi bilan havo temperaturasi orasidagi farqqa proporsional. Havo temperaturasi $20°C$ bo‘lganda jism 20 minut ichida $100°C$ dan $60°C$ gacha soviydi. Jism temperaturasi $30°C$ gacha qancha vaqtda pasayishi aniqlansin.

(cc) BY

Masalani matematik modellashtirish. Jism temperaturasini $T(t)$, atrof-muhit temperaturasini T_a bilan belgilaymiz. Sovish jarayonida $T > T_a$ bo‘lsa, jism temperaturasi kamayadi. Nyutonning sovish qonuniga muvofiq temperatura o‘zgarish tezligi temperatura farqiga proporsional:

$$dT/dt = -k(T - T_a), \quad k > 0.$$

Bu yerda k - sovish koeffitsiyenti. Masala shartiga ko‘ra $T_a = 20°C$. Demak, tuziladigan differensial tenglama

$$dT/dt = -k(T - 20)$$

bo‘ladi. Boshlang‘ich shart $T(0) = 100°C$. Tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$dT/(T - 20) = -k\,dt$$

Integrallash natijasida

$$ln|T - 20| = -kt + C$$

kelib chiqadi. $T(0) = 100$ shartdan $C = ln\,80$. Shuning uchun jism temperaturasining vaqtga bog‘liqligi

$$T(t) - 20 = 80e\^(-kt),$$
$$T(t) = 20 + 80e\^(-kt)$$

ko‘rinishda ifodalanadi. Bu formula sovish jarayonida jism temperaturasi atrof-muhit temperaturasiga eksponensial ravishda yaqinlashishini ko‘rsatadi.

SOVISH KOEFFISIYENTI VA KERAKLI VAQTNI TOPISH

Masala shartidagi ikkinchi ma’lumotdan foydalanamiz: $t = 20$ minut bo‘lganda $T(20) = 60°C$. Olingan yechimga qo‘ysak:

$60 = 20 + 80e\^(-20k)$.

Bundan

$40 = 80e\^(-20k) \implies e\^(-20k) = 1/2.$

Logarifmlab, sovish koeffitsiyentini aniqlaymiz:

$-20k = ln(1/2) = -ln\,2,$

$k = (ln\,2)/20 \approx 0{,}03466\,min^{-1}$.

Endi jism temperaturasi $30°C$ ga tushadigan vaqtni topamiz. $T(t) = 30$ deb olamiz:

$30 = 20 + 80e\^(-kt),$

$10 = 80e\^(-kt) \implies e\^(-kt) = 1/8.$

Logarifmlash orqali

$-kt = ln(1/8) = -ln\,8, \quad t = (ln\,8)/k.$

$k = ln\,2/20$ ekanini hisobga olsak, $ln\,8 = 3ln\,2$ bo‘lganligi sababli

$$t = (3ln\,2)/(ln\,2/20) = 60\,minut.$$

(cc) BY

Demak, jism boshlang‘ich $100°C$ temperaturadan $30°C$ gacha sovishi uchun jami 60 minut kerak bo‘ladi. Bunda dastlabki 20 minutda temperatura $100°C$ dan $60°C$ gacha, keyingi 40 minutda esa $60°C$ dan $30°C$ gacha pasayadi.

Natijani tekshirish. $t = 60$ minut uchun temperatura formulasiga qiymatlarni qo‘yamiz:

$$T(60) = 20 + 80e\text{^}(-60 \cdot ln2/20)$$

$$T(60) = 20 + 80e\text{^}(-3ln2) = 20 + 80/8 = 30°C.$$

Tekshirish hisoblangan vaqt masala shartini qanoatlantirishini tasdiqlaydi. Shuningdek, $T(t) = 20 + 80e\text{^}(-kt)$ formuladan $t \to \infty$ da $T(t) \to 20°C$ ekanligi kelib chiqadi. Bu jism temperaturasi havo temperaturasiga yaqinlashishini, ammo ideal modelda undan pastga tushmasligini anglatadi.

Modelning qo‘llanish chegaralari. Nyutonning sovish qonuni jism temperaturasi bilan muhit temperaturasi farqi ma’lum sharoitlarda sovish tezligiga proporsional bo‘lishini nazarda tutadi. Masalada havo temperaturasi o‘zgarmas, sovish koeffitsiyenti doimiy va jism temperaturasi butun hajm bo‘yicha bir xil deb qabul qilinadi. Haqiqiy jarayonlarda jismning shakli, sirt yuzasi, havo oqimi va material xossalari sovish tezligiga ta’sir qilishi mumkin. Shuning uchun model berilgan shartlar doirasida qo‘llanadi.

IKKI MASALANING METODIK TAHLILI

Ko‘rib chiqilgan masalalar turli fizik hodisalarni ifodalasa-da, ularni yechishning umumiy metodik ketma-ketligi mavjud. Birinchi bosqichda masala shartidagi fizik kattaliklar va ular orasidagi bog‘lanish aniqlanadi. Ikkinchi bosqichda jarayonni ifodalovchi qonun differensial tenglama ko‘rinishida yoziladi. Uchinchi bosqichda boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlar qo‘llanib, tenglamaning noma’lum parametrlari topiladi. To‘rtinchi bosqichda yechimdan izlanayotgan kattalik hisoblanadi va natija fizik mazmun jihatidan tahlil qilinadi.

O‘q harakati masalasida qarshilik kuchi tezlikning kvadratiga proporsional bo‘lib, Nyutonning ikkinchi qonuni asosiy modelni beradi. Sovish masalasida esa temperatura o‘zgarish tezligi bilan jism va muhit temperaturalari farqi orasidagi proporsionallikdan foydalaniladi. Birinchi masalada mustaqil o‘zgaruvchini vaqt o‘rniga koordinata bilan almashtirish muhim bo‘lsa, ikkinchi masalada o‘zgaruvchilarni ajratish usuli yetarli bo‘ladi.

Bu misollarni dars jarayonida o‘rganish talabalarda formulani tayyor holda qo‘llashdan ko‘ra, fizik vaziyatdan matematik modelni mustaqil tuzish malakasini rivojlantiradi. Shuningdek, birliklarni moslashtirish, parametrlarning o‘lchov birligini aniqlash, yechimni tekshirish va modelning amal qilish shartlarini baholashga e’tibor qaratish zarur.

(cc) BY

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Boyce W. E., DiPrima R. C., Meade D. B. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley.

2. Zill D. G. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Cengage Learning.

3. Coddington E. A. An Introduction to Ordinary Differential Equations. Dover Publications.

4. Differensial tenglamalar bo‘yicha oliy ta’lim muassasalari uchun o‘quv qo‘llanmalar va ma’ruza materiallari.